Математические заметки

Том 90 выпуск 1 июль 2011

УДК 517.91

Число дополнительных особых точек в задаче Римана–Гильберта на римановой поверхности

Д. В. Артамонов

Приводится оценка сверху на число дополнительных особых точек, достаточных для построения системы линейных уравнений с заданными регулярными особыми точками и монодромией на римановой поверхности.

Библиография: 7 названий.

Пусть M – компактная риманова поверхность рода $g > 0$, $a_1, \dots, a_n$, $a_i \neq a_j$ – точки на этой поверхности. Для произвольной начальной точки x_0 фундаментальная группа $\pi_1(M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; x_0)$ поверхности M с удаленными точками $a_1, \dots, a_n$ описывается так. Это есть группа с образующими $\gamma_1, \dots, \gamma_n, f_1, h_1, \dots, f_g, h_g$ и одним соотношением: $\gamma_1 \dots \gamma_n h_1 f_1 h_1^{-1} f_1^{-1} \dots h_g f_g h_g^{-1} f_g^{-1} = 1$. При этом образующие $f_1, h_1, \dots, f_g, h_g$ представляются теми же петлями, которые дают образующие в $\pi_1(M; x_0)$, а образующие γ_i представляются петлями, выходящими из x_0 и обходящими вокруг выколотых точек a_i (так что эти петли стягиваемы в M).

Пусть задано представление $\chi\colon \pi_1(M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; x_0) \to GL_p(\mathbb{C})$, т.е. задан набор матриц $G_1, \dots, G_n, F_1, H_1, \dots, F_g, H_g$, удовлетворящих соотношению

$$G_1 \cdots G_n H_1 F_1 H_1^{-1} F_1^{-1} \cdots H_g F_g H_g^{-1} F_g^{-1} = E.$$

Существует ли система из p линейных дифференциальных уравнений первого порядка на M с фуксовыми особыми точками в $a_1, \dots, a_n$ такая, что χ – ее представление монодромии?

Система задается дифференциальной мероморфной 1-формой с полюсами первого порядка в точках $a_1, \dots, a_n$. Подсчитывая размерности пространства таких форм и пространства представлений фундаментальной группы, можно увидеть, что при $g > 0$ размерность пространства представлений больше размерности пространства форм. Так что при $g > 0$ ответ в типичном случае отрицательный.

Оказывается, однако, что любое представление реализуется в классе регулярных систем с дополнительными особыми точками $b_1, \dots, b_N$ с тривиальной монодромией, соответствующей обходу вокруг них. Это означает следующее. Для любого представления $\chi\colon \pi_1(M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; x_0) \to GL_p(\mathbb{C})$, заданного матрицами $G_1, \dots, G_n, F_1,$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ по поддержке молодых кандидатов наук (грант № МК-4270.2011.1).

© Д. В. Артамонов, 2011

$H_1, \dots, F_{2g}, H_{2g}$, имеется система p дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_N$, при этом обходам вокруг дополнительных точек $b_1, \dots, b_N$ соответствует тривиальная монодромия. Это значит вот что. Монодромия данной системы – это представление группы $\pi_1(M \setminus \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_N\}; x_0)$, образующие ее – $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, $\delta_1, \dots, \delta_N$, $f_1, h_1, \dots, f_{2g}, \dots, h_{2g}$, где $\delta_1, \dots, \delta_N$ задаются петлями, обходящими вокруг точек $b_1, \dots, b_N$, а остальные элементы определяются так же, как и раньше. Тогда монодромия системы задается матрицами $G_1, \dots, G_n, E, \dots, E, F_1, H_1, \dots, F_{2g}, H_{2g}$, где E – единичная матрица.

Напомним, что регулярность особой точки системы означает, что все решения системы в окрестности этой особой точки имеют не более, чем степенной рост при приближении к особой точке по произвольному сектору конечного раствора (т.е. запрещено при приближении к особой точке оборачиваться вокруг нее) – см. [1]. При этом фуксовы особенности регулярны, но обратное неверно – коэффициенты системы могут иметь в регулярной точке полюса более высокого порядка.

Оценки числа дополнительных особых точек приводились различными авторами. В работе [2] приводилась оценка числа дополнительных точек для задачи построения фуксова дифференциального уравнения по монодромии. При этом делались весьма существенные предположения о монодромии и сама оценка зависит не только от p и g, но и числа особых точек n. В работах [4], [3] рассматривались различные случаи задачи построения регулярной системы при предположении, что $p = 2$ и при дополнительных предположениях о представлении фундаментальной группы. В данной же работе на представление монодромии не накладывается никаких условий.

При этом в работе [3] в рассматриваемой там ситуации оцениваются порядки полюсов коэффициентов получаемой системы в дополнительных регулярных особых точках (в заданных же особых точках a_i получаемая система имеет фуксовы особенности), в настоящей работе этого не делается.

Заметим, что при $g = 0$, как известно, достаточно одной дополнительной особой точки, поэтому далее, на протяжении всей работы мы предполагаем, что $g > 0$. Работа посвящена доказательству следующего утверждения.

Теорема 1. *Любое представление фундаментальной группы $\pi_1(M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; x_0)$ можно реализовать как представление монодромии регулярной системы с не более чем $2pg - g + 1$ дополнительными особыми точками с тривиальной монодромией, соответствующей обходу вокруг них.*

Доказательство. Итак, имеется представление $\chi\colon \pi_1(M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; x_0) \to \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$. По этому представлению строится расслоение E со связностью ∇ такое, что $a_1, \dots, a_n$ – фуксовы особые точки связности и монодромия этой связности есть χ (см. [1; лекция 8]; хотя здесь все построения делаются для случая $g = 0$, для случая $g > 0$ все построения такие же).

Как известно, на римановой сфере любое расслоение распадается в прямую сумму линейных расслоений. Для римановой поверхности произвольного рода такое утверждение не верно. Однако, тем не менее, имеет место мероморфная тривиальность любого расслоения. Это значит, следующее.

Теорема 2 (см. [5]). *Существуют мероморфные сечения расслоения $\psi_1, \dots, \psi_p$ такие, что они образуют базис в слоях над всеми точками, кроме конечного числа.*

Среди этих точек имеются полюса сечений $\psi_1, \dots, \psi_p$ *и точки* $z_1, \dots, z_t \in M$, *над которыми все сечения конечны, но линейно зависимы.*

При этом мероморфное сечение s расслоения с мероморфной тривиализацией $\psi_1, \dots, \psi_p$ задается набором мероморфных функций $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ с помощью формулы $s = \alpha_1\psi_1 + \dots + \alpha_p\psi_p$.

Поясним связь мероморфной тривиализации для расслоений с оценкой числа дополнительных особых точек.

По монодромии χ было построено (E, ∇)-расслоение с логарифмической связностью, так что монодромия связности есть χ. Найдем какую-либо мероморфную тривиализацию для данного расслоения E.

Имеет место следующий общеизвестный факт.

Предложение 1. *Пусть по множеству особых точек* $a_1, \dots, a_n$ *и монодромии* χ *построено расслоение с логарифмической связностью* (E, ∇). *Пусть для* E *найдена мероморфная тривиализация* $\psi_1, \dots, \psi_p$. *Тогда существует регулярная система с монодромией* χ *и множеством дополнительных особых точек, содержащемся в множестве* S, *которое есть объединение множества полюсов тривиализующих сечений* $\psi_1, \dots, \psi_p$ *и множества, где эти сечения конечны, но линейно зависимы. При этом если* $a_i \notin S$, *то* a_i *– фуксова особенность и для системы.*

Сформулируем теперь нашу основную задачу так. Задано p-мерное расслоение E. Найти число $N(p, g)$ такое, что имеется мероморфная тривиализация $\psi_1, \dots, \psi_p$, причем число t, где тривиализующие сечения становятся линейно зависимыми, не превосходит $N(p, g)$. При этом окажется, что полюса всех сечений лежат в выбранной нами произвольно точке P.

В качестве отступления отметим, что оценка сверху на число t может легко быть сделана для случая, когда расслоение E оказывается стабильным. В этом случае, с использованием параметров Тюрина (определение дано в [6], см. также оригинальную работу [7]), можно получить, что достаточно взять $t = pg$ дополнительных особых точек. Однако, конечно, не каждую монодромию можно реализовать как монодромию связности в стабильном (и даже полустабильном расслоении – см. [3]).

Прежде всего докажем такое утверждение.

Предложение 2. *На римановой поверхности* M *рода* g *для каждой точки* $P \in M$ *каждое линейное расслоение* L *имеет мероморфное сечение* s *с таким свойством. На* $M \setminus P$ *оно имеет не более чем* g *нулей и не имеет полюсов. Кроме того,* $(s) + (-\deg L + g)P \geqslant 0$, *где* (s) *– дивизор нулей и полюсов сечения* s.

Последнее утверждение можно формулировать так: в точке P сечение s имеет полюс порядка не более $(-\deg L + g)$.

Доказательство. Если мы тензорно умножим расслоение L на расслоение $\xi(P)^k$, так полученное расслоение $L' = L \otimes \xi(P)^k$ будет иметь степень $\deg L' = \deg L + k$. Положим $k = -\deg L + g$. Согласно теореме Римана–Роха имеется неравенство

$$\dim H^0(X, \mathscr{O}(L')) \geqslant (1 - g) + \deg L' = 1 > 0.$$

Так что расслоение L' имеет голоморфное сечение s'.

В силу голоморфности сечение s' не имеет полюсов, но имеет $\deg L' = g$ нулей с учетом кратности; следовательно, оно имеет не более g нулей без учета кратности. По этому сечению расслоения $L' = L \otimes \xi(P)^k$ строится сечение s расслоения L. Делается это таким образом. Каждое сечение расслоения $L' = L \otimes \xi(P)^k$ имеет вид $s' = ss_0$, где s – сечение L, а s_0 – сечение $\xi(P)^k$. Отсюда следует, что s'/s_0 будет сечением L. Возьмем в качестве s_0 каноническое сечение $\xi(P)^k$, имеющее нуль порядка k (или полюс, если $k < 0$) в точке P.

Сечение s' имело не более g нулей. Из явных формул видно, что на $M \backslash P$ сечение s имеет также не более g нулей.

Дивизор (s) нулей и полюсов сечения s равен $(s') - (-\deg L + g)P$. Отсюда и из того, что $(s') \geqslant 0$, следует и второе утверждение.

Фиксируем некоторую точку $P \in M$. Будем считать, что число нулей каждого сечения ψ_i, $i = 1, \ldots, p$, не превосходит g и все они, если и имеют полюс, то только лишь в точке P. Будем минимизировать число точек, где сечения становятся линейно зависимыми. Именно, мы будем строить новые мероморфные сечения $\psi_1'', \ldots, \psi_p''$, также осуществляющие мероморфную тривиализацию; число точек, где все эти сечения принимают конечные значения, но линейно зависимы, не превосходит некоторого числа $N(p, g)$, зависящего только от чисел p и g. Кроме того, новые сечения ψ_l'' снова будут иметь, возможно, полюс только лишь в точке P.

Сделаем это индукцией по p. Положим $\psi_1'' = \psi_1$, так что $N(1, g) = g$. Пусть нами уже сделана оценка для $N(p-1, g)$; сделаем оценку для $N(p, g)$.

Рассмотрим подрасслоение $E' \subset E$, натянутое на сечения $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$. Воспользовавшись индуктивным предположением, можно выбрать мероморфные сечения $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}''$ расслоения E', осуществляющие мероморфную тривиализацию, так что число точек $z_1, \ldots, z_m$, в которых эти новые сечения становятся линейно зависимыми, не превосходит $N(p-1, g)$. Кроме того, все эти сечения имеют, возможно, только один полюс, расположенный в точке P.

Добавим к сечениям $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}''$ сечение ψ_p – получим мероморфную тривиализацию E. Посмотрим, в каких точках сечения становятся линейно зависимыми. Это точки $z_1, \ldots, z_m$, где зависимыми сечения $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}''$, а также точки $z_{m+1}, \ldots, z_t$, где $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}''$ независимы, но $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}'', \psi_p$ зависимы.

Возьмем точку z_i, $i > m$. Так как сечения $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}''$ линейно независимы, то в качестве базисных голоморфных сечений в окрестности такой точки можно взять сечения вида $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}'', v^i$, где v^i – некотрое определенное в окрестности z_i голоморнофое сечение. Тогда в этой окрестности верно равенство

$$\psi_p = \alpha_1^i \psi_1'' + \cdots + \alpha_{p-1}^i \psi_{p-1}'' + \alpha_p^i v^i$$

для некоторых голоморфных в этой окрестности функций $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_p^i$.

Так как сечения $\psi_1'', \ldots, \psi_{p-1}'', \psi_p$ линейно зависимы в точке z_i, в этой точке α_p^i имеет нуль кратности $d_i > 0$, т.е. $\alpha_p^i = z^{d_i} {\alpha'}_p^i$, где z – координата в окрестности точки z_i такая, что $z(z_i) = 0$. Здесь ${\alpha'}_p^i(z_i) \neq 0$.

Теперь докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Имеются мероморфные функции $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{p-1}$, каждая из которых имеет единственный полюс в фиксированной точке P и такая, что для каждого*

$i = m+1, \dots, t$, *за исключением не более, чем* g *индексов, в точке* z_i *функция* $\widetilde{\alpha}_j - \alpha_j^i$, $j = 1, \dots, p-1$, *имеет нуль порядка не меньше* $d_i + 1$.

Иными словами, в каждой точке z_i отрезки ряда Тейлора длины d_i+1 у глобальной мероморфной функции $\widetilde{\alpha}_j$ и локально заданной функции α_j^i должны совпадать.

Определение 1. Те из точек $z_{m+1}, \dots, z_t$, в которых функция $\widetilde{\alpha}_j - \alpha_j^i$ будет иметь нуль нужного порядка, будут называться *неисключительными*.

Таким образом, имеется не более g исключительных точек.

Доказательство. Пусть f – функция, имеющая полюс в точке P и нули первого порядка в точке $z_{m+1}, \dots, z_t$, за исключением не более g точек. Строится она так: берем мероморфное сечение s расслоения $\xi(z_{m+1})^{-1} \otimes \dots \otimes \xi^{-1}(z_t)$, имеющее единственный полюс в точке P и еще не более, чем g нулей. Кроме s у этого расслоения существует каноническое сечение s^0 с полюсами первого порядка в точках $z_{m+1}, \dots, z_t$ и не имеющее нулей. Тогда $f = s/s^0$ будет мероморфной функцией.

Если z_i не является нулем сечения s, то в точке z_i функция f имеет нуль первого порядка. Если же в точке z_i сечение s имело нуль, то f имеет в этой точке нуль более высокого порядка. Такая точка и будет исключительной; число таких точек не превосходит числа нулей сечения s, которое не превосходит числа g. Полюсом же функции f является лишь точка P.

Теперь построим мероморфные функции $f_{m+1}, \dots, f_t$, имеющие полюс в точке P, и такие, что f_i принимает ненулевое значение в z_i и нулевые значения в остальных точках $z_{m+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_t$.

Для построения этой функции возьмем расслоение

$$\xi(z_{t+1})^{-1} \otimes \dots \otimes \widehat{\xi^{-1}(z_i)} \otimes \dots \otimes \xi^{-1}(z_t).$$

У него имеется сечение s с полюсом в выбранной точке P. Также у данного расслоения имеется каноническое сечение s^0 с полюсами первого порядка в точках $z_{m+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_t$ и не имеющее нулей. Определим мероморфную функцию $\widetilde{f}_i = s/s^0$. Эта функция имеет единственный полюс в точке P и нули в точках $z_{t+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_m$. Если окажется, что $\widetilde{f}_i(z_i) \neq 0$, то просто положим $\widetilde{f}_i = f_i$.

Если же $\widetilde{f}_i(z_i) = 0$, то поступаем так. Пусть порядок нуля функции $\widetilde{f}_i$ в z_i равен k. Имеется мероморфная функция h, имеющая единственный полюс в z_i и порядок его равен r. Тогда положим $f_i = (\widetilde{f}_i)^r h^k$. Эта функция принимает ненулевое значение в z_i, имеет единственный полюс в P, где был полюс у $\widetilde{f}_i$, принимает нулевые значения в точках $z_{m+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_t$, где были нули у $\widetilde{f}_i$.

Пусть $d = \max\{d_i + 1\}$; обозначим как g_i функцию f_i^d. Эта функция принимает ненулевое значение в точке z_i и имеет нули в точках $z_{m+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_t$ порядков, по меньшей мере d. Полюса у всех этих функций находятся в точке P.

Перейдем теперь непосредственно к построению функций $\widetilde{\alpha}_j$. Для неисключительных точек z_i у нас имеется функция g_i, принимающая ненулевое значение в точке z_i, и функция fg_i, имеющая нуль первого порядка в z_i. В оставшихся точках $z_{m+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_t$ (даже исключительных) она имеет нули порядка не меньше d. Существует полином без свободного члена p_j^i такой, что $p_j^i(fg_i, g_i)$ и α_j^i имеют совпадающие отрезки ряда Тейлора длины $d_i + 1$ в точке z_i. Так как в оставшихся точках $z_{m+1}, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_t$ функции g_i, fg_i имеют нуль порядка как минимум

$d = \max\{d_i + 1\}$, у функции $p^i_j(fg_i, g_i)$ начальный отрезок ряда Тейлора длины d в этих точках нулевой. Так что $\widetilde{\alpha}_j = \sum_i p^i_j(fg_i, g_i)$, где суммирование ведется по неисключительным точкам, есть нужная функция.

Вернемся к оценке числа $N(p, g)$. Прежде всего, вместо сечения ψ_p возьмем сечение

$$\psi'_p = \psi_p - \widetilde{\alpha}_1\psi''_1 - \cdots - \widetilde{\alpha}_{p-1}\psi''_{p-1}.$$

При этом у всех функций $\widetilde{\alpha}_i$ и сечений $\psi''_1, \ldots, \psi''_{p-1}, \psi_p$ есть единственный общий полюс в точке P. Поэтому сечение ψ'_p имеет, возможно, полюс лишь в этой же точке P.

Так как это преобразование обратимо везде, за исключением полюса P, то во всех точках, где сечения $\psi''_1, \ldots, \psi''_{p-1}, \psi_p$ были независимы, сечения $\psi''_1, \ldots, \psi''_{p-1}, \psi'_p$ также будут линейно независимы. Следовательно, они зависимы только в точках $z_1, \ldots, z_t$.

По индуктивному предположению мы уже минимизировали число точек, где зависимы $\psi''_1, \ldots, \psi''_{p-1}$, и оценили его сверху некоторым числом $N(p-1, g)$. В окрестности точки $z_i \in \{z_{m+1}, \ldots, z_t\}$ имелись равенства

$$\psi_p = \alpha^i_1\psi''_1 + \cdots + \alpha^i_{p-1}\psi''_{p-1} + \alpha^i_p v^i.$$

Они дают нам равенства

$$\psi'_p = (\alpha^i_1 - \widetilde{\alpha}_1)\psi''_1 + \cdots + (\alpha^i_{p-1} - \widetilde{\alpha}_{p-1})\psi''_{p-1} + \alpha^i_p v^i,$$

или

$$\psi'_p = \beta^i_1\psi''_1 + \cdots + \beta^i_{p-1}\psi''_{p-1} + \beta^i_p v^i,$$

где $\beta^i_j = \alpha^i_j - \widetilde{\alpha}_j$, $j = 1, \ldots, p-1$, $\beta^i_p = \alpha^i_p$.

Благодаря лемме 1 верно следующее: в неисключительной точке z_i функция β^i_p имеет нуль порядка d_i, а остальные функции β^i_j при $j < p$ имеют нули в точке z_i более высокого порядка.

Предложение 3. *Имеется мероморфная функция h такая, что она имеет полюса лишь в неисключительных точках $z_{m+1}, \ldots, z_t$ порядка $d_{m+1}, \ldots, d_t$, за исключением q' точек и, возможно, еще в фиксированной точке P, а также имеющая q'' нулей на поверхности M с удаленными неисключительными точками z_i, так что $q' + q'' \leqslant g$.*

Доказательство. Возьмем линейное расслоение $F = \xi(z_{m+1})^{d_{m+1}} \otimes \cdots \otimes \xi(z_t)^{d_t}$. У него имеется мероморфное сечение s с единственным полюсом в точке P и не более g нулями. Кроме того, у него имеется каноническое сечение s^0 с нулями в неисключительных точках $z_{m+1}, \ldots, z_t$ порядка $d_{m+1}, \ldots, d_t$. Положим $h = s/s^0$; это будет мероморфная функция. Точка P является ее полюсом. Если неисключительная точка z_i не является нулем s, то полученная функция имеет в точке z_i полюс порядка в точности d_i. Если же неисключительная точка z_i является нулем s, то h имеет полюс меньшего порядка (или даже нуль). Число таких точек обозначим как q'.

Пусть q'' – количество нулей s на поверхности M с удаленными неисключительными точками z_i. Так как $q' + q''$ есть количество нулей s, которое не превосходит g, то $q' + q'' \leqslant g$.

Положим $\psi''_p = h\psi'_p$. Тогда в окрестностях точек z_i, $i = m+1, \dots, t$, верны равенства

$$\psi''_p = (h\beta^i_1)\psi''_1 + \dots + (h\beta^i_{p-1})\psi''_{p-1} + (h\beta^i_p)v^i.$$

Все функции $(h\beta^i_j)$ голоморфны в окрестности неисключительных точек $z_{m+1}, \dots, z_t$. Поэтому сечение ψ''_p голоморфно в этих точках и может иметь полюс лишь в точке P. Вывод таков: если неисключительная точка z_i такова, что h имеет в этой точке полюс порядка в точности d_i, то функция $(h\beta^i_p)$ принимает ненулевое значение в z_i. Это значит, что в окрестности такой z_i мы можем выразить v^i через $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, \psi''_p$. Так как в слоях над точками из окрестности z_i сечения $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, v^i$ образовывали базис, то $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, \psi''_p$ в слоях над точками из некоторой окрестности такой z_i также образую базис. Итак, в неисключительных точках $z_{m+1}, \dots, z_t$, где к тому же построенная функция h имеет полюса нужных порядков, сечения $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, \psi''_p$ стали независимыми.

Посмотрим, где сечения $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, \psi''_p$ линейно зависимы. Они, конечно, зависимы в точках $z_1, \dots, z_m$, где зависимы сечения $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}$. Количество этих точек не превосходит $N(p-1, g)$. Они могут быть зависимыми в исключительных точках из $z_{m+1}, \dots, z_t$; количество их не превосходит g. Они могут быть зависимыми в тех неисключительных q' точках из $z_{m+1}, \dots, z_t$, где построенная функция h не имеет полюсов нужных порядков. Это все точки из $z_1, \dots, z_t$, где сечения $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, \psi''_p$ зависимы.

Посмотрим, что происходит на $M \setminus \{z_1, \dots, z_t\}$. Имеется точка P – полюс функции h, и имеется не более q'' нулей функции h. В точках, не являющихся нулями h сечения, $\psi''_1, \dots, \psi''_{p-1}, \psi''_p$ так и остались независимыми. Поэтому они могут стать зависимыми только на множестве нулей функции h, а их количество не превосходит q''.

Также ясно, что при всех построениях новых полюсов в точке P не добавляется. Так что

$$N(p, g) \leqslant N(p-1, g) + g + q' + q'' \leqslant N(p-1, g) + 2g.$$

С учетом того, что $N(1, g) = g$, получаем: $N(p, g) \leqslant 2pg - g$. Прибавим к этому числу еще точку P. Так что общее количество дополнительных особых точек не превосходит $2pg - g + 1$.

Таким образом, у нас имеется мероморфная тривиализация, так что множество S, состоящее из полюсов тривиализующих сечений и точек, где они конечны, но линейно зависимы, содержит не более $2pg - g + 1$ точек. Согласно предложению 1 строится система, при этом эти точки и будут дополнительными особенностями. При этом, если $a_i \notin S$, то a_i будет даже фуксовой особенностью.

Основная теорема доказана.

Заметим, что при $p = 2$ сделанная в этой работе оценка превращается в $3g + 1$, оценка же, полученная в теореме 1 в [3], есть $3g - 1$. Однако в отличие от [3] мы не требовали при этом неприводимости представления. В отличие от работы [3], как уже говорилось, мы не делаем оценки полюсов системы в дополнительных особенных точках.

В заключение хочу выразить благодарность Р. Р. Гонцову и И. В. Вьюгину за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А.А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009.

[2] M. Ohtsuki, “On the number of apparent singularities of a linear differential equation”, *Tokyo J. Math.*, **5**:1 (1982), 23–29.

[3] А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности”, *Монодромия в задачах алгебраической геометрии и дифференциальных уравнений*, Сборник статей, Тр. МИАН, **238**, Наука, М., 2002, 55–69.

[4] M. Yoshida, “On the number of apparent singularities of the Riemann–Hilbert problem on Riemann surface”, *J. Math. Soc. Japan*, **49**:1 (1997), 145–159.

[5] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Grad. Texts in Math., **81**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[6] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:4 (1978), 41–52.

[7] А. Н. Тюрин, “Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:3 (1965), 657–688.

Д. В. Артамонов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: dmitri.artamonov@mail.ru

Поступило
26.03.2010
Исправленный вариант
02.08.2010