ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 26 1990 Вып. 4

УДК 621.391.1

В. А. Лазарев, Р. З. Хасьминский

ОЦЕНИВАНИЕ ФАЗЫ НЕСУЩЕЙ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ

Предложены различные рекуррентные методы оценки неизвестной фазы несущей φ_0 для случая, когда передача информации осуществляется путем двухфазной фазовой манипуляции. Построены процедуры, асимптотически эффективные как для известного отношения сигнал/шум, так и для неизвестного. Предложены упрощенные процедуры, по асимптотической эффективности лишь немного уступающие оптимальным.

§ 1. Постановка задачи

Пусть для передачи информации по каналу с гауссовским белым шумом используется двухфазная фазовая манипуляция. Будем считать, что скачки фазы происходят в моменты времени $t=1, 2, 3, \ldots$ Тогда сигнал на входе приемного устройства представим в виде

$$(1) \qquad d\tilde{X}(t)=q_{[t]}A\sin(\omega t+\varphi_0)\,dt+\sigma dw(t), \quad 0\leqslant t<T.$$

Здесь $w(t)$ — винеровский процесс, ω — известная частота несущей, $\omega=\pi i$, $i\in Z_+$, φ_0 — неизвестная фаза несущей, оценку которой требуется построить, $[t]$ — целая часть t, T — интервал наблюдений, q_n, $n\in Z_+$ — последовательность случайных величин с распределением

$$(2) \qquad \mathbf{P}\{q_n=-1\}=\mathbf{P}\{q_n=1\}=0{,}5, \ n\in Z_+.$$

Поскольку изменение параметра φ_0 в уравнении (1) на π эквивалентно умножению всех q_n, $n\in Z_+$ на -1, то с учетом (2) точки φ_0 и $\varphi_0+\pi$ неразличимы и мы будем полагать, что $\varphi_0\in[0, \pi[$.

Некоторые из используемых на практике методов формирования сигнала с опорной фазой для данного способа кодирования информации приведены в [1]. Это ФАПЧ с удвоением частоты, схема Костаса, синфазно-квадратурный метод и схема с управлением по решению. Однако в системах с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты эти способы не всегда дают хороший результат из-за большого времени вхождения в синхронизм. Наряду с этим в большом числе работ ([2 и др.]) рассматривалась задача оценивания параметра сигнала (в нашем случае — φ_0) при наблюдении в гауссовском белом шуме. Математически строгие результаты были впервые получены в [3]. Там доказана, в частности, асимптотическая эффективность оценок максимального правдоподобия (ОМП) и байесовской (в модели (1) эти результаты соответствуют известным q_n). Рекуррентная процедура оценки фазы периодического сигнала известной формы была предложена в [4], где, в частности, даны условия ее асимптотической эффективности.

В описываемой задаче точная форма сигнала (значения величин q_n) неизвестна и необходимо применить другой способ построения рекуррентной оценки. В настоящей работе мы предлагаем рекуррентный метод построения оценки φ_0, при котором используется лишь априорное распределение величин q_n, отказываясь от уточнения q_n на основании наблюдений. Нам кажется, что такой подход естествен в тех случаях, когда параметры системы не позволяют получить достаточно надежную оценку величин q_n.

§ 2. Сведение к независимым дискретным наблюдениям

Процесс наблюдений (1) эквивалентен, конечно, наблюдаемому процессу $X(t)=\tilde{X}(t)/\sigma$, для которого

$$dX(t)=q_{[t]}\sqrt{2Q_0}\sin(\omega t+\varphi_0)\,dt+dw(t),\ 0\leqslant t<T, \tag{3}$$

где $2Q_0=A^2/\sigma^2$ — отношение сигнал/шум.

Будем считать, что q_n — независимые случайные величины.

Обозначим $x_n=x_n(t)$ отрезок процесса наблюдений (3) на интервале $\Delta_n=[n,\,n+1[$, $n=0,\,1,\ldots,\,T-1$. Эти наблюдения независимы.

Наряду с (3) рассмотрим семейство процессов $X_\varphi(t)$ со стохастическими дифференциалами

$$dX_\varphi(t)=q_{[t]}\sqrt{2Q_0}\sin(\omega t+\varphi)\,dt+dw(t). \tag{4}$$

На интервале Δ_n, $n=0,\,1,\ldots,\,T-1$ рассмотрим следующие вероятностные меры: $\mathbf{P}_w^n(\cdot)$ — мера, определяемая процессом $w(t)$; $\mathbf{P}_{\varphi,j}^n(\cdot)$ — мера, определяемая процессом $X_\varphi(t)$ при известном $q_n=j$.

Обозначим

$$\mathbf{P}_\varphi^n(\cdot)=[\mathbf{P}_{\varphi,1}^n(\cdot)+\mathbf{P}_{\varphi,-1}^n(\cdot)]/2 \tag{5}$$

меру процесса наблюдений (4), отвечающую априорному распределению (2). Хорошо известно [5], что

$$\frac{d\mathbf{P}_{\varphi,j}^n}{d\mathbf{P}_w^n}(x_n)=\exp\left\{\int\limits_n^{n+1} j\sqrt{2Q_0}\sin(\omega t+\varphi)\,dX(t)-\int\limits_n^{n+1} Q_0\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt\right\}. \tag{6}$$

Обозначим

$$S_n(\varphi)=\sqrt{2}\int\limits_n^{n+1}\sin(\omega t+\varphi)\,dX(t),\qquad C_n(\varphi)=\sqrt{2}\int\limits_n^{n+1}\cos(\omega t+\varphi)\,dX(t).$$

Из (5) и (6) следует, что наблюдения x_n, $n=0,\,1,\ldots,\,T-1$ одинаково распределены с плотностью относительно винеровской меры

$$p(x_n,\,\varphi_0)=\exp\{-Q_0/2\}\operatorname{ch}[\sqrt{Q_0}S_n(\varphi_0)]. \tag{7}$$

Таким образом, задача сводится к оценке параметра φ_0 по последовательности независимых наблюдений $x_0,\ldots,x_{T-1}$ со значениями в $L_2(0,\,1)$ и с общей плотностью (7) относительно винеровской меры.

§ 3. Анализ качества наилучших оценок в зависимости от отношения сигнал / шум

Здесь и в дальнейшем буквами ξ и ζ с индексами и без индексов обозначаются нормальные случайные величины с параметрами $(0,\,1)$.

Качество наилучшей оценки зависит, как известно, от величины информации Фишера $I(\varphi_0)$, вычисляемой по формуле

$$I(\varphi)\int[\partial\ln p(x,\varphi)/\partial\varphi]^2 p(x,\varphi)\,d\mathbf{P}_w(x). \tag{8}$$

Из (7) и (8) находим

(9) $$I(\varphi)=e^{-Q_0/2}\times$$

$$\times\mathbf{E}\frac{\left[\operatorname{sh}\left(\sqrt{2Q_0}\int\limits_0^1 \sin(\omega t+\varphi)\,dw(t)\right)\sqrt{2Q_0}\int\limits_0^1\cos(\omega t+\varphi)\,dw(t)\right]^2}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2Q_0}\int\limits_0^1\sin(\omega t+\varphi)\,dw(t)\right)}=$$

$$=Q_0e^{-Q_0/2}\mathbf{E}\frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{Q_0}\xi}{\operatorname{ch}\sqrt{Q_0}\xi}=Q_0(1-e^{-Q_0/2}\mathbf{E}\operatorname{sech}\sqrt{Q_0}\xi).$$

Из общих результатов [5] о свойствах статистических оценок вытекает, что для любой последовательности оценок $\varphi^{(T)}$, основанной на наблюдениях $(x_0,\ldots,x_{T-1})=\{X(t),\ 0\leqslant t<T\}$, справедливо при любом $\varepsilon>0$ неравенство[1]

(10) $$\varlimsup_{T\to\infty}\sup_{|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon}\{T\mathbf{E}_\varphi|\varphi^{(T)}-\varphi|^2\}\geqslant I^{-1}=$$
$$=(Q_0-Q_0e^{-Q_0/2}\mathbf{E}\operatorname{sech}\sqrt{Q_0}\xi)^{-1}.$$

Если в (10) достигается равенство, то оценка называется асимптотически эффективной. Такой оценкой будет, например, оценка максимального правдоподобия

(11) $$\varphi^{(T)}=\operatorname*{argmax}_{0\leqslant\varphi<\pi}\prod_{n=0}^{T-1}p(x_n,\varphi)=$$
$$=\operatorname*{argmax}_{0\leqslant\varphi<\pi}\left\{\sum_{n=0}^{T-1}\ln\operatorname{ch}[\sqrt{Q_0}S_n(0)\cos\varphi+\sqrt{Q_0}C_n(0)\sin\varphi]\right\}.$$

Естественно сравнить (10) с соответствующим неравенством для случая, когда последовательность q_n известна статистику, что эквивалентно случаю $q_n\equiv1$. В этом случае известно ([5, с. 284]), что для асимптотически эффективной оценки фазы

(12) $$T\mathbf{E}_\varphi(\varphi^{(T)}-\varphi)^2\sim1/Q_0.$$

Определим точность асимптотически эффективной оценки при большом отношении сигнал/шум. При $Q_0\to\infty$ справедливо

$$\mathbf{E}\operatorname{sech}\sqrt{Q_0}\xi=\frac{2}{\sqrt{2\pi Q_0}}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-u^2/2Q_0}du}{\operatorname{ch}u}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi Q_0}}\left[\int\limits_0^\infty\frac{du}{\operatorname{ch}u}+O\left(\frac{1}{Q_0}\right)\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2Q_0}}\left(1+O\left(\frac{1}{Q_0}\right)\right).$$

Отсюда и из (9) получаем

(13) $$I=Q_0-\sqrt{\frac{\pi Q_0}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{Q_0}\right)\right]e^{-Q_0/2}.$$

---

[1] Конечно, неравенство (10) означает лишь, что квадратическое уклонение наилучшей оценки имеет порядок $(IT)^{-1}$ при $T\to\infty$ и фиксированном $Q_0>0$. Если же $T\to\infty$, $Q_0\to0$ одновременно, то порядок может быть другим.

Из (10), (12) и (13) видно, что при $Q_0 \gg 1$ асимптотически эффективная оценка для (3) отличается от соответствующей оценки при известных q_n лишь на величину порядка $\sqrt{\pi Q_0/2}\exp(-Q_0/2)$, т. е. очень незначительно.

Определим точность асимптотически эффективной оценки при малых Q_0. Используя разложение $\operatorname{sech} y = 1 - y^2/2 + O(y^4)$, имеем

$$\mathbf{E}\operatorname{sech}\sqrt{Q_0}\xi = (Q_0/2)\mathbf{E}\xi^2 + O(Q_0^2).$$

Отсюда и из (9) вытекает

$$I = Q_0[1 - (1 - Q_0/2 + O(Q_0^2))^2] = Q_0^2 + O(Q_0^3). \tag{14}$$

Как и следовало ожидать, при $Q_0 \ll 1$ эффективность оценок φ_0 при известной последовательности q_i существенно выше, чем для модели (3), и отношение эффективностей растет как Q_0^{-1} при $Q_0 \to 0$.

§ 4. Оценка фазы с помощью процедуры стохастической аппроксимации

Для вычисления оценки (11) необходимо сохранять полученные ранее коэффициенты $S_n(0)$ и $C_n(0)$ и проводить достаточно сложный пересчет на каждом шаге. Аналогичным недостатком обладают байесовские оценки. Более простыми являются процедуры стохастической аппроксимации, подробно изученные в [6].

Как отмечалось выше, значения φ_0, отличающиеся на π, неразличимы в нашей задаче, поэтому все оценки φ^n для φ_0 рассматриваются ниже по $\bmod \pi$.

1. Оценки при известном отношении сигнал/шум. Для независимых, одинаково распределенных наблюдений $Y_1, \ldots, Y_n$ с общей плотностью $p(y, \theta)$ известна асимптотически эффективная рекуррентная процедура оценки параметра θ (см., например, [6, с. 211]). В нашем случае эта процедура имеет вид

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \frac{1}{(n+1)I}\frac{(\partial/\partial\varphi)p(x_n, \varphi^n)}{p(x_n, \varphi^n)} = \varphi^n + \frac{1}{n+1}\psi(\varphi^n). \tag{15}$$

С учетом (7) и эквивалентности точек φ и $\varphi+\pi$, из (15) получаем

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + (\sqrt{Q_0}/(n+1)I)C_n(\varphi^n)\operatorname{th}[\sqrt{Q_0}S_n(\varphi^n)], \tag{16}$$

где информационное количество Фишера I определяется выражением (9). В силу того что $\operatorname{th} x \to \operatorname{sign} x$ при $|x| \to \infty$, имеет смысл при больших значениях Q_0 рассмотреть следующую упрощенную процедуру:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + (a/(n+1))\overline{\psi}(\varphi^n) = \varphi^n + (a/((n+ +1)\sqrt{Q_0}))C_n(\varphi^n)\operatorname{sign} S_n(\varphi^n). \tag{17}$$

Обозначим $R(\varphi) = \mathbf{E}\psi(\varphi)$, $\overline{R}(\varphi) = \mathbf{E}\overline{\psi}(\varphi)$. На интервале $[0, \pi[$ функции $R(\varphi)$ и $\overline{R}(\varphi)$ обращаются в нуль при двух значениях аргумента: φ_0 и $\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \pi/2$, причем точка $\tilde{\varphi}$ является неустойчивой для детерминированных процедур $\varphi^{n+1} = \varphi^n + R(\varphi^n)/(n+1)$ и $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \overline{R}(\varphi^n)/(n+1)$. В [6] изучен вопрос о предельном поведении процедуры стохастической аппроксимации, определенной в $\mathbf{E}_1$. Ясно, что полученные результаты распространяются и на процедуры (16) и (17), определенные на окружности $0 \leqslant \varphi < \pi$, а значит, эти процедуры сходятся к точке φ_0. Как показано там же, сходимость процедуры (16) к φ_0 влечет ее асимптотическую эффективность в слабом смысле, а сходимость к φ_0 процедуры (17) позволяет определить ее эффективность с помощью теоремы 6.6.1 ([6, с. 191]).

Для этого представим (17) в виде

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + (a/(n+1))\overline{\psi}(\varphi^n) = \varphi^n + (a/((n+1)\sqrt{Q_0}))\operatorname{sign}[q_n b_1(\varphi^n) + + \xi_{\varphi_0}{}^n](q_n b_2(\varphi^n) + \zeta_{\varphi_0}{}^n), \tag{18}$$

где

$$b_1(\varphi)=\sqrt{Q_0}\cos(\varphi_0-\varphi),\ b_2(\varphi)=\sqrt{Q_0}\sin(\varphi_0-\varphi),$$

$$\xi_\varphi{}^n=\sqrt{2}\int\limits_n^{n+1}\sin(\omega t+\varphi)\,dw(t),\qquad \zeta_\varphi{}^n=\sqrt{2}\int\limits_n^{n+1}\cos(\omega t+\varphi)\,dw(t).$$

Из (18) находим

(19) $$\bar R(\varphi)=\mathbf{E}\bar\psi(\varphi)=$$
$$=\sin(\varphi_0-\varphi)\operatorname{erf}\left\{\sqrt{\frac{Q_0}{2}}|\cos(\varphi_0-\varphi)|\right\}\operatorname{sign}[\cos(\varphi_0-\varphi)],$$

где $\operatorname{erf}\{y/\sqrt{2}\}=\mathbf{P}\{|\xi|<y\}$.

Аналогично из (18) имеем

(20) $$\mathbf{E}[\bar\psi(\varphi)]^2=\sin^2(\varphi_0-\varphi)+1/Q_0.$$

С учетом (19) и (20) из теоремы 6.6.1 из [6] получаем, что при $2a\operatorname{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\}>1$ процедура (17) асимптотически нормальна, причем $\sqrt{n}(\varphi^n-\varphi_0)\sim N(0,\bar\sigma^2(a))$, где

$$\bar\sigma^2(a)=a^2\mathbf{E}[\bar\psi(\varphi_0)]^2/(2a\operatorname{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\}-1)$$

и асимптотическая эффективность процедуры (17) максимальна при $a=[\operatorname{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\}]^{-1}$ и при этом $\sqrt{n}(\varphi^n-\varphi_0)\sim N(0,\bar\sigma^2)$, где

(21) $$\bar\sigma^2=Q_0^{-1}[\operatorname{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\}]^{-2}.$$

Найдем асимптотику (21) для $Q_0\to\infty$. Имеем

(22) $$\bar\sigma^2=Q_0^{-1}\left[1-\sqrt{\frac{2}{\pi Q_0}}e^{-Q_0/2}\left(1+O\left(\frac{1}{Q_0}\right)\right)\right]^{-2}=$$
$$=\left\{Q_0-\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\pi Q_0}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{Q_0}\right)\right]e^{-Q_0/2}\right\}^{-1}.$$

При малых значениях Q_0 из (21) находим

(23) $$\bar\sigma^2=Q_0^{-1}\left[\sqrt{\frac{2Q_0}{\pi}}(1+O(Q_0))\right]^{-2}=\left[\frac{2}{\pi}Q_0{}^2(1+O(Q_0))\right]^{-1}.$$

Сравнение выражений (22) и (23) с (13) и (14) показывает, что проигрыш в эффективности упрощенной рекуррентной оценки (17) по сравнению с асимптотически оптимальной оценкой (16) незначителен: при малых Q_0 $\bar\sigma^2/\sigma_0\approx 2/\pi\approx 0{,}63$, а при больших Q_0 $\bar\sigma^2/\sigma_0\approx 1$.

2. Оценки при неизвестном отношении сигнал/шум. На практике величина Q_0 обычно неизвестна. Поэтому для получения эффективной оценки φ_0 необходимо оценивать оба параметра, φ_0 и Q_0. Будем обозначать $p(x,\varphi,Q_0)$ плотность вероятности наблюдения x при неизвестном Q_0, определяемую выражением (7). Качество наилучшей оценки φ_0 в этой ситуации определяется элементом g_{11} матрицы $\|g_{ij}\|=I^{-1}(Q_0)$, где $I(Q)$ — информационная матрица Фишера:

$$I(Q)=\left\|\begin{matrix} I_\varphi(Q) & I_{\varphi,Q}(Q)\\ I_{\varphi,Q}(Q) & I_Q(Q)\end{matrix}\right\|,$$

где

$$I_\varphi(Q)=\mathbf{E}_w\frac{[(\partial/\partial\varphi)p(x,\varphi,Q)]^2}{p(x,\varphi,Q)},$$

$$I_Q(Q)=\mathbf{E}_w\frac{[(\partial/\partial Q)p(x,\varphi,Q)]^2}{p(x,\varphi,Q)},$$

$$I_{\varphi,Q}(Q)=\mathbf{E}_w\frac{(\partial/\partial\varphi)p(x,\varphi,Q)\,(\partial/\partial Q)p(x,\varphi,Q)}{p(x,\varphi,Q)}.$$

Выражение для $I_\varphi(Q)$ совпадает с (9), поэтому необходимо определить только $I_Q(Q)$ и $I_{\varphi,Q}(Q)$. Из независимости $\xi_\varphi{}^n$ и $\zeta_\varphi{}^n$ легко вытекает, что $I_{\varphi,Q}(Q)=0$. С учетом того что

$$\mathbf{E}\xi\,\mathrm{sh}\sqrt{Q}\xi=\sqrt{Q}e^{Q/2},\quad \mathbf{E}\xi^2\,\mathrm{ch}\sqrt{Q}\xi=(1+Q)e^{Q/2},$$

имеем

$$I_Q(Q)=\frac{e^{-Q/2}}{4}\mathbf{E}\frac{[\mathrm{sh}(\sqrt{Q}\xi_\varphi)\xi_\varphi{}^0/\sqrt{Q}-\mathrm{ch}\sqrt{Q}\xi_\varphi{}^0]^2}{\mathrm{ch}\sqrt{Q}\xi_\varphi{}^0}=$$

$$=\frac{1}{4Q}-\frac{e^{-Q/2}}{4Q}\mathbf{E}\xi^2\,\mathrm{sech}\sqrt{Q}\xi.$$

Так как матрица $I(Q)$ диагональна, то (см., например, [5, с. 222]) в этой ситуации для любой оценки φ^n величины φ_0

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon}\{n\mathbf{E}_\varphi(\varphi^n-\varphi)^2\}\geqslant 1/I_\varphi(Q_0).$$

Таким образом, дисперсия наилучшей оценки в случае неизвестного Q_0 совпадает асимптотически при $n\to\infty$ с дисперсией наилучшей оценки при известном Q_0, поскольку величина $I_\varphi(Q_0)$ совпадает с (9).

Воспользуемся асимптотически эффективной рекуррентной процедурой оценки многомерного параметра ([6, с. 255]). В нашем случае эта процедура имеет вид

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\varphi^{n+1}=\varphi^n+\frac{1}{(n+1)I_\varphi(Q^n)}\frac{(\partial/\partial\varphi)p(x_n,\varphi^n,Q^n)}{p(x_n,\varphi^n,Q^n)}=\\
&=\varphi^n+\frac{1}{n+1}\psi_\varphi(\varphi^n,Q^n),\\
&Q^{n+1}=Q^n+\frac{1}{(n+1)I_Q(Q^n)}\frac{(\partial/\partial Q)p(x_n,\varphi^n,Q^n)}{p(x_n,\varphi^n,Q^n)}=\\
&=Q^n+\frac{1}{n+1}\psi_Q(\varphi^n,Q^n).
\end{aligned}\right.$$

С учетом (7) из (24) получаем

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\varphi^{n+1}=\varphi^n+\frac{\sqrt{Q^n}}{(n+1)I_\varphi(Q^n)}C_n(\varphi^n)\,\mathrm{th}[\sqrt{Q^n}S_n(\varphi^n)],\\
&Q^{n+1}=Q^n+\frac{1}{2(n+1)I_Q(Q^n)}\left\{\frac{S_n(\varphi^n)}{\sqrt{Q^n}}\mathrm{th}[\sqrt{Q^n}S_n(\varphi^n)]-1\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Как и в случае известного Q_0, наряду с (25) рассмотрим упрощенную процедуру

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi^{n+1}=\varphi^{*}+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{Q^n}}C_n(\varphi^n)\operatorname{sign}[S_n(\varphi^n)]= \\ =\varphi^n+\dfrac{1}{n+1}\overline{\psi}_\varphi(\varphi^n,Q^n), \\ Q^{n+1}=Q^n+\dfrac{2\sqrt{Q^n}}{n+1}\{S_n(\varphi^n)\operatorname{sign}[S_n(\varphi^n)]-\sqrt{Q^n}\}= \\ =Q^n+\dfrac{1}{n+1}\overline{\psi}_Q(\varphi^n,Q^n). \end{cases}$$

Заметим, что в процедурах (25) и (26) целесообразно использовать оценку максимального правдоподобия, полученную по наблюдению x_0 на интервале $[0, 1[$, и полагать в качестве начального условия процедуры

$$\varphi^1=\operatorname{arcctg}(C_0(0)/S_0(0)).$$

Будем предполагать, что отношение сигнал/шум Q_0 ограничено снизу известной величиной Q_1, т. е. $Q_0>Q_1>0$. Обозначим для любого $y\in E_1$: $[y]_z=\max(y, z)$. Тогда можно рассмотреть модификации процедур (25) и (26) (см. [6, с. 208]). Так, наряду с (25) рассмотрим процедуру

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi^{n+1}=\varphi^n+(1/(n+1)\psi_\varphi(\varphi^n,Q^n), \\ Q^{n+1}=[Q^n+(1/(n+1)\psi_Q(\varphi^n,Q^n)]_{Q_1}. \end{cases}$$

Аналогично наряду с (26) рассмотрим процедуру

$$(28)\quad \begin{cases} \varphi^{n+1}=\varphi^n+(1/(n+1))\overline{\psi}_\varphi(\varphi^n,Q^n), \\ Q^{n+1}=[Q^n+(1/(n+1))\overline{\psi}_Q(\varphi^n,Q^n)]_{Q_1}. \end{cases}$$

В (27) и (28) функции $\psi_\varphi(\varphi, Q)$, $\psi_Q(\varphi, Q)$, $\overline{\psi}_\varphi(\varphi, Q)$, $\overline{\psi}_Q(\varphi, Q)$ определяются согласно (25) и (26).

В ([6, теорема 2.2.1]) показано, что состоятельность и асимптотическая эффективность усеченной процедуры вытекает из свойств соответствующей неусеченной процедуры.

Состоятельность процедуры (28) показана в Приложении. Состоятельность процедуры (27) показывается аналогично и влечет ее асимптотическую эффективность в слабом смысле, как и в случае известного Q_0. Также определим эффективность процедуры (28). Для этого представим (26) в виде

$$(29)\quad \begin{cases} \varphi^{n+1}=\varphi^n+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{Q^n}}[q_nb_2(\varphi^n)+\xi_{\varphi_0}{}^n]\operatorname{sign}[q_nb_1(\varphi^n)+\zeta_{\varphi_0}{}^n], \\ Q^{n+1}=Q^n+\dfrac{2\sqrt{Q^n}}{n+1}[|q_nb_1(\varphi^n)+\xi_{\varphi_0}{}^n|-\sqrt{Q^n}]. \end{cases}$$

Обозначим $\overline{R}_\varphi(\varphi, Q)=\mathbf{E}\overline{\psi}_\varphi(\varphi, Q)$, $\overline{R}_Q(\varphi, Q)=\mathbf{E}\overline{\psi}_Q(\psi, Q)$. Из (29) находим

$$(30)\quad \overline{R}_\varphi(\varphi,Q)=(b_2(\varphi)/\sqrt{Q})\operatorname{erf}\{|b_1(\varphi)|/\sqrt{2}\}\operatorname{sign}[b_1(\varphi)].$$

Аналогично имеем

$$(31)\quad \overline{R}_Q(\varphi,Q)=2\sqrt{Q}(\sqrt{\tilde{Q}_\varphi}-\sqrt{Q}),\ \tilde{Q}_\varphi=[\mathbf{E}|b_1(\varphi)+\xi|]^2.$$

Как показано в Приложении, процедура (28) сходится к точке $(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})$.

Для определения эффективности этой процедуры найдем разложение функций $\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)$ и $\bar{R}_Q(\varphi, Q)$ в окрестности этой точки. Имеем из (30) и (31)

$$(32)\qquad \begin{pmatrix} \bar{R}_\varphi(\varphi, Q) \\ \bar{R}_Q(\varphi, Q) \end{pmatrix} = \mathbf{H}\begin{pmatrix} \varphi-\varphi_0 \\ Q-\tilde{Q}_{\varphi_0} \end{pmatrix} + o(r),$$

где

$$\mathbf{H}=\|h_{ij}\|=\left\| \begin{matrix} -\sqrt{Q_0/\tilde{Q}_{\varphi_0}}\,\mathrm{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\} & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|, \qquad r^2=(\varphi-\varphi_0)^2+(Q-\tilde{Q}_{\varphi_0})^2.$$

Поскольку из (29) следует, что

$$(33)\qquad \mathbf{E}\{\bar{\psi}_\varphi,(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})\bar{\psi}_Q(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})\}=b_1(\varphi_0)b_2(\varphi_0)-2\tilde{Q}_{\varphi_0}\bar{R}_\varphi(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})=0,$$

то для определения эффективности остается определить

$$(34)\qquad \mathbf{E}\,[\bar{\psi}_\varphi(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})]^2=\{[b_2(\varphi_0)]^2+1\}/\tilde{Q}_{\varphi_0}=1/\tilde{Q}_{\varphi_0}.$$

Применяя теперь указанную выше теорему 6.6.1 из [6], получаем с учетом (33) и (34), что процедура (28) при $2\sqrt{Q_0/\tilde{Q}_{\varphi_0}}\,\mathrm{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\}>1$ асимптотически нормальна и $\sqrt{n}(\varphi^n-\varphi_0)\sim N(0, \bar{\sigma}^2)$, где

$$(35)\qquad \bar{\sigma}^2=\{Q_0[\mathrm{erf}\{\sqrt{Q_0/2}\}]^2-2e^{-Q_0}/\pi\}^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что асимптотика (35) для $Q_0\to\infty$ совпадает с (22), т. е. при больших значениях сигнал/шум проигрыш в эффективности при использовании упрощенной процедуры в случае известного Q_0 совпадает асимптотически с соответствующим проигрышем при неизвестном Q_0.

Из анализа выражений (18) и (19) вытекает, что статистические свойства приведенных процедур не зависят от последовательности $\{q_n\}$. Действительно, последовательности случайных величин $q_n\xi_{\varphi_0}{}^n$, $q_n\zeta_{\varphi_0}{}^n$ независимы и распределены одинаково с последовательностями $\xi_{\varphi_0}{}^n$, $\zeta_{\varphi_0}{}^n$ при любой зависимости случайных величин $q_0, q_1, \ldots$, если q_n принимают значения ±1, иными словами, если последовательность q_n является зависимой, то дисперсия оценки φ^n также определяется формулами (21) и (35). Конечно, в этом случае эти оценки уже не являются эффективными, однако на практике эта последовательность близка к независимой и проигрыш в эффективности достаточно мал.

§ 5. Выводы

1°. Задача оценки начальной фазы φ_0 при передаче информации с помощью двухфазной манипуляции может быть сведена к задаче оценки неизвестного параметра φ_0 по дискретным независимым наблюдениям с плотностью, задаваемой выражением (7). Минимаксная нижняя граница величины $n\mathrm{E}(\varphi^n-\varphi_0)^2$ для несмещенной оценки дается выражением (10).

2°. Асимптотические выражения (13) для нижней границы (10) при $Q_0\to\infty$ и (14) для $Q_0\to0$ позволяют провести сравнение со случаем, когда последовательность $\{q_n\}$ известна статистику. При больших значениях Q_0 отличие от соответствующего выражения (12) оказывается малым.

3°. Для оценки начальной фазы удобно использовать процедуры типа стохастической аппроксимации. В случае известного отношения сигнал/ /шум асимптотически эффективная процедура стохастической аппроксимации имеет вид (16). Вместо нее может быть использована упрощенная процедура (17). Эти процедуры состоятельны, а асимптотическая эффективность процедуры (17) дается формулой (21). При $Q_0\gg1$ асимптотическая эффективность процедуры (17) близка к единице.

4°. Если Q_0 неизвестно, однако известно $Q_1>0$ такое, что $Q_0>Q_1$, то двумерные процедуры стохастической аппроксимации (27) или (28) оценивают одновременно φ_0 и Q_0. Асимптотическая эффективность процедуры (28) та же, что и для известного Q_0.

5°. Все статистические свойства приведенных процедур остаются в силе, если последовательность $q_0, q_1, \ldots$ — произвольная, принимающая значения ± 1. Конечно, асимптотическая эффективность предположенных процедур имеет место лишь в случае, когда q_n удовлетворяют условию (2) и независимы.

Авторы благодарят Г. К. Голубева, обратившего их внимание на задачу оценки φ_0 по наблюдениям вида (1) и принимавшего активное участие в обсуждении результатов.

Приложение

Покажем, что процедура (28) сходится при любых начальных значениях (φ^0, Q^0), $\varphi^0 \in [0, \pi[$, $Q^0>Q_1$ к точке $(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})$, где $\tilde{Q}_\varphi$ определяется выражением (31). Доказательство этого будет проведено в три этапа.

1. Покажем, что существует $Q_2>Q_1$ такое, что $Q^t \in [Q_1, Q_2]$ при любом начальном условии $\varphi^0 \in [0, \pi[$, $Q^0>Q_1$ и $t>t_0$, где t_0 — некоторый случайный момент времени. Действительно, обозначим $Q_3=(\mathbf{E}|\sqrt{Q_0}+\xi|)^2$. Пусть L — производящий оператор цепи (28). Рассмотрим функцию

$$V_1(\varphi, Q, t)=\ln[1+([Q-Q_3]_+)^2]+k_1\sum_{i=t+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}, \tag{П.1}$$

где k_1 — достаточно большая постоянная. С использованием (31) легко показать, что существуют положительные постоянные k_1, k_2 и $\bar{Q}>Q_3$ такие, что

$$\begin{aligned} &LV_1(\varphi, Q, t)<-k_2/(t+1), \quad Q>\bar{Q}, \quad t\geqslant 0,\\ &LV_1(\varphi, Q, t)<0, \quad \bar{Q}>Q>Q_1, \quad t\geqslant 0. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Поскольку $V_1(\varphi^t, Q^t, t)$ — ограниченный снизу супермартингал, то существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} V_1(\varphi^t, Q^t, t)=\eta$. Отсюда и из (П.2) вытекает требуемое утверждение с помощью теоремы 2.5.1 из [6].

2. Покажем, что процедура (28) сходится к множеству $D=\{(\varphi, Q), \bar{R}_\varphi(\varphi, Q)=\bar{R}_Q(\varphi, Q)=0\}$, состоящему из двух точек $(\varphi_0, \tilde{Q}_{\varphi_0})$ и $(\tilde{\varphi}, \tilde{Q}_{\tilde{\varphi}})$, где $\tilde{\varphi}=\varphi_0+\pi/2$. Для этого рассмотрим функцию

$$V_2(\varphi, Q, t)=-k_3\int_0^{\varphi}\bar{R}_\varphi(s, Q_0)\,ds+\ln[1+(Q-\tilde{Q}_\varphi)^2]+k_4\sum_{i=t+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}, \tag{П.3}$$

где k_3, k_4 — положительные постоянные.

Заметим, что в полосе $Q\in[Q_1, Q_2]$ справедливы неравенства

$$(\partial/\partial Q)\,V_2(\varphi, Q, t)=-2(\tilde{Q}_\varphi-Q)/(1+(\tilde{Q}_\varphi-Q)^2)<-k_5\bar{R}_Q(\varphi, Q). \tag{П.4}$$

С учетом (30)

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial\tilde{Q}_\varphi}{\partial\varphi}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathbf{E}|b_1(\varphi)+\xi|)^2\right| =\\ &=\left|2\sqrt{\tilde{Q}_\varphi}\operatorname{erf}\left\{\frac{|b_1(\varphi)|}{\sqrt{2}}\right\}b_2(\varphi)\right|<k_6|\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)|. \end{aligned} \tag{П.5}$$

Далее, учитывая, что $\bar{R}_\varphi(\varphi, Q_0)=\sqrt{Q/Q_0}\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)$, получаем

$$(\text{П.6})\qquad \frac{\partial}{\partial\varphi} V_2(\varphi, Q, t)=-k_3R_\varphi(\varphi, Q_0)+\frac{2(\tilde{Q}_\varphi-Q)}{1+(\tilde{Q}_\varphi-Q)^2}\frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi}<-k_7\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)$$

при достаточно большом k_3. Используя разложение

$$V_2(\varphi^{t+1}, Q^{t+1}, t)-V_2(\varphi^t, Q^t, t)=(\partial/\partial\varphi)V_2(\varphi^t, Q^t, t)\times$$
$$\times(\varphi^{t+1}-\varphi^t)+(\partial/\partial Q)V_2(\varphi^t, Q^t, t)(Q^{t+1}-Q^t)-$$
$$-(k_4/(t+1)^2)+O[(\varphi^{t+1}-\varphi^t)^2+(Q^{t+1}-Q^t)^2],$$

при достаточно большом k_4 имеем

$$(\text{П.7})\qquad LV_2(\varphi, Q, t)\leqslant(1/(t+1))[(\partial/\partial\varphi)V_2(\varphi, Q, t)\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)+$$
$$+(\partial/\partial Q)V_2(\varphi, Q, t)\bar{R}_Q(\varphi, Q)].$$

Из (П.4), (П.6) и (П.7) вытекает

$$(\text{П.8})\qquad LV_2(\varphi, Q, t)<-(k_8/(t+1))\{[\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)]^2+[\bar{R}_Q(\varphi, Q)^2\}.$$

Функция $V_2(\varphi^t, Q^t, t)$ — ограниченный снизу супермартингал, и поэтому существует $\lim\limits_{\to\infty} V_2(\varphi^t, Q^t, t)=\gamma$. Отсюда и из (П.8) с учетом расходимости ряда $\Sigma 1/(t+1)$ вытекает $\mathbf{P}\{\varliminf\limits_{t\to\infty}\rho(\varphi^t, D)=0\}=1$ (см. [6, задача 5.1, с. 53]). Из последнего неравенства следует ([6, с. 63]), что $\mathbf{P}\{\lim\limits_{t\to\infty}\rho(\varphi^t, D)=0\}=1$.

3. Покажем, что процедура (28) не может с положительной вероятностью сходиться к точке $(\tilde{\varphi}, \tilde{Q}_{\tilde{\varphi}})$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\tilde{\varphi}=0$ (т. е. $\varphi_0=\pi/2$). Тогда $\tilde{Q}_{\tilde{\varphi}}=\mathbf{E}\xi^2=1$. Из (30) получаем в окрестности точки $(\varphi, \tilde{Q}_{\tilde{\varphi}})=(0, 1)$

$$(\text{П.9})\qquad R_\varphi(\varphi, Q)=\sqrt{Q_0/Q}\ \mathrm{erf}\ \{\sqrt{Q_0/2}|\varphi|\}\ \mathrm{sign}(\varphi)+o(\varphi)=$$
$$=Q_0\sqrt{2/\pi Q}\varphi+o(\varphi).$$

Отсюда следует, что существует $\beta>0$ такое, что неравенство

$$(\text{П.10})\qquad \varphi R_\varphi(\varphi, Q)>\beta\varphi^2$$

справедливо для $(\varphi, Q)\in G$, где G — достаточно малая окрестность точки $(0, 1)$.

В окрестности точки $(0, 1)$ справедливо представление

$$(\text{П.11})\qquad \begin{pmatrix}\bar{R}_\varphi(\varphi, Q)\\ \bar{R}_Q(\varphi, Q)\end{pmatrix}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\varphi\\ Q-1\end{pmatrix}+0(r),$$

где $r^2=\varphi^2+(Q-1)^2$.

В случае, когда собственные числа матрицы $\mathbf{U}$ имеют положительные действительные части, поведение траекторий (28) исследовано в ([6, теорема 5.4.1]). В нашем случае из (П.9) и (31) имеем

$$\mathbf{U}=\begin{Vmatrix}Q_0\sqrt{2/\pi} & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix},$$

т. е. точка $(0, 1)$ является гиперболической особой точкой. Однако, учитывая (П.10), нетрудно обобщить указанную теорему для нашего случая. С этой целью построим соответствующую вспомогательную функцию $V_3(\varphi, Q, t)$, но в отличие от приведенной в доказательстве теоремы 5.9.1 из [6] эта функция не будет зависеть от компоненты Q.

Положим

$$V_3(\varphi, Q, t)=\ln[(t+1)/M]-W(z),$$

где функция

$$(\Pi.12)\qquad W(z)=\int\limits_0^z dv\int\limits_0^v \frac{e^{u-v}}{\sqrt{uv}}\,du,$$

впервые предложенная в [7] для анализа процедур с непрерывным временем, $z=\varphi^2(t+1)/M$, M — постоянная, значение которой будет выбрано ниже.

Обозначим y приращение аргумента функции $W(z)$ за один шаг на траектории системы (26):

$$(\Pi.13)\qquad y=\frac{1}{M}\left\{\left[\varphi+\frac{1}{t+1}\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)\right]^2(t+2)-\varphi^2(t+1)\right\}=$$
$$=\frac{z}{t+1}+\frac{t+2}{M}\left\{\frac{2\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)\varphi}{t+1}+\frac{[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2}{(t+1)^2}\right\}.$$

Отсюда имеем

$$(\Pi.14)\qquad \mathbf{E}y=\frac{z}{t+1}+\frac{t+2}{M}\left\{\frac{2\bar{R}_\varphi(\varphi,Q)\varphi}{t+1}+\frac{\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2}{(t+1)^2}\right\}.$$

Аналогично

$$(\Pi.15)\qquad \mathbf{E}y^2=\frac{z^2}{(t+1)^2}+\frac{2z(t+2)}{M(t+1)}\left\{\frac{2\bar{R}_\varphi(\varphi,Q)\varphi}{t+1}+\frac{\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2}{(t+1)^2}\right\}+$$
$$+\frac{(t+2)^2}{M^2}\left\{\frac{4\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2\varphi^2}{(t+1)^2}+\frac{4\varphi\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^3}{(t+1)^3}+\frac{\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^4}{(t+1)^4}\right\}.$$

Производящий оператор L цепи $(\varphi^t,\ Q^t)$ можно представить в виде

$$(\Pi.16)\qquad LV_3(\varphi,Q,t)=\ln((t+2)/(t+1))-W'(z)\mathbf{E}y-{}^1/_2W''(z)\mathbf{E}y^2+$$
$$+J_1(\varphi,Q,t),$$

остаточный член $J_1(\varphi,\ Q,\ t)$ оценивается совершенно аналогично ([6, с. 154]), а именно

$$J_1(\varphi,Q,t)<\gamma_1(t),\qquad \sum_{t=0}^{\infty}\gamma_1(t)<\infty.$$

Используя неравенство

$$\ln[(t+2)/(t+1)]<1/(t+1),$$

получаем

$$\ln((t+2)/(t+1))-W'(z)\mathbf{E}y-{}^1/_2W''(z)\mathbf{E}y^2<J_2(\varphi,Q,t)+$$
$$+J_3(\varphi,Q,t),$$

где

$$(\Pi.17)\qquad J_2(\varphi,Q,t)=1/(t+1)-W'(z)\{z/(t+1)+2\varphi\bar{R}_\varphi(\varphi,Q)/M+$$
$$+\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2/M(t+1)\}-2W''(z)\varphi^2\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2/M^2,$$

и соответственно

$$J_3(\varphi,Q,t)=$$
$$=-W'(z)\left\{\frac{2\varphi\bar{R}_\varphi(\varphi,Q)}{M(t+1)}+\frac{\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2}{(t+1)^2}\right\}[(t+2)-(t+1)]-$$
$$-\frac{1}{2}W''(z)\frac{4\varphi^2\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2}{(t+1)^2}[(t+2)^2-(t+1)^2]-$$
$$-\frac{1}{2}W'(z)\left\{\frac{z^2}{(t+1)^2}+\frac{2z(t+2)}{M(t+1)}\left[\frac{2\varphi\bar{R}_\varphi(\varphi,Q)}{t+1}+\frac{\mathbf{E}[\bar{\psi}_\varphi(\varphi,Q)]^2}{(t+1)^2}\right]+\right.$$

$$+\frac{(t+2)^2}{M}\left[\frac{4\varphi\mathbf{E}[\bar\psi_\varphi(\varphi,Q)]^3}{(t+1)^3}+\frac{\mathbf{E}[\bar\psi_\varphi(\varphi,Q)]^4}{(t+1)^4}\right]\Bigg\}.$$

Учитывая отмеченные в [6] свойства функции $W(z)$, убеждаемся, что $J_3(\varphi, Q, t)<\gamma_3(t)$, где $\sum_{t=0}^{\infty}\gamma_3(t)<\infty$. Используя тождество $1-W'(z)z=$ $=W''(z)+2W''(z)z$, получаем с учетом (П.10)

$$J_2(\varphi,Q,t)<\frac{1}{t+1}(W'(z)+2W''(z)z)\times \times\left(1-\frac{\mathbf{E}[\bar\psi_\varphi(\varphi,Q)]^2}{M}\right)-\frac{W'(z)\beta z}{t+1}. \tag{П.18}$$

Пусть $M=\inf_G \mathbf{E}[\psi_\varphi(\varphi, Q)]^2$. Из (29) ясно, что $M>0$. В силу того, что $1-\mathbf{E}[\psi_\varphi(\varphi, Q)]^2/M\leqslant 0$, $W'(z)>0$, приходим к неравенству

$$J_2(\varphi,Q,t)<\frac{1}{t+1}2W''(z)z\left(1-\frac{\mathbf{E}[\bar\psi_\varphi(\varphi,Q)]^2}{M}\right)-\frac{1}{t+1}W'(z)\beta z.$$

Из свойств функции $W(z)$ следует, что существует $k_9>0$ такое, что

$$|W''(z)|<k_9W'(z),\quad z>0. \tag{П.19}$$

Ясно, что в достаточно малой окрестности G выполнено неравенство

$$|1-\mathbf{E}[\bar\psi_\varphi(\varphi, Q)]^2/M|<\beta/2k_9. \tag{П.20}$$

Из (П.18)–(П.20) следует, что $J_2(\varphi, Q, t)<0$, $(\varphi, Q)\in G$.

Таким образом, функция $V_3(\varphi, Q, t)$ удовлетворяет условиям леммы 5.4.1 из [6] в достаточно малой окрестности G точки (0, 1), т. е.

1. $LV_3(\varphi, Q, t)<\gamma(t)$, $(\varphi, Q)\in G, \sum\gamma(t)<\infty$;

2. $\lim\limits_{t\to\infty} V_3(\varphi, Q, t)=\infty$ для любой последовательности точек (φ^t, Q^t), сходящейся к точке (0, 1) при $t\to\infty$. Поэтому процедура (28) не может сходиться с положительной вероятностью к точке $(\tilde\varphi, \tilde Q_{\tilde\varphi}=(0, 1)$.

Из этой леммы очевидно следует состоятельность процедуры (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Спилкер Дж. Дж.* Цифровая спутниковая связь. М.: Связь, 1979.
2. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956.
3. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Оценка параметров сигнала в гауссовском белом шуме // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. № 1. С. 39–59.
4. *Невельсон М. Б.* Об оценках параметра периодического сигнала на фоне белого шума // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. № 1. С. 60–72.
5. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
6. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.
7. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию
16.06.89