V. A. Kopyttsev, V. G. Mikhailov, Method of Moments and Sums of Random Indicators, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 2022, Volume 316, 235–247

DOI: 10.4213/tm4208

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2022, т. 316, с. 235–247

УДК 519.214.5

Метод моментов и суммы случайных индикаторов

В. А. Копытцев[а], В. Г. Михайлов[б]

Поступило 14.09.2020; после доработки 13.04.2021; принято к публикации 29.07.2021

С помощью метода моментов выведены две теоремы о нормальной аппроксимации суммы n случайных индикаторов в схеме серий, в которой совместное распределение индикаторов может меняться с ростом n. Первая теорема указывает условия сходимости при $n \to \infty$ всех моментов к моментам нормального распределения, а вторая теорема дает оценки точности нормальной аппроксимации в равномерной метрике. Для демонстрации эффективности результатов использованы задача о размещении частиц и задача о точности нормальной аппроксимации для числа решений случайных нелинейных включений.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4208

ВВЕДЕНИЕ

Во многих вопросах дискретной теории вероятностей возникает задача о суммировании зависимых случайных величин, распределенных на множестве $\{0,1\}$. Простейшим примером является задача о числе ξ_n появлений знака $k \in \{1,\dots,N\}$ в последовательности случайных величин X_t со значениями из $\{1,\dots,N\}$. Тогда $\xi_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$, где $\eta_t = I\{X_t = k\}$, $t = 1,\dots,n$.

В 1972 г. Б.А. Севастьянов в работе [19] (см. также [9]) предложил простую методику доказательства сходимости распределения суммы зависимых случайных индикаторов к закону Пуассона (формулировка основного результата из [19] приведена в разд. 2). Эта методика успешно применялась в решении задач вероятностной комбинаторики (см. [3, 4, 8, 11–13, 15, 26] и др.) и многие годы использовалась в курсе теории вероятностей на механико-математическом факультете МГУ.

Опыт успешного применения подхода Севастьянова вызвал попытки его модификации для доказательства асимптотической нормальности сумм зависимых случайных индикаторов. По-видимому, первой здесь была работа А.С. Амбросимова [1], в которой доказательство велось по схеме работы [19]. Там же были приведены примеры использования полученного результата.

Иначе подход Севастьянова был использован в работе [24]. В ней А.М. Зубков сформулировал и доказал неравенство, позволяющее оценить скорость сходимости распределения суммы случайных индикаторов к сопровождающему дискретному распределению в равномерной метрике (“метрический вариант метода моментов”), и вывел разнообразные следствия из него.

Основные результаты работы продолжают упомянутые исследования. Теорема 1 описывает достаточные условия сходимости при $n \to \infty$ всех моментов суммы случайных индикаторов к моментам нормального распределения, а теорема 2 устанавливает оценки точности нормальной аппроксимации в равномерной метрике.

[а] Академия криптографии Российской Федерации, Москва, Россия.

[б] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

E-mail: kopytcev2012@mail.ru (В.А. Копытцев), mikhail@mi-ras.ru (В.Г. Михайлов).

Формулировки основных теорем приведены в разд. 1. Разделы 2 и 3 посвящены доказательству этих теорем. В разд. 4 описывается применение теоремы 1 к задаче о размещении частиц по ячейкам, а раздел 5 посвящен использованию теоремы 2 в задаче о числе решений случайных нелинейных включений.

1. ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сначала приведем формулировку теоремы Севастьянова в удобном для дальнейшего изложения виде. Пусть $\xi_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$ — сумма зависимых случайных индикаторов, совместное распределение которых зависит от n как от параметра, и

$$p_{i_1,\ldots,i_k} = \mathbf{P}\{\eta_{i_1} = \ldots = \eta_{i_k} = 1\}, \qquad \lambda_n = p_1 + \ldots + p_n, \qquad p = \max_i p_i.$$

Для $n = 2, 3\ldots$ и $k = 2, 3, \ldots$ определим $J_k(n) = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \colon i_\alpha \ne i_\beta \ (\alpha \ne \beta)\}$ и выделим некоторые подмножества $I_k(n) \subset J_k(n)$, названные Б.А. Севастьяновым исключительными множествами. Отметим, что от удачного выбора этих множеств зависит эффективность описываемого метода.

Введем обозначения

$$A^{(k)} = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k(n)} p_{i_1} \ldots p_{i_k}, \qquad B^{(k)} = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k(n)} p_{i_1,\ldots,i_k},$$

$$D^{(k)} = \max_{(i_1,\ldots,i_k)\in J_k(n)\setminus I_k(n)} \left| \frac{p_{i_1,\ldots,i_k}}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} - 1 \right|.$$

Теорема Севастьянова. *Пусть $n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda \in (0, \infty)$, $p \to 0$ и*

$$A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)} \to 0$$

при всех $k = 2, 3, \ldots$. Тогда распределение случайной величины ξ_n сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

Первая теорема настоящей работы дает достаточное условие асимптотической нормальности для ξ_n. Введем обозначение

$$\sigma_n^2 = p_1(1 - p_1) + \ldots + p_n(1 - p_n).$$

Эта величина равна дисперсии суммы ξ_n' независимых случайных величин $\eta_1', \ldots, \eta_n'$, имеющих такие же одномерные распределения, как $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

Для факториальных моментов сумм ξ_n и ξ_n' справедливы равенства

$$\mathbf{E}(\xi_n)_k = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in J_k(n)} p_{i_1,\ldots,i_k}, \qquad \mathbf{E}(\xi_n')_k = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in J_k(n)} p_{i_1} \ldots p_{i_k}.$$

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$*

$$\lambda_n \to \infty, \qquad \exists r \ge 3\colon \quad \lambda_n \sigma_n^{-r} \to 0 \tag{1.1}$$

и при всех натуральных $k \ge 2$

$$\mathbf{E}(\xi_n)_k - \mathbf{E}(\xi_n')_k = o(\lambda_n^{-t}) \qquad \forall t < \infty. \tag{1.2}$$

Тогда моменты и функция распределения случайной величины $\widetilde{\xi}_n = (\xi_n - \lambda_n)/\sigma_n$ сходятся к моментам и функции распределения стандартного нормального закона.

Приведем некоторые условия, которые гарантируют выполнение соотношений (1.1) и (1.2). Пусть $\mathbf{P}\{\eta_i = 1\} = p_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае из неравенств

$$n^{-\alpha} \le p_i(n) \le 1 - n^{-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1.3}$$

и соотношения $n \to \infty$ следует (1.1). Действительно, пусть $r > 2(1-\alpha)^{-1}$; тогда из (1.3) вытекает, что

$$\lambda_n \sigma_n^{-r} \le \frac{n^{1-(1-\alpha)r/2}}{(1-n^{-\alpha})^{r/2}} \to 0.$$

Положим $\Delta_k(n) = \mathbf{E}(\xi_n)_k - \mathbf{E}(\xi_n')_k$. Так как $\lambda_n \le n$, то условие (1.2) будет выполнено, если при $n \to \infty$

$$\Delta_k(n) = O(n^{-\gamma_k(n)}), \qquad \gamma_k(n) \to \infty, \qquad k = 2, 3, \dots . \tag{1.4}$$

Приведем теперь важное для дальнейшего изложения условие, гарантирующее выполнение соотношения (1.2). Используя обозначения, введенные выше для теоремы Севастьянова, получаем

$$\Delta_k(n) = \mathbf{E}(\xi_n)_k - \mathbf{E}(\xi_n')_k = A^{(k)} - B^{(k)} + \sum_{J_k(n)\setminus I_k(n)} \bigl(p_{i_1,\dots,i_k} - p_{i_1} \dots p_{i_k}\bigr).$$

Значит, при $\lambda_n > 1$

$$|\Delta_k(n)| \le \bigl|A^{(k)} - B^{(k)}\bigr| + \lambda_n^k D^k \le \lambda_n^k \bigl(\bigl|A^{(k)} - B^{(k)}\bigr| + D^{(k)}\bigr). \tag{1.5}$$

Поэтому из условия

$$\bigl|A^{(k)} - B^{(k)}\bigr| + D^{(k)} = o(\lambda_n^{-t}) \qquad \forall t < \infty$$

или более жесткого условия

$$A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)} = o(\lambda_n^{-t}) \qquad \forall t < \infty, \tag{1.6}$$

которым мы будем пользоваться в дальнейшем, следует выполнение условия (1.2). Отметим, что условие (1.6) отличается от аналогичного условия теоремы Севастьянова только тем, что в нем задается скорость сходимости к нулю.

Следующая теорема указывает оценку точности нормальной аппроксимации для распределения величины $\widetilde{\xi}_n$.

Теорема 2. *Для любого числа K, $13\lambda_n + 1 \le K < \lambda_n p^{-1}$,*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_n < t\} - \Phi(t)\bigr| \le \frac{C}{\bigl(\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\bigr)^{1/2}} + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \\ + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1\le k\le K} \frac{|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}, \tag{1.7}$$

где $C \le 0.5591$, а $\Phi(t)$ — функция стандартного нормального распределения.

Замечание 1. Многие способы построения оценок точности нормальной аппроксимации для распределения суммы случайных индикаторов (в том числе и опирающиеся на знаменитый метод Стейна) требуют отсутствия далеких зависимостей или отсутствия сильных далеких зависимостей (см., например, [2, 5]). В теореме 2 такие ограничения не накладываются.

Замечание 2. Для сумм независимых случайных индикаторов последнее слагаемое в (1.7) равно нулю, а сама оценка принимает вид

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_n < t\} - \Phi(t)\bigr| \le \frac{C}{\sigma_n} + 2e^{-7\lambda_n/2} < \frac{C}{\sigma_n} + 2e^{-7\sigma_n^2/2}.$$

Эта оценка практически не отличается от классической оценки скорости сходимости в данном случае.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала покажем асимптотическую близость моментов случайных величин

$$\widetilde{\xi}_n = \frac{\xi_n - \lambda_n}{\sigma_n} \qquad \text{и} \qquad \widetilde{\xi}'_n = \frac{\xi'_n - \lambda_n}{\sigma_n}.$$

Используя формулу для бинома степени r, получаем

$$\mathbf{E}(\widetilde{\xi}_n)^r - \mathbf{E}(\widetilde{\xi}'_n)^r = \sigma_n^{-r} \sum_{u=1}^{r} \overline{\Delta}_u C_r^u (-1)^{r-u} \lambda_n^{r-u}, \qquad \text{где} \quad \overline{\Delta}_u = \mathbf{E}(\xi_n)^u - \mathbf{E}(\xi'_n)^u. \tag{2.1}$$

При этом (см. [18, гл. 1, § 1, п. 2])

$$\mathbf{E}(\xi_n)^u = \sum_{j=0}^{u} \sigma(u,j)\,\mathbf{E}(\xi_n)_j, \qquad \mathbf{E}(\xi'_n)^u = \sum_{j=0}^{u} \sigma(u,j)\,\mathbf{E}(\xi'_n)_j,$$

где

$$\mathbf{E}(\xi_n)_j = \mathbf{E}\,\xi_n(\xi_n - 1)\dots(\xi_n - j + 1) = \sum_{(i_1,\dots,i_j)\in J_j} p_{i_1,\dots,i_j},$$

$$\mathbf{E}(\xi'_n)_j = \mathbf{E}\,\xi'_n(\xi'_n - 1)\dots(\xi'_n - j + 1) = \sum_{(i_1,\dots,i_j)\in J_j} p_{i_1}\dots p_{i_j},$$

а $\sigma(u,j)$ — числа Стирлинга второго рода,

$$\sigma(u,j) = \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} C_j^i i^u.$$

Значит,

$$\overline{\Delta}_u = \mathbf{E}(\xi_n)^u - \mathbf{E}(\xi'_n)^u = \sum_{j=0}^{u} \sigma(u,j)\Delta_j(n), \qquad \text{где} \quad \Delta_j(n) = \mathbf{E}(\xi_n)_j - \mathbf{E}(\xi'_n)_j. \tag{2.2}$$

Используя (2.1), (2.2) и условие (1.2), получаем

$$\mathbf{E}(\widetilde{\xi}_n)^r - \mathbf{E}(\widetilde{\xi}'_n)^r \to 0, \qquad r = 1, 2, \dots. \tag{2.3}$$

Поэтому нам осталось показать, что моменты величины $\widetilde{\xi}'_n$ сходятся к моментам стандартного нормального распределения. Докажем это.

Обозначим через $\Psi(t)$ характеристическую функцию распределения случайной величины $\widetilde{\xi}'_n$. Исследуем асимптотическое поведение семиинвариантов $\chi_k(\widetilde{\xi}'_n)$, $k = 1, 2, \dots$. Эти величины являются коэффициентами в разложениях

$$\ln \Psi(t) = \ln \mathbf{E}\exp\bigl\{it\widetilde{\xi}'_n\bigr\} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\chi_k(\widetilde{\xi}'_n)}{k!}(it)^k + o(t^r), \qquad r = 1, 2, \dots. \tag{2.4}$$

Используя выражение для $\widetilde{\xi}'_n$, получаем

$$\ln \Psi(t) = \ln \mathbf{E}\exp\left\{\frac{it(\xi'_n - \lambda_n)}{\sigma_n}\right\} = -it\frac{\lambda_n}{\sigma_n} + \ln \mathbf{E}\exp\left\{\frac{it(\xi'_1 + \xi'_2 + \ldots + \xi'_n)}{\sigma_n}\right\} =$$

$$= -it\frac{\lambda_n}{\sigma_n} + \sum_{j=1}^{n} \ln(1 + z_j(n)), \tag{2.5}$$

где

$$z_j(n) = p_j\left(\exp\left\{\frac{it}{\sigma_n}\right\} - 1\right) = p_j\left(\sum_{\nu=1}^{r} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{it}{\sigma_n}\right)^{\nu}\right) + o(t^r), \qquad r = 1, 2, \dots. \tag{2.6}$$

Теперь, используя в (2.5) разложения

$$\ln(1+z) = \sum_{s=1}^{r} \frac{(-1)^{s-1}}{s} z^s + o(z^r), \qquad r = 1, 2, \dots,$$

а также разложения (2.6), находим (здесь мы следуем доказательству теоремы 6 из [20, гл. 2, § 12])

$$\sum_{j=1}^{n} \ln(1 + z_j(n)) = \sum_{s=1}^{r} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \sum_{j=1}^{n} p_j^s \left(\sum_{\nu=1}^{r} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{it}{\sigma_n}\right)^{\nu}\right)^s + o(t^r). \tag{2.7}$$

Поэтому согласно (2.5), (2.7) при любом натуральном $r \ge 3$ имеем

$$\ln\Psi(t) = -it\frac{\lambda_n}{\sigma_n} + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{it}{\sigma_n} + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\{it/\sigma_n\}^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} p_j^2 \frac{\{it/\sigma_n\}^2}{2} + \sum_{k=3}^{r} \frac{\chi_k(\widetilde{\xi}_n')}{k!}(it)^k + o(t^r) =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \sum_{k=3}^{r} \frac{\chi_k(\widetilde{\xi}_n')}{k!}(it)^k + o(t^r). \tag{2.8}$$

Из (2.5) (с учетом (2.7)) получаем и общий вид величин $\chi_k(\widetilde{\xi}_n')$ при $k \ge 3$:

$$\chi_k(\widetilde{\xi}_n') = \sum_{s=1}^{k} a_s^{(k)} (-1)^{s-1} \sum_{j=1}^{n} p_j^s (\sigma_n)^{-k} = O\left(\frac{\lambda_n}{\sigma_n^k}\right), \tag{2.9}$$

где $a_s^{(k)}$ — положительные числа. При выводе оценки в правой части (2.9) мы учли, что

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^s \le \sum_{j=1}^{n} p_j = \lambda_n, \qquad s = 1, \dots, k.$$

Соотношения (2.4), (2.8), (2.9) означают, что $\chi_1(\xi_n) = \mathbf{E}\,\widetilde{\xi}_n' = 0$, $\chi_2(\widetilde{\xi}_n') = \mathbf{D}\,\xi_n = 1$ и согласно условию (1.1) семиинварианты $\chi_l(\widetilde{\xi}_n')$, $l \ge k \ge 3$, сходятся к нулю. Поэтому согласно теореме 1 работы [7] моменты величины $\widetilde{\xi}_n'$ сходятся к моментам нормального распределения с параметрами $(0, 1)$. В силу (2.3) к моментам этого же распределения сходятся и моменты величины $\widetilde{\xi}_n$. Теорема 1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Лемма Зубкова. *Пусть ξ и ξ' — неотрицательные целочисленные случайные величины. Если*

$$\varepsilon_T = \max_{1\le k<T}\left|\frac{\mathbf{E}(\xi)_k}{\mathbf{E}(\xi')_k} - 1\right| < 1, \qquad \mathbf{E}(\xi')_k \le C\lambda^k, \qquad 1 \le k \le T,$$

где $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$, то для любого t, $0 \le t \le T - 5\lambda$,

$$\bigl|\mathbf{P}\{\xi \ge t\} - \mathbf{P}\{\xi' \ge t\}\bigr| \le \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\varepsilon_T e^{2\lambda}}{\sqrt{\max\{1, \lambda - 1\}}} + \frac{e^{(t+\lambda-T)/2}}{\max\{1, \lambda - 1\}}\right).$$

Если $\xi' = \eta_1' + \eta_2' + \dots$, *где* η_i' *— независимые случайные величины, принимающие значения* 0 *и* 1, *и* $\mathbf{E}\,\xi' = \lambda$, *то при любом* $A \ge 13$

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\xi \ge t\} - \mathbf{P}\{\xi' \ge t\}\bigr| \le \frac{\varepsilon_{1+[A\lambda]} e^{2\lambda}}{\sqrt{\max\{1, \lambda-1\}}} + 2e^{-(A+1)\lambda/4}. \tag{3.1}$$

Лемма Зубкова позволяет из оценок близости факториальных моментов $\mathbf{E}(\xi)_k$ и $\mathbf{E}(\xi')_k$ двух целочисленных случайных величин получить оценку близости их функций распределения в терминах равномерной метрики.

Замечание 3. Упомянем здесь работу [23], в которой А.М. Зубков разработал подход, удобный для оценивания функций распределения сумм случайных индикаторов, аналогичных U-статистикам (пример применения см. в [27]).

Лемма 1. *Для функции распределения случайной величины* $\xi_n' = \eta_1' + \eta_2' + \dots + \eta_n'$, *где* η_i' *— независимые случайные величины, принимающие значения* 0 *и* 1, *выполнено неравенство*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left|\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_n' - \sum_{i=1}^n p_i}{\bigl(\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\bigr)^{1/2}} \le x\right\} - \Phi(x)\right| \le \frac{C\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)((1-p_i)^2+p_i^2)}{\bigl(\sum_{i=1}^n p_t(1-p_i)\bigr)^{3/2}} <$$

$$< \frac{C}{\bigl(\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\bigr)^{1/2}}, \tag{3.2}$$

где $C \le 0.5591$.

Для доказательства леммы достаточно воспользоваться неравенством Берри–Эссеена, оценкой $C \le 0.5591$, полученной в [21], и легко проверяемыми равенствами

$$\mathbf{E}|\xi_n' - \mathbf{E}\,\xi_n'|^3 = \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\bigl((1-p_i)^2+p_i^2\bigr), \qquad \mathbf{D}\,\xi_n' = \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i). \tag{3.3}$$

Теперь, используя первое неравенство в цепочке соотношений (1.5) и неравенство (см. [9, гл. 3, § 1])

$$\mathbf{E}(\xi_n')_k = \lambda_n^k - \sum_{|\{i_1,\dots,i_k\}|<k} p_{i_1}\dots p_{i_k} \ge \lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1}),$$

получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_n > kp$. *Тогда*

$$\left|\frac{\mathbf{E}(\xi_n)_k}{\mathbf{E}(\xi_n')_k} - 1\right| \le \frac{|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k}{\lambda_n^k(1-kp\lambda_n^{-1})}. \tag{3.4}$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Запишем неравенство (3.1) для величин ξ_n и ξ_n' и применим к нему неравенство (3.4). Получим

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\xi_n \ge t\} - \mathbf{P}\{\xi_n' \ge t\}\bigr| \le 2e^{-(A+1)\lambda_n/4} +$$

$$+ \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n-1\}}} \max_{1\le k\le 1+[A\lambda]} \frac{|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k}{\lambda_n^k(1-kp\lambda_n^{-1})}. \tag{3.5}$$

По неравенству треугольника

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_n < t\} - \Phi(t)\bigr| \le \sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_n < t\} - \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_n' < t\}\bigr| + \sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_n' < t\} - \Phi(t)\bigr|,$$

где первое слагаемое в правой части оценивается по формуле (3.5), а второе — с помощью леммы 1. В результате получаем (1.7). Теорема 2 доказана.

4. ТЕОРЕМА 1 В ЗАДАЧЕ О РАЗМЕЩЕНИИ ЧАСТИЦ

Постановки задач для полиномиальной схемы размещения частиц по ячейкам подробно описаны в книге [9]. За годы, прошедшие после выхода этой книги, многие задачи нашли свое решение в более общих постановках (см. примеры в конце раздела). Однако для некоторых задач продвижения оказались скромными. Например, такой является нерешенная в [9] задача об условиях асимптотической нормальности числа пустых ячеек в неравновероятной полиномиальной схеме размещения в случае, когда число ячеек N и число размещаемых частиц n стремятся к бесконечности так, что $N/n \to 0$ (правая промежуточная область изменения параметров в терминологии [9]). Предлагаемая ниже теорема касается и этой области.

Рассмотрим полиномиальную схему с n испытаниями и N исходами. Обозначим через a_i вероятность i-го исхода. Обозначим через μ_0 случайную величину, равную числу непоявившихся исходов в n испытаниях. Положим

$$\lambda(n,N) = \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^n, \qquad \sigma^2(n,N) = \lambda(n,N) - \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^{2n}.$$

Теорема 3. *Пусть $N = N(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и выполняются условия*

$$\sigma^2(n,N) \to \infty, \qquad \ln \lambda(n,N) = o(\ln n) \qquad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\max_{1\le i\le N} (1-a_i)^n \le \delta < 1. \tag{4.2}$$

Тогда моменты и функция распределения случайной величины $(\mu_0 - \lambda(n,N))/\sigma(n,N)$ сходятся к моментам и функции распределения стандартного нормального закона.

Замечание 4. Из условия (4.2) следует, что $N(n) = O(n)$ при $n \to \infty$. В частности, допускается случай, когда число размещаемых частиц n растет быстрее, чем число ячеек N. Таким образом, условия теоремы 3 охватывают некоторую часть правой промежуточной области изменения параметров полиномиальной схемы размещения.

Доказательство теоремы 3. Положим $\mu_0 = \eta_1 + \ldots + \eta_N$, где $\eta_i = 1$, если исход с номером i не появился при n испытаниях, и $\eta_i = 0$ в противном случае. Тогда

$$p_{i_1,\ldots,i_k} = \mathbf{P}\{\eta_{i_1} = \ldots = \eta_{i_k} = 1\} = (1 - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k})^n, \qquad k = 1,\ldots,N.$$

Сначала проверим выполнение условия (1.1). С учетом неравенств (4.2) получаем

$$(\sigma(n,N))^2 \ge \lambda(n,N) - \lambda(n,N) \max_{1\le i\le N} (1-a_i)^n \ge \lambda(n,N)(1-\delta).$$

Поэтому из (4.2) и соотношения $\sigma^2(n,N) \to \infty$ следует, что

$$\frac{\lambda(n,N)}{(\sigma(n,N))^3} \le \frac{\lambda(n,N)}{[\lambda(n,N)(1-\delta)]^{3/2}} \to 0.$$

Значит, условие (1.1) теоремы 1 выполнено при всех $r \ge 3$.

Теперь так же, как это делалось в работе [19], введем исключительные множества I_k и проверим выполнение условия (1.6) (из которого следует выполнение условия (1.2) теоремы 1).

Обозначим через I_1 подмножество множества $\{1,\ldots,N\}$, полагая $i \in I_1$ тогда и только тогда, когда $a_i > n^{-3/4}$. В исключительное множество I_k, $k = 2,\ldots,N$, включим те и только те наборы $(i_1,\ldots,i_k)$, для которых $i_r \in I_1$ хотя бы для одного r.

Сначала проверим, что $D^{(k)} = o(\lambda^{-t}(n,N))$, $t = 1,2,\ldots$ (см. (1.6)). Используя неравенства $-x - x^2 \le \ln(1-x) \le -x$, справедливые при $x \le 1/2$ и влекущие за собой неравенства

$$e^{-n(x+x^2)} \le (1-x)^n = e^{n\ln(1-x)} \le e^{-nx}, \tag{4.3}$$

получаем, что при всех $(i_1,\dots,i_k)\in J_k\setminus I_k$, $n\ge 3$, выполнены соотношения

$$e^{-k^2/\sqrt{n}}\le e^{-n\left(\sum_{r=1}^k a_{i_r}\right)^2}\le \frac{p_{i_1,\dots,i_k}}{p_{i_1}\dots p_{i_k}}=\frac{(1-a_{i_1}-\ldots-a_{i_k})^n}{(1-a_1)^n\dots(1-a_{i_k})^n}\le e^{n\sum_{r=1}^k a_{i_r}^2}\le e^{k/\sqrt{n}}.$$

Отсюда следует, что

$$D^{(k)}=\max_{(i_1,\dots,i_k)\in J_k\setminus I_k}\left|\frac{p_{i_1,\dots,i_k}}{p_{i_1}\dots p_{i_k}}-1\right|=O\bigl(n^{-1/2}\bigr)=o\bigl(\lambda^{-t}(n,N)\bigr),\qquad t=1,2,\dots,$$

согласно (4.1), так как при этом условии

$$\frac{n^{-1/2}}{\lambda^{-t}(n,N)}=\exp\biggl\{-\frac{1}{2}\ln n+t\ln\lambda(n,N)\biggr\}=\exp\biggl\{\biggl(-\frac{1}{2}+o(1)\biggr)\ln n\biggr\}=o(1).$$

Осталось проверить, что $A^{(k)}=o(\lambda^{-t}(n,N))$, $B^{(k)}=o(\lambda^{-t}(n,N))$, $t=1,2,\dots$. В нашем случае

$$A^{(k)}=\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I_k}(1-a_{i_1})^n\dots(1-a_{i_k})^n,\qquad B^{(k)}=\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I_k}(1-a_{i_1}-\ldots-a_{i_k})^n.$$

Так как при наших ограничениях

$$1-a_{i_1}-\ldots-a_{i_k}<(1-a_{i_1})\dots(1-a_{i_k}),$$

то $0<B^{(k)}<A^{(k)}$ и надо доказать лишь соотношение $A^{(k)}=o(\lambda^{-t}(n,N))$.

Заметим, что

$$\sum_{i\in I_1}(1-a_i)^n\le\sum_{i\in I_1}e^{-na_i}\le\sum_{i\in I_1}e^{-n^{1/4}}\le Ne^{-n^{1/4}}=O\bigl(ne^{-n^{1/4}}\bigr).\tag{4.4}$$

Здесь мы использовали соотношение $N=O(n)$, которое вытекает из (4.2) и неравенства

$$\max_{1\le i\le N}(1-a_i)^n\ge\biggl(1-\frac{1}{N}\biggr)^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}A^{(k)}&\le k\biggl(\sum_{i=1}^N(1-a_i)^n\biggr)^{k-1}\sum_{i\in I_1}(1-a_i)^n=k\lambda^{k-1}(n,N)\cdot O\bigl(ne^{-n^{1/4}}\bigr)=\\&=o(\lambda^{-t}(n,N)),\qquad t=1,2,\dots,\end{aligned}\tag{4.5}$$

согласно (4.1), так как при этом условии

$$k\lambda^{k+t-1}(n,N)ne^{-n^{1/4}}=e^{-n^{1/4}(1+o(1))}=o(1).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Из нее следует теорема 3. □

В завершение раздела упомянем несколько интересных результатов из области случайных размещений частиц по ячейкам.

В работе [22] было доказано, что производящая функция числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами (описание схемы см. в [9]) имеет только вещественные корни. Поэтому это число распределено как сумма независимых случайных величин. На основании этого факта в [22] был выведен полный спектр предельных теорем для числа пустых ячеек. О других возможностях применения такого подхода в вероятностной комбинаторике см. [25].

Современную постановку задачи о распределении числа пустых ячеек и ее решение см. в [6].

В [14, 15] была введена и частично изучена *обобщенная* схема независимого размещения частиц комплектами. Под размещением комплекта в этой схеме понимается случайный выбор множества ячеек, в каждую из которых помещается частица. Были изучены условия и скорость сходимости распределения числа пустых ячеек к распределению Пуассона.

В [9, гл. 1] был сформулирован ряд задач о повторениях s-цепочек в последовательности независимых случайных величин с конечным числом значений и были приведены предельные теоремы из [26] о сходимости распределения числа повторений s-цепочек к сложному пуассоновскому распределению. В дальнейшем были получены оценки скорости этой сходимости [27] и изучены несколько обобщений этой задачи. Были доказаны предельные теоремы для числа повторений s-цепочек с точностью до того или иного отношения эквивалентности, заданного на множестве s-цепочек (библиографию см. в [16]). Позднее некоторые из этих результатов были распространены на s-цепочки в конечной цепи Маркова (библиографию см. в [17]).

Отметим, что вопрос о сходимости моментов к моментам нормального распределения в этих работах не рассматривался.

5. ТЕОРЕМА 2 В ЗАДАЧЕ О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В этом разделе теорема 2 применяется при оценке точности нормальной аппроксимации для числа решений случайных нелинейных включений. Поясним смысл используемых ниже понятий.

Рассмотрим конечные множества D и B и отображение $F\colon D \to B$. *Включение* (или *система включений*) определяется соотношениями

$$F(x) \in B, \qquad x \in D. \tag{5.1}$$

Пусть x — неизвестное решение системы (5.1). Множество решений системы (5.1) является объединением множеств решений уравнений $F(x) = b$ относительно $x \in D$ для всех $b \in B$. Так как любому $x \in D$ соответствует не более одного элемента в B, то число $\xi(D, F, B)$ решений включения (5.1) равно сумме чисел решений уравнений $F(x) = b$, $b \in B$. Значит,

$$\xi(D, F, B) = \sum_{x \in D} \sum_{b \in B} I\{Fx = b\}. \tag{5.2}$$

Если D и B — подмножества линейных пространств над конечным полем, а отображение F линейно, то включение называется *линейным*. Если отображение F нелинейно, то включение называют *нелинейным*. Если отображение F случайно, то включение называется *случайным включением*. В этом случае формула (5.2) представляет число решений случайного включения в виде суммы случайных индикаторов.

Список работ, посвященных предельным теоремам для случайных включений, имеется в [10].

Положим $F(x) = A_1 x + A_2 f(x)$ и рассмотрим систему включений

$$A_1 x + A_2 f(x) \in B, \qquad x \in Q^n \setminus \{0^n\},$$

где Q^n — линейное пространство размерности n над полем $Q = \mathrm{GF}(2)$, B — множество T-мерных векторов над Q, A_1 и A_2 — случайные матрицы над Q размерностей $T \times n$ и $T \times m$ соответственно, а

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))\colon\ Q^n \to Q^m$$

— заданное нелинейное отображение. Здесь и далее полагаем, что x и $f(x)$ — вектор-столбцы.

Обозначим через $\xi(Q^n \setminus \{0^n\}, F, B)$ число решений данной системы включений.

Пусть множество координатных функций отображения $f(x)$ состоит из всех мономов степени от 2 до целого числа g включительно и определяется формулой

$$\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} = \bigcup_{t=2}^{g} \bigcup_{\substack{d_1,\dots,d_n \in \{0,1\} \\ d_1+\dots+d_n=t}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\}, \tag{5.3}$$

где $m = \sum_{t=2}^{g} C_n^t$. Будем полагать, что элементы случайной матрицы $A = (A_1, A_2) = (a_{i,j})$ независимы в совокупности и распределены с вероятностями

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = q\} = \frac{1}{2}, \qquad q \in Q.$$

Положим

$$\lambda_{n,T} = (2^n - 1)|B| \cdot 2^{-T}, \qquad \sigma_{n,T}^2 = (2^n - 1)|B| \cdot 2^{-T}(1 - 2^{-T}),$$
$$\widetilde{W} = \frac{\xi(Q^n \setminus \{0^n\}, F, B) - \lambda_{n,T}}{\sigma_{n,T}}. \tag{5.4}$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (5.3), *где* $g = g(n) \ge 2$. *Тогда*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \bigl|\mathbf{P}\{\widetilde{W} < t\} - \Phi(t)\bigr| \le \frac{0.5591}{\sigma_{n,T}} + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} + \\ + \frac{e^{2\lambda_{n,T}}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_{n,T} - 1\}}} \frac{\widetilde{A}^{(K)} + \widetilde{B}^{(K)}}{1 - K \cdot 2^{-T} \lambda_{n,T}^{-1}}, \tag{5.5}$$

где $K = 13\lambda_{n,T} + 1$,

$$\widetilde{A}^{(K)} = K \cdot 2^{K^2/4}\bigl((1 + (2^n - 1)^{-1})^K - 1\bigr),$$
$$\widetilde{B}^{(K)} = 2^{K^2/4}\bigl(1 + \lambda_{n,T}^{-1}\bigr)^K \bigl(3 \cdot 2^{-n} - 2^{1-2n}\bigr)\left(\frac{2^n}{2^n - 1}\right)^2.$$

Отметим, что правая часть неравенства (5.5) при $n, T \to \infty$ стремится к нулю, если $\sigma_{n,T}^2 \to \to \infty$ и $\lambda_{n,T} = o(\sqrt{n})$.

Доказательство. Положим $D = Q^n \setminus \{0^n\}$ и $G(x) = (x, f(x))$. Пусть

$$D_{k,j} = \bigl\{(x^1, \dots, x^k) \in D^k \colon \operatorname{rank}\langle G(x^1), \dots, G(x^k)\rangle = j\bigr\}, \qquad D_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} D_{k,j}. \tag{5.6}$$

Отметим, что

$$|D_{k,j}| \le \sum_{s=1}^{j} \bigl|\bigl\{(x^1, \dots, x^k) \in D^k \colon \operatorname{rank}\langle x^1, \dots, x^k\rangle = s\bigr\}\bigr|.$$

Следовательно,

$$|D_{k,j}| \le \sum_{s=1}^{j} C_k^s \cdot 2^{s(k-s)} |D|^s. \tag{5.7}$$

Введем обозначение $J = D \times B$ и положим

$$J_k = \bigl\{(v^1, \dots, v^k) \in J^k \colon v^\alpha \ne v^\beta \ (\alpha \ne \beta)\bigr\},$$

где $v^i = (x^i, b^i)$, $i = 1, \dots, k$. Зададим (исключительные) множества $I_k \subset J_k$ равенством

$$I_k = \bigl\{(v^1, \dots, v^k) \in J_k\colon\ (x^1, \dots, x^k) \in D_k\bigr\},$$

где D_k определяется равенством (5.6).

Оценим величины $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $D^{(k)}$ в рассматриваемом случае (определения см. в разд. 1). Для величин $D^{(k)}$ получаем

$$D^{(k)} = \max_{(v^1,\dots,v^k)\in J_k\setminus I_k} \left| \frac{\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\}}{\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1\}\dots\mathbf{P}\{F(x^k) = b^k\}} - 1 \right| = 0, \tag{5.8}$$

так как согласно лемме 5 из [10]

$$\mathbf{P}\bigl\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\bigr\} = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{F(x^i) = b^i\} = 2^{-kT},$$

если $(v_1, \dots, v_k) \in J_k \setminus I_k$.

Для величины $A^{(k)}$ получаем

$$A^{(k)} = \sum_{(v^1,\dots,v^k)\in I_k} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{F(x^i) = b^i\} \le |B|^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(x^1,\dots,x^k)\in D_{k,j}} \left(\frac{1}{2}\right)^{kT} \le$$

$$\le |B|^k \sum_{j=1}^{k-1} |D_{k,j}| \left(\frac{1}{2}\right)^{kT} \le \left(\frac{|D|\cdot|B|}{2^T}\right)^k \frac{1}{|D|^k} \sum_{j=1}^{k-1} |D_{k,j}|.$$

Здесь согласно оценке (5.7)

$$\frac{|D_{k,j}|}{|D|^k} \le \sum_{s=1}^{k-1} C_k^s \cdot 2^{s(k-s)} |D|^{s-k} < 2^{k^2/4}\bigl((1 + |D|^{-1})^k - 1\bigr).$$

Следовательно,

$$A^{(k)} < \lambda_{n,T}^k k \cdot 2^{k^2/4}\bigl((1 + |D|^{-1})^k - 1\bigr),$$

и с учетом (1.7) (полагаем $K = 13\lambda_{n,T} + 1$) получаем

$$\max_{1\le k\le K} \frac{A^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k\bigl(1 - kp\lambda_{n,T}^{-1}\bigr)} < \frac{K\cdot 2^{K^2/4}((1 + |D|^{-1})^K - 1)}{1 - Kp\lambda_{n,T}^{-1}}, \tag{5.9}$$

где $p = 2^{-T}$, $|D| = 2^n - 1$.

Оценим теперь величину $B^{(k)}$. В [10] показано (см. формулу (91) в этой работе), что

$$B^{(k)} = \sum_{(v^1,\dots,v^k)\in I_k} \mathbf{P}\bigl\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\bigr\} \le$$

$$\le \sum_{j=2}^{k-1} \frac{|D'_{k,j}|}{|D|^j} \left(\frac{|D|\cdot|B|}{2^T}\right)^j = \sum_{j=2}^{k-1} \frac{|D'_{k,j}|}{|D|^j} \lambda_{n,T}^j, \tag{5.10}$$

где

$$D'_{k,j} = \bigl\{(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}\colon\ x^\alpha \ne x^\beta\ (\alpha \ne \beta)\bigr\}.$$

Далее нам понадобится еще одно определение. Положим $(D)_f = \{(x, f(x))\colon x \in D\}$. Обозначим через $N(q_1, q_2, q_3, c, (D)_f)$ число решений уравнения $q_1 y^1 + q_2 y^2 + q_3 y^3 = c$ относительно тройки векторов $y^1, y^2, y^3 \in (D)_f$, где $q_1, q_2, q_3 \in Q \setminus \{0\}$, $c \in Q^{n+m}$ (напомним, что m — размерность вектора $f(x)$). Пусть

$$N((D)_f) = \max_{q_1,q_2,q_3,c} N(q_1, q_2, q_3, c, (D)_f), \qquad \rho((D)_f) = \frac{N((D)_f)}{|D|^2}.$$

В [10, лемма 3] было показано, что при $k \geq 3$, $2 \leq j \leq k-1$ выполнено неравенство

$$|D'_{k,j}| \leq \rho((D)_f)|D|^j Q_{k,j}, \qquad Q_{k,j} = C_k^j [2^j - j - 1]_{k-j}$$

(здесь использованы обозначения $[h]_t = h(h-1)\dots(h-t+1)$, $[h]_0 = 1$). Из этого неравенства и (5.10) получаем

$$\frac{|D'_{k,j}|}{|D^j|} \leq \rho((D)_f) C_k^j \cdot 2^{j(k-j)}.$$

Следовательно,

$$B^{(k)} \leq \rho((D)_f) \cdot 2^{k^2/4} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda_{n,T}^j = \rho((D)_f) \cdot 2^{k^2/4} (\lambda_{n,T} + 1)^k. \tag{5.11}$$

Наконец, воспользуемся леммой 4 из [10], согласно которой при выполнении условия (5.1) с $g \geq 2$, $n \geq 2$ имеем

$$\rho((D)_f) \leq \left(3 \cdot 2^{-n} - 2^{1-2n}\right) \left(\frac{2^n}{2^n - 1}\right)^2. \tag{5.12}$$

Используя (5.12) и (1.7), где $K = 13\lambda_{n,T} + 1$, получаем

$$\max_{1 \leq k \leq K} \frac{B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k \left(1 - kp\lambda_{n,T}^{-1}\right)} < \frac{\rho((D)_f) \cdot 2^{K^2/4} \left(1 + \lambda_{n,T}^{-1}\right)^K}{1 - Kp\lambda_{n,T}^{-1}}. \tag{5.13}$$

Здесь $p = 2^{-T}$. Из (1.7), (5.8), (5.9), (5.13) следует (5.5). Теорема 4 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбросимов А.С.* Нормальный закон в схеме сумм зависимых случайных величин, рассмотренных Б.А. Севастьяновым // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21, №1. С. 184–189.
2. *Baldi P., Rinott Y.* On normal approximations of distributions in terms of dependency graphs // Ann. Probab. 1989. V. 17, N 4. P. 1646–1650.
3. *Буравлев С.М.* Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний // Дискрет. математика. 1999. Т. 11, №1. С. 53–75.
4. *Буравлев С.М.* Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник // Дискрет. математика. 2000. Т. 12, №1. С. 24–46.
5. *Chen L.H.Y., Shao Q.-M.* Stein's method for normal approximation // An introduction to Stein's method / Ed. by A.D. Barbour, L.H.Y. Chen. River Edge, NJ: World Scientific, 2005. P. 1–59. (Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.; V. 4).
6. *Ватутин В.А., Иксанов А.М., Маринич А.В.* Слабая сходимость конечномерных распределений числа пустых ящиков решета Бернулли // Теория вероятн. и ее примен. 2014. Т. 59, №1. С. 28–60.
7. *Janson S.* Normal convergence by higher semiinvariants with applications to sums of dependent random variables and random graphs // Ann. Probab. 1988. V. 16, N 1. P. 305–312.
8. *Клыкова Н.В.,* Предельное распределение числа совпадающих промежутков // Теория вероятн. и ее примен. 2002. Т. 47, №1. С. 147–152.
9. *Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
10. *Копытцев В.А.* Предельные теоремы о нормальном распределении для числа решений нелинейных включений // Мат. вопр. криптогр. 2020. Т. 11, №4. С. 77–96.
11. *Копытцев В.А., Михайлов В.Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения // Дискрет. математика. 2010. Т. 22, №2. С. 3–21.

12. *Круглов В.И.* Предельные распределения числа наборов, удовлетворяющих линейному соотношению // Дискрет. математика. 2008. Т. 20, №4. С. 120–135.
13. *Михайлов В.Г.* Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний // Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. 19, №1. С. 182–187.
14. *Михайлов В.Г.* Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22, №1. С. 155–160.
15. *Михайлов В.Г.* Оценка скорости сходимости к распределению Пуассона при размещении частиц комплектами // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22, №3. С. 566–574.
16. *Михайлов В.Г., Шойтов А.М.* Структурная эквивалентность s-цепочек в случайных дискретных последовательностях // Дискрет. математика. 2003. Т. 15, №4. С. 7–34.
17. *Михайлов В.Г., Шойтов А.М., Волгин А.В.* О сериях H-эквивалентных цепочек в цепях Маркова // Наст. изд. С. 270–284.
18. *Сачков В.Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
19. *Севастьянов Б.А.* Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17, №4. С. 733–738.
20. *Ширяев А.Н.* Вероятность. Кн. 1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. М.: МЦНМО, 2007.
21. *Тюрин И.С.* Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова // Теория вероятн. и ее примен. 2011. Т. 56, №4. С. 808–811.
22. *Ватутин В.А., Михайлов В.Г.* Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, №4. С. 684–692.
23. *Зубков А.М.* Неравенства для распределения суммы функций от независимых случайных величин // Мат. заметки. 1977. Т. 22, №5. С. 745–758.
24. *Зубков А.М.* Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения // Мат. сб. 1979. Т. 109, №4. С. 491–532.
25. *Зубков А.М., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Корни производящих функций и суммы целочисленных случайных величин // Мат. вопр. криптогр. 2020. Т. 11, №1. С. 27–46.
26. *Зубков А.М., Михайлов В.Г.* Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний // Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. 19, №1. С. 173–181.
27. *Зубков А.М., Михайлов В.Г.* О повторениях s-цепочек в последовательности независимых величин // Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24, №2. С. 267–279.