ФЕВРАЛЬ 1994 г., ТОМ 30, № 2

УДК 517.956

М. Г. КРАСИЛЬНИКОВ

РЕДУКЦИЯ К ОБЫЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ ОДНОГО ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ, ОТНОСЯЩЕГОСЯ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Для системы дифференциальных уравнений

$$|y|^{2\nu}u_x-\operatorname{sgn} yv_y=au+bv,\ |y|^{2\nu}u_y+v_x=cu+dv \tag{1}$$

$$(0\leqslant\nu<1/2),$$

где a, b, c, d — функции аргументов x, y, рассмотрим одну из задач, которая была сформулирована А. В. Бицадзе [1, с. 117]. Введем обозначения: A_0, B_0, C_0 — точки $(-R, 0)$, $(R, 0)$, $(0, -R)$, L^+ — гладкая кривая без точек самопересечения, расположенная в полуплоскости $y>0$, примыкающая к оси OX в точках A_0 и B_0; D — конечная область, ограниченная дугой L^+ и отрезками A_0C_0 и B_0C_0; D^+, D^- — пересечение области D соответственно с полуплоскостями $y>0$, $y<0$.

Задача А. На кривой L^+, включая ее концы, заданы непрерывные по Гёльдеру функции $\alpha=\alpha(x, y)$, $\beta=\beta(x, y)$, $\varphi=\varphi(x, y)$ и на A_0C_0 — дифференцируемая функция $\psi=\psi(x, y)$, производная которой непрерывна по Гёльдеру. Требуется найти на множестве $D^+\cup D^-$ решение u, v системы (1), непрерывно-продолжимое на границу области D, за исключением, быть может, точек A_0, B_0, удовлетворяющее граничным условиям

$$(\alpha u+\beta v)|_{L^+}=\varphi,\quad (\alpha_1 u+\beta_1 v)|_{A_0C_0}=\psi \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$u(x, +0)=u(x, -0),\quad v(x, +0)=v(x, -0)\ (-R<x<R). \tag{3}$$

Цель настоящей работы — доказательство того, что задача A редуцируется к обычной задаче Трикоми для системы (1).

Сначала проведем доказательство для частного случая, когда α и β являются следами функций A^* и $-y^{-2\nu}B^*$ на L^+, где B^* и A^* — сопряженно-гармонические функции в D^+: $A^*_x+B^*_y=0$, $A^*_y=B^*_x$. При этом предполагается, что $B^*(x, +0)=0$.

Введем в рассмотрение функции $A_*=A_*(x, y)$, $B_*=B_*(x, y)$, определяемые в области D^- условиями: $A_{*x}+B_{*y}=0$, $A_{*y}+B_{*x}=0$, $A_*(x, -0)=A^*(x, +0)$, $B_*(x, -0)=B^*(x, +0)=0$. Тогда получим, что

$$A_*=\frac{1}{2}\ [A^*(x-y, +0)+A^*(x+y, +0)],$$

$$B_*=\frac{1}{2}\ [A^*(x-y, +0)-A^*(x+y, +0)].$$

В области D^+ решение u, v системы (1) допускает представление

$$u=A^*U+y^{-2\nu}B^*V,\quad v=-y^{2\nu}B^*U+A^*V, \tag{4}$$

где U, V — решение системы

$$y^{2\nu}U_x-V_y=a_1U+b_1V,\quad y^{2\nu}U_y+V_x=c_1U+d_1V, \tag{5}$$

$$a_1=\frac{1}{l_1}\ (aA^{*2}-y^{2\nu}bA^*B^*-2\nu y^{2\nu-1}A^*B^*-cA^*B^*+y^{2\nu}dB^{*2}),$$

$$b_1=\frac{1}{l_1}\ (y^{-2\nu}aA^*B^*+bA^{*2}-y^{-2\nu}cB^{*2}-dA^*B^*-2\nu y^{-1}B^{*2}),$$

$$c_1=\frac{1}{l_1}\ (aA^*B^*-y^{2\nu}bB^{*2}-2\nu y^{2\nu-1}B^{*2}+cA^{*2}-y^{2\nu}dA^*B^*),$$

$$d_1=\frac{1}{l_1}\left(y^{-2\nu}aB^{*2}+bA^*B^*+y^{-2\nu}cA^*B^*+dA^{*2}+2\nu y^{-1}A^*B^*\right),$$

$$l_1=A^{*2}+B^{*2}.$$

В области D^- решение u, v системы (1) представимо в виде

$$u=A_*U+|y|^{-2\nu}B_*V,\quad v=|y|^{2\nu}B_*U+A_*V, \tag{6}$$

где U, V — решение системы

$$|y|^{2\nu}U_x+V_y=a_2U+b_2V,\quad |y|^{2\nu}U_y+V_x=c_2U+d_2V, \tag{7}$$

$$a_2=\frac{1}{l_2}\left(aA_*^2+|y|^{2\nu}bA_*B_*+2\nu|y|^{2\nu-1}A_*B_*-cA_*B_*-|y|^{2\nu}dB_*^2\right),$$

$$b_2=\frac{1}{l_2}\left(|y|^{-2\nu}aA_*B_*+bA_*^2-|y|^{-2\nu}cB_*^2-dA_*B_*+2\nu|y|^{-1}B_*^2\right),$$

$$c_2=\frac{1}{l_2}\left(-aA_*B_*-|y|^{2\nu}bB_*^2-2\nu|y|^{2\nu-1}B_*^2+cA_*^2+|y|^{2\nu}dA_*B_*\right),$$

$$d_2=\frac{1}{l_2}\left(-|y|^{-2\nu}aB_*^2-bA_*B_*+|y|^{-2\nu}cA_*B_*+dA_*^2-2\nu|y|^{-1}A_*B_*\right),$$

$$l_2=A_*^2-B_*^2.$$

Граничные условия (2) в этом случае принимает форму

$$U|_{L^+}=\varphi/(A^{*2}+B^{*2}),$$
$$(\alpha_1A_*+|y|^{2\nu}\beta_1B_*)U+(|y|^{-2\nu}\alpha_1B_*+\beta_1A_*)V=\psi, \tag{8}$$

а условия склеивания

$$U(x,+0)=U(x,-0),\quad V(x,+0)=V(x,-0). \tag{9}$$

Второе условие (8) можно записать в другом виде. Найдем след функции U на отрезке A_0C_0. Система уравнений (7), как это показано в монографии [4, с. 77, 78], с помощью введения характеристических координат $\xi=x-y$, $\eta=x+y$ преобразуется в систему, содержащую уравнение

$$2^{-\nu}(\xi-\eta)^{\nu}\frac{\partial U}{\partial\xi}-2^{\nu}(\xi-\eta)^{-\nu}\frac{\partial V}{\partial\xi}=$$
$$=2^{\nu-1}(\xi-\eta)^{-\nu}(a_2-c_2)U+2^{\nu-1}(\xi-\eta)^{-\nu}(b_2-d_2)V. \tag{10}$$

Если в уравнении (10), рассматриваемом на отрезке $-R\leqslant\xi\leqslant R$, $\eta=-R$, соответствующем отрезку A_0C_0, заменить функцию V ее выражением согласно второму условию (8): $V=T\psi-SU$, где

$$T=\frac{(\xi-\eta)^{2\nu}}{2^{2\nu}\alpha_1B_*+\beta_1(\xi-\eta)^{2\nu}A_*},$$
$$S=\frac{\alpha_1(\xi-\eta)^{2\nu}A_*+2^{-2\nu}\beta_1(\xi-\eta)^{4\nu}B_*}{2^{2\nu}\alpha_1B_*+\beta_1(\xi-\eta)^{2\nu}A_*},$$

то получим уравнение

$$\frac{dU(\xi-R)}{d\xi}+p(\xi,-R)U(\xi,-R)=Q(\xi,-R), \tag{11}$$

в котором

$$p(\xi,\eta)=[2^{\nu}(\xi-\eta)^{-\nu}S_{\xi}-2^{-\nu}(\xi-\eta)^{-\nu}(a_2-c_2)+$$
$$+2^{\nu-1}(\xi-\eta)^{-\nu}(b_2-d_2)S]/[2^{-\nu}(\xi-\eta)^{\nu}+2^{\nu}(\xi-\eta)^{-\nu}S],$$
$$Q(\xi,\eta)=[2^{\nu}(\xi-\eta)^{-\nu}(T\psi)_{\xi}+2^{\nu-1}(\xi-\eta)^{-\nu}(b_2-d_2)\times$$
$$\times T\psi]/[2^{-\nu}(\xi-\eta)^{\nu}+2^{\nu}(\xi-\eta)^{-\nu}S].$$

Из уравнения (11) находим $U(\xi,-R)=\Phi(\xi,C^*)$, где

$$\Phi(\xi,c^*)=\exp\left(-\int_R^{\xi}p(t,-R)\,dt\right)\Big[c^*+$$

$$+\int_R^{\xi} Q(t,-R)\exp\Big(\int_R^{\xi} p(t,-R)\,dt\Big)\,dt\Big],\quad c^*=U(R,-R).$$

Возвращаясь к переменным x, y, получаем соотношение

$$U|_{A_0C_0}=\Phi(2x+R,c^*)\qquad(-R<x\leqslant 0).$$

Вполне очевидно, что выбор числового значения для константы c^* равносилен выбору числового значения функции v в точке $(0,-R)$.

Подводя итог, заключаем, что задача A в рассматриваемом частном случае редуцируется к задаче Трикоми для системы уравнений

$$|y|^{2\nu}U_x-\operatorname{sgn} yV_y=a_0U+b_0V,\qquad |y|^{2\nu}U_y+V_x=c_0U+d_0V$$

с условиями склеивания (9) и обычными граничными условиями

$$U|_{L^+}=\varphi/(A^{*2}+B^{*2}),\qquad U|_{A_0C_0}=\Phi.$$

Перейдем к рассмотрению общего случая задачи A. Введем обозначения: L^- — дуга, симметричная дуге L^+, относительно оси OX; D^* — конечная область, ограниченная кривой $L^+\cup L^-$. Функции α и β, заданные на дуге L^+, доопределим на дуге L^- формулами $\alpha(x;y)=\alpha(x;-y)$, $\beta(x,-y)=-\beta(x,y)$. Будем считать, что $\alpha^2+\beta^2>h>0$.

В данной ситуации у функции $\operatorname{Arg}(\alpha+|y|^{2\nu}\beta i)$, заданной на контуре $L^+\cup L^-$, существует однозначная ветвь $\arg(\alpha+|y|^{2\nu}\beta i)$, обладающая свойством

$$\arg(\alpha(x,-y)+|y|^{2\nu}\beta(x,-y)i)=$$
$$=-\arg(\alpha(x,y)+|y|^{2\nu}\beta(x,y)i).$$

Соответственно этому у функции $\alpha+|y|^{2\nu}\beta i$ найдется положительный регуляризующий множитель p. Он обладает тем свойством, что функция $\alpha+|y|^{2\nu}\beta i$ после ее умножения на p является граничным значением некоторой функции, аналитической в области D^*. Следуя методу, указанному в монографии [2, с. 275—276], найдем множитель p. Сначала в области D^* построим гармоническую функцию ω, удовлетворяющую граничному условию $\omega|_{L^+\cup L^-}=\arg(\alpha+|y|^{2\nu}\beta i)$. Так как $\arg(\alpha+|y|^{2\nu}\beta i)$ может иметь разрывы первого рода в точках A_0, B_0, то построение функции ω связано с решением обобщенной задачи Дирихле [3, с. 200—202]. Затем в области D^* найдем функцию ω_1, гармонически сопряженную с функцией ω, полагая для определенности $\omega_1(0,0)=0$.

Функция ω, будучи нечетной относительно аргумента y на линии $L^+\cup L^-$, является нечетной относительно y и в области D^*. Из этого следует, что функция ω_1 является четной относительно аргумента y.

Введем в рассмотрение функцию, аналитическую в области D^*:

$$A^*-iB^*=\exp(-\omega_1+i\omega),$$

$$A^*=\exp(-\omega_1)\cos\omega,\qquad -B^*=\exp(-\omega_1)\sin\omega.$$

Так как на линии $L^+\cup L^-$ выполняется равенство

$$\arg(A^*-iB^*)=\arg(\alpha+|y|^{2\nu}\beta i)=\omega,$$

то

$$(A^*-iB^*)|_{L^+\cup L^-}=(\alpha+|y|^{2\nu}\beta i)p,$$

где $p>0$: $\quad p=\dfrac{|A^*-iB^*|}{|\alpha+|y|^{2\nu}\beta i|}=\dfrac{\exp(-\omega_1)}{\sqrt{\alpha^2+|y|^{4\nu}\beta^2}}$.

Вернемся к первому условию (2). Оно равносильно условию $(p\alpha u+p\beta v)|_{L^+}=p\varphi$. Учитывая, что $\alpha p=A^*$, $\beta p|y|^{2\nu}=-B^*$, имеем $(A^*u-y^{-2\nu}B^*v)|_{L^+}=p\varphi$. При этом $A^*_x+B^*_y=0$, $A^*_y-B^*_x=0$ и $B^*(x,+0)=0$, так как $\omega(x,0)=0$.

Автор выражает благодарность Т. В. Чекмареву за руководство настоящей работой.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1987.
4. Чекмарев Т. В. Основные граничные задачи для некоторых систем уравнений гиперболического, эллиптического и смешанного типов. Ч. 1. Горький, 1985. Деп. в ВИНИТИ 20.03.85, № 1999—85.

Нижегородский политехнический институт

Поступила в редакцию 19 февраля 1992 г.