

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Arnol'd, Topological properties of Legendre projections
in contact geometry of wave fronts,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 3, 1–16

<https://www.mathnet.ru/eng/aa448>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

April 30, 2025, 19:17:47



О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЛЕЖАНДРОВЫХ ПРОЕКЦИЙ В КОНТАКТНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

В. И. Арнольд

Существует интересная связь между глобальными топологическими вопросами о сосуществовании особенностей на волновых фронтах, с одной стороны, и теорией Штурма осцилляционных свойств решений дифференциальных уравнений — с другой.

Эту связь можно использовать в обоих направлениях. В настоящей работе из теорем Штурма–Табачникова об осцилляциях линейных комбинаций собственных функций дифференциальных операторов на окружности выводится оценка снизу для числа точек возврата фронта общего положения, близкого к схлопывающейся в точку окружности.

Классическая теорема о четырех вершинах кривой на евклидовой плоскости оказывается, таким образом, частным случаем общего факта контактной топологии. Это подсказывает многомерные обобщения теоремы о четырех вершинах, а также нетрадиционные многомерные обобщения теории Штурма для функций на сферах. Простейшие из этих обобщений соответствуют в евклидовой геометрии теоремам об омбилических точках на поверхностях трехмерного евклидова пространства. Общие формулировки в терминах симплектической и контактной топологии открывают путь для многочисленных многомерных и неевклидовых обобщений этих классических теорем дифференциальной геометрии евклидова пространства (на случаи значительно более общие, чем риманова геометрия).

Настоящая работа была написана во время семестра, проведенного автором в Массачусетском Технологическом институте в качестве приглашенного математическим Департаментом профессора. Автор благодарен Институту и Департаменту за гостеприимство и поддержку.

§1. Необходимые четыре точки возврата выворачивающегося фронта

Начнем с примера. Рассмотрим однопараметрическое семейство окружностей радиуса $|t|$ с центром в фиксированной точке евклидовой плоскости. Здесь t — па-

Ключевые слова: симплектическая топология, точки перегиба, выворачивание фронта; теорема Штурма, теорема о четырех вершинах.

раметр (время), нумерующий движущиеся фронты (окружности). При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ фронт сначала схлопывается (при $t = 0$) в точку, а затем вновь растет (рис. 1), вывернувшись наизнанку, так что внутренняя нормаль становится внешней.

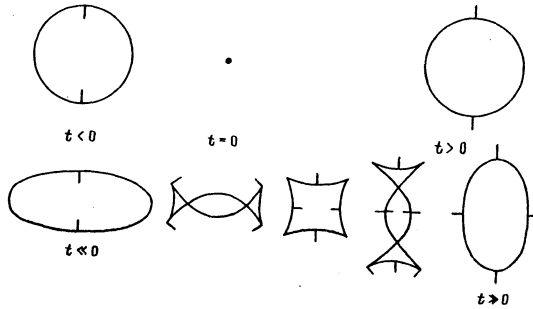


Рис. 1. Стандартный лежандров коллапс и его деформация общего положения.

Это семейство фронтов называется *стандартным лежандровым коллапсом*.

Схлопывание в точку — нетипичная особенность. При малой деформации системы фронтов переход от сжимающегося фронта к расширяющемуся происходит не сразу, а в несколько этапов. Точечный фронт при этом ни в какой момент не возникает, зато возникают фронты с несколькими особыми точками.

Типичная особенность фронта на плоскости — это точка возврата (полукубического типа). Основной результат настоящей работы состоит в том, что *при типичной деформации схлопывания фронта в точку возникает такая система фронтов, в которой присутствуют фронты с не менее чем четырьмя точками возврата*.

Пример. Рассмотрим в качестве начального фронта эллипс (например, близкий к окружности), а в качестве его эволюции — семейство эквидистант этого эллипса (рис. 1). Некоторые эквидистанты эллипса имеют четыре точки возврата. Наш результат показывает, что это не случайно — меньшим числом точек возврата обойтись нельзя по „топологическим“ причинам. Эти „топологические“ причины заключаются в некоторых фактах контактной топологии. В анализе они проявляются в виде теорем типа Штурма о нулях собственных функций и их комбинаций.

Контактная геометрия является нечетномерным двойником симплектической геометрии. В то время как симплектическая геометрия прочно вошла в арсенал математической физики, контактная геометрия, к сожалению, известна гораздо меньше. Соотношение между симплектической и контактной геометрией напоминает соотношение между линейной алгеброй и проективной геометрией. В то

время как все вычисления в контактной геометрии можно свести к вычислениям в рамках обычного гамильтонова формализма и скобок Пуассона однородных функций, в топологических вопросах, которыми мы будем ниже заниматься, переход к однородным функциям неудобен и использование языка контактной геометрии практически неизбежно.

Ниже основные понятия контактной геометрии изложены в той форме, которая потребуется для дальнейшего, и с теми примерами, которые будут использованы при доказательстве теоремы о четырех точках возврата выворачивающегося фронта.

§2. Контактные многообразия

Определение. *Контактным элементом* на многообразии называется гиперплоскость (линейное подпространство коразмерности один) в касательном пространстве.

Ниже мы в основном будем рассматривать *коориентированные* контактные элементы (снабженные трансверсальным направлением, например — вектором нормали в какой-либо метрике). Все коориентированные контактные элементы на n -мерном многообразии на B^n образуют многообразие ST^*B^n размерности $2n-1$ — пространство сферизованного кокасательного расслоения. Слой этого расслоения над точкой многообразия B^n — это сфера S^{n-1} , образованная всеми коориентированными контактными элементами, приложенными в этой точке. Таким образом, ST^*B^n — это многообразие направлений всевозможных ненулевых импульсных векторов фазового пространства над конфигурационным многообразием B^n .

Пример. Многообразие коориентированных контактных элементов плоскости \mathbb{R}^2 является трехмерным многообразием, диффеоморфным $S^1 \times \mathbb{R}^2$ (оно диффеоморфно внутренности полнотория). В качестве координат в этом пространстве (точнее, в его универсальном накрывающем пространстве \mathbb{R}^3) мы будем использовать (x, y, φ) (рис. 2), где (x, y) — обычные декартовы координаты точки приложения элемента на плоскости, а φ — угол между направлением коориентирующей элемент нормали и положительным направлением оси x (отсчитываемый в сторону положительного направления оси y).

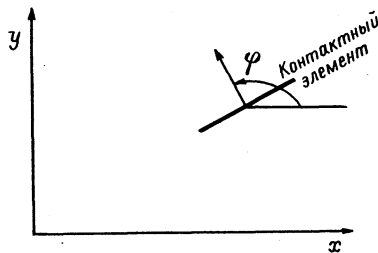


Рис. 2. Координаты коориентированного контактного элемента плоскости.

Определение. *Стандартная контактная структура* многообразия контактных элементов на B — это поле касательных гиперплоскостей многообразия контактных элементов, заданное следующим „условием конька“: вектор скорости движения контактного элемента принадлежит гиперплоскости контактной структуры, если скорость движения точки его приложения принадлежит самому контактному элементу.

Пример. Стандартная контактная структура многообразия коориентированных контактных элементов плоскости задается во введенных выше координатах уравнением $\alpha = 0$, где α — дифференциальная 1-форма

$$\alpha = cdx + sdy$$

(здесь и далее $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$).

Замечание 1. Форма α в определении контактной структуры не входит: ее можно умножить на любую не обращающуюся в нуль функцию, не меняя заданную уравнением $\alpha = 0$ структуру.

Замечание 2. *Контактная структура* на нечетномерном многообразии — это поле гиперплоскостей в касательных пространствах, обладающее свойством максимальной неинтегрируемости: ограничение формы $d\alpha$ на гиперплоскость $\alpha = 0$ должно быть невырожденной билинейной формой (линейной симплектической структурой). Это условие невырожденности не зависит от выбора формы α , локально задающей структуру (глобально такая форма может и не существовать, так как поле гиперплоскостей может не допускать коориентации). В нашем примере условие невырожденности выполнено.

Всякая контактная структура в окрестности каждой точки многообразия фиксированной размерности $2m + 1$ локально диффеоморфна любой другой (теорема Дарбу). В подходящей системе локальных „координат Дарбу“ всякая контактная структура задается уравнением $\alpha = 0$, где

$$\alpha = dz - pdq \quad (p = (p_1, \dots, p_m), q = (q_1, \dots, q_m)).$$

Пример. Выписанная выше в координатах стандартная контактная структура многообразия коориентированных контактных элементов плоскости на универсальной накрывающей \mathbb{R}^3 стандартна (приводится к нормальной форме Дарбу подходящим выбором *глобальных* координат).

Действительно, форма α имеет вид

$$cdx + sdy = d(cx + sy) + (sx - cy)d\varphi,$$

поэтому $(z = cx + sy, p = -sx + cy, \varphi)$ — глобальные координаты Дарбу.

§3. Лежандровы многообразия и их фронты

Определение. *Лежандровым подмногообразием* контактного многообразия называется интегральное подмногообразие контактной структуры, имеющее наибольшую возможную размерность (равную m в контактном многообразии размерности $2m + 1$).

Пример. Лежандровы подмногообразия пространств контактных элементов плоскости — это кривые, на которых форма α обращается в нуль. Все контактные

элементы, касающиеся гладкой кривой на плоскости, образуют такую лежандрову кривую. Лежандрову кривую образуют также все контактные элементы, приложенные в одной точке.

Определение. *Фронт* лежандрова подмногообразия многообразия контактных элементов на B называется проекция этого лежандрова многообразия на базу B .

Пример. Фронт лежандрова подмногообразия многообразия контактных элементов плоскости — это, как правило, плоская кривая. Каждая (иммерсированная) гладкая кривая на плоскости является фронтом лежандровой кривой, образованной элементами ее касательных в точках касания. Каждая точка плоскости тоже является вырожденным фронтом (кривой, составленной из приложенных в этой точке контактных элементов).

Лежандрова кривая общего положения имеет фронтом кривую, единственные особенности которой — точки возврата полукубического типа и точки трансверсального самопересечения. Эти особенности фронта устойчивы (сохраняются при малой деформации лежандровой кривой, оставляющей ее лежандровой).

Пример. Эквидистанты эллипса, изображенные на рис. 1, являются фронтами лежандровых кривых. Эти лежандровы кривые получаются из исходной кривой (образованной контактными элементами эллипса) под действием преобразований геодезического потока плоскости, естественно действующего на пространстве координированных контактных элементов.

Замечание. Поскольку далее я всюду буду рассматривать координированные контактные элементы, фронты лежандровых многообразий (кривых) следует считать *вооруженными* или *оснащенными* (т.е. снабженными координирующей каждый элемент „нормалью“). Вооруженный таким образом фронт однозначно определяет свое лежандрово подмногообразие в пространстве ST^*B .

Пример. Точечный фронт можно рассматривать вместе с оснащением всеми выходящими из этой точки направлениями. Тогда он определяет свое лежандрово многообразие (а именно слой сферизованного кокасательного расслоения).

Замечание. Вместо точки можно было бы начать с подмногообразия V^k любой размерности k в B^n . Все координированные контактные элементы, касающиеся этого подмногообразия, образуют в ST^*B^n лежандрово многообразие L^{n-1} . Проекция этого многообразия на B^n определяет лежандров коллапс $L^{n-1} \rightarrow V^k$ над V^k , если $k < n - 1$, т.е. если V^k — не гиперповерхность в B^n .

Вероятно, исследование лежандрова коллапса над точкой, проведенное ниже, можно перенести на этот более общий случай лежандрова коллапса над произвольным подмногообразием. Многообразие, соответствующее семейству фронтов стандартного лежандрова коллапса, получается из L^{n-1} при помощи геодезического потока римановой метрики.

Определение. *Лежандровым расслоением* (или *слоением*) называется расслоение (слоение), все слои которого лежандровы.

Пример 1. Сферизованное кокасательное расслоение лежандрово.

Пример 2. Проектирование $\mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, заданное в координатах Дарбу как забывание координаты p ,

$$(p, q, z) \mapsto (q, z),$$

является лежандровым расслоением.

Все лежандровы расслоения (или слоения) локально контактоморфны в окрестности точки пространства расслоения (слоения), т.е. переводятся друг в друга локальным диффеоморфизмом, сохраняющим контактную структуру.

Проекции лежандровых многообразий на базу любого лежандрова расслоения называются фронтами. Эти фронты обладают такими же локальными свойствами, как фронты, получающиеся при проектировании на B пространства контактных элементов над B .

Пример. Рассмотрим отображение $ST^*\mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}$, ставящее в соответствие каждому коориентированному контактному элементу евклидова пространства пару, составленную из орта коориентирующей нормали и скалярного произведения радиус-вектора точки приложения и этого орта. Это отображение является лежандровым расслоением.

Рассмотрим коориентированную гиперповерхность в евклидовом пространстве. Ее коориентированные контактные элементы образуют лежандрово подмногообразие в $ST^*\mathbb{R}^n$. Фронт этого многообразия является графиком некоторой функции $K : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, если исходная гиперповерхность была выпуклой. Эта функция называется опорной функцией выпуклой гиперповерхности. Таким образом, график опорной функции выпуклой гиперповерхности — это фронт лежандрова проектирования лежандрова подмногообразия.

Если исходная гиперповерхность общего положения не была выпуклой, то фронт в $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ лежандрова многообразия, образованного ее контактными элементами в $ST^*\mathbb{R}^n$, уже не будет графиком функции. Этот фронт — гиперповерхность в $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ с обычными для фронтов особенностями (например, для $n = 2$ — кривая с точками возврата полукубического типа). Таким образом, опорная функция невыпуклой гиперповерхности не только многозначна, но и имеет особенности, обычные для фронтов лежандровых отображений (а также для преобразований Лежандра невыпуклых функций, откуда и происходит наименование).

§4. Стандартный лежандров коллапс

Рассмотрим в многообразии коориентированных контактных элементов евклидова пространства \mathbb{R}^n множество всех контактных элементов, каждый из которых перпендикулярен радиус-вектору, соединяющему начало координат с точкой приложения контактного элемента.

Предложение. Указанное подмножество является гладким подмногообразием, диффеоморфным цилиндру $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Отображение $S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow ST^*\mathbb{R}^n$, которое паре (ω, t) ставит в соответствие контактный элемент с коориентирующим ортом нормали ω , приложенный в точке ωt , является вложением.

Определение. Образ указанного вложения называется *стандартным цилиндром* над \mathbb{R}^n .

Стандартный цилиндр расслоен на сферы $t = \text{const}$. Эти сферы являются лежандровыми подмногообразиями многообразия коориентированных контактных элементов пространства \mathbb{R}^n .

Определение. *Стандартным лежандровым коллапсом* над \mathbb{R}^n называется проекция стандартного цилиндра из $ST^*\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^n .

Мы будем рассматривать это отображение как семейство отображений лежандровых сфер $t = \text{const}$ на свои фронты. При $t \neq 0$ лежандрова сфера $t = \text{const}$ отображается на свой фронт (сферу радиуса $|t|$ в \mathbb{R}^n) диффеоморфно. Вся лежандрова сфера $t = 0$ коллапсирует в одну точку 0 пространства \mathbb{R}^n .

Пример. Стандартный лежандров коллапс над \mathbb{R}^2 — это схлопывание выворачиваемой окружности, описанное в §1.

Далее рассматриваются деформации стандартного лежандрова коллапса в \mathbb{R}^2 . Подобная деформация определяется однопараметрическим семейством лежандровых вложений окружности в $ST^*\mathbb{R}^2$, не слишком далеким от стандартного цилиндра. Пример такой деформации доставляет семейство эквидистант плоской замкнутой кривой, не слишком далекой от окружности.

Будет показано, что для не слишком больших общих деформаций стандартного лежандрова коллапса над \mathbb{R}^2 на одном из фронтов будет не меньше четырех точек возврата.

Замечание. Насколько большие деформации допустимы — неясно. По-видимому, существенно, чтобы фронты семейства соответствовали несамопересекающимся лежандровым кривым, или даже чтобы весь возмущенный цилиндр оставался вложенным.

Ситуация сходна с состоянием теории неподвижных точек симплектоморфизмов и точек пересечения лагранжевых многообразий до работ Конли и Цендера [3], а также Флоера [4] и т.д.

В этой теории инфинитезимальные возмущения стандартных объектов исследуются при помощи теории Морса (применяемой к функции Гамильтона инфинитезимальной деформации).

Получающиеся оценки снизу на числа неподвижных точек симплектоморфизмов и числа точек пересечения лагранжевых многообразий были перенесены на случай конечных (не слишком больших, но и не бесконечно малых) возмущений стандартных объектов (см. [1]) при помощи техники производящих функций симплектоморфизмов.

Более современные методы исследования возмущения квадратичных форм с бесконечным числом как положительных, так и отрицательных квадратов позволили затем во многих случаях (например, для торов [3], для двусвязных келеровых многообразий [4], для торических многообразий [9] и т.д.) снять всякие ограничения на величину возмущений.

В излагаемой ниже теории инфинитезимальное исследование приводит вместо теории Морса к теоремам типа теории Штурма. Результаты настоящей работы (и ее симплектического аналога [2], см. также [6,7]) позволяют свести к теоремам типа Штурма анализ конечных не слишком больших возмущений.

Однако снять совсем ограничение на величину возмущений мне удалось только в одной модельной задаче о кривых на сфере, где результат (полученный методами проективной топологии [8]) таков: *замкнутая несамопересекающаяся кривая, делящая сферу на две части равной площади, имеет не менее четырех точек перегиба.*

§5. Основная теорема

Рассмотрим однопараметрическое семейство лежандровых кривых в $ST^*\mathbb{R}^2$. Если это семейство не слишком далеко от стандартного цилиндра, задающего стандартный лежандров коллапс, то оно будет удовлетворять формулируемым ниже условиям малости возмущения — условиям допустимости.

Чтобы сформулировать эти условия, введем следующие обозначения. Рассмотрим *стандартную проекцию* $ST^*\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, сопоставляющую точке $(x, y; \varphi \bmod 2\pi)$ точку $(\varphi \bmod 2\pi, z)$, где $z = cx + sy$.

Это отображение является лежандровым расслоением, так как при $p = -sx + cy$ мы имеем

$$\alpha = cdx + sdy = dz - pd\varphi.$$

Лежандровы кривые нашего семейства проектируются на цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$ в виде фронтов.

Пример. В случае стандартного лежандрова коллапса $x^2 + y^2 = t^2$ на цилиндре получается семейство стандартных окружностей $z = \text{const} = t$.

Определение. Возмущение стандартного лежандрова коллапса над плоскостью называется *допустимым*, если проекции соответствующих лежандровых кривых на цилиндр являются гладкими кривыми вида $z = K(\varphi)$, где K — 2π -периодическая гладкая функция на окружности. Эта функция K зависит еще от нумерующего лежандровы кривые параметра t , и предполагается равномерная сходимости K к $\pm\infty$ при стремлении t к $\pm\infty$ соответственно.

Замечание. K — это опорная функция мгновенного фронта, соответствующего моменту t . Поэтому наши условия допустимости означают, что мгновенные фронты на плоскости (x, y) локально выпуклы (хотя и могут иметь точки возврата, не имеют точек перегиба) и что при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ фронт выворачивается наизнанку.

Теорема 1. *При типичном допустимом возмущении стандартного лежандрова коллапса над плоскостью среди фронтов мгновенных лежандровых кривых на плоскости имеются фронты с не менее чем четырьмя точками возврата.*

Доказательство. Точки возврата мгновенных фронтов определяются условием $dx = dy = 0$. Вдоль лежандровой кривой имеем $dz = pd\varphi$. Поэтому если $z = K(\varphi)$, $p = P(\varphi)$, то $P = K'$. Из уравнений

$$cx + sy = K, \quad -sk + cy = K'$$

мы находим

$$x = cK - sK', \quad y = sK + cK'.$$

Следовательно, вдоль лежандровой кривой

$$\begin{aligned} dx &= (-sK + cK' - cK' - sK'')d\varphi = -s(K + K'')d\varphi, \\ dy &= (cK + sK' - sK' + cK'')d\varphi = c(K + K'')d\varphi. \end{aligned}$$

Поэтому точки возврата фронта на плоскости (x, y) — это точки, где $K + K'' = 0$.

Теперь мы используем то условие, что $K \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Из этого условия следует, что при некотором значении t_0 параметра t интеграл функции $K + K''$ по окружности равен нулю.

Докажем, что соответствующий моменту t_0 фронт на плоскости имеет не менее четырех точек возврата.

Разложим функцию $K + K''$ в ряд Фурье. Функция $K + K''$ всегда ортогональна функциям $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, а при выбранном значении $t = t_0$ ортогональна также и константе. Поэтому ее ряд Фурье начинается со вторых гармоник: при $t = t_0$

$$K + K'' = \sum a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad n \geq 2.$$

По теореме Табачникова типа Штурма (см., например, [5] или [2]) такая функция имеет на окружности не менее четырех нулей.

Для возмущений общего положения все эти нули простые и соответствуют обычным точкам возврата фронтов на плоскости (x, y) . Теорема доказана.

Замечание. Из существования фронта с не менее чем четырьмя точками возврата можно вывести существование не менее четырех моментов рождения и смерти пар точек возврата при изменении t (если $K + K'' \neq 0$ при больших $|t|$, т.е. если исходный и конечный фронты неособые). Достаточно, например, чтобы $|K''|$ было ограничено, или чтобы возмущение стандартного цилиндра было сосредоточено в конечной области.

Таким способом из доказанной теоремы можно вывести теорему о четырех вершинах кривой на евклидовой плоскости (согласно которой такая кривая имеет не менее четырех точек экстремума кривизны), а также симплектическое обобщение этой теоремы (см. [2, 6, 7]).

Доказанная выше теорема содержит, однако, больше информации, так как на зависимость лежандровых кривых от t накладываются лишь очень слабые ограничения: наши фронты не предполагаются эквидистантами одного из них, а наши лежандровы многообразия — образами одного из них под действием фазового потока какого-либо гамильтонова уравнения, как в [2] (в классической теореме о четырех вершинах это уравнение свободной частицы).

§6. Оценка числа точек перегиба сферической кривой

Основной результат §5 можно переформулировать в виде теоремы о точках перегиба кривых на сфере.

Спроектируем цилиндр $\{\varphi, z\}$ на вписанную в него сферу $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ выходящими из начала координат лучами (φ и z — цилиндрические координаты на поверхности $X^2 + Y^2 = 1$). Каждая кривая на поверхности цилиндра спроектируется в кривую на сфере. Рассмотрим проекцию кривой $z = K(\varphi)$.

Предложение. Точки, где $K + K'' = 0$, проектируются в точки перегиба (быть может, кратного) сферической кривой. Обратное, если кривая на сфере трансверсально пересекает меридиан $\varphi = \text{const}$ в своей точке перегиба, то $K + K'' = 0$ в соответствующей точке проекции этой кривой на поверхность цилиндра.

Доказательство. Решения дифференциального уравнения $K + K'' = 0$ имеют графиками сечения цилиндра плоскостями, проходящими через начало координат. Проекция этих сечений на сферу являются ее невертикальными большими кругами.

Пусть функция K не удовлетворяет уравнению $K + K'' = 0$, но в некоторой точке $K + K'' = 0$. Проведем через эту точку график решения уравнения с такой же касательной, какую имеет график функции K в этой точке. В указанной точке график построенного решения имеет с графиком функции $K + K'' = 0$ касание не ниже второго порядка, так как в этой точке $K + K'' = 0$ для обеих функций. Поэтому в соответствующей точке сферическая кривая имеет с касающимся ее большим кругом касание не ниже второго порядка, что и доказывает предложение (в обратную сторону доказательство аналогично).

Следствие. Пусть на сфере дана гладкая функция такая, что вдоль каждого меридиана ее производная не обращается в нуль нигде, кроме полюсов (где функция имеет максимум и минимум), а в остальном общего положения. Тогда одна из линий уровня этой функции имеет не менее четырех точек перегиба.

Доказательство. После проектирования на цилиндр мы окажемся в ситуации доказательства основной теоремы: на поверхности цилиндра наши кривые задаются уравнениями вида $z = K(\varphi)$, и мы имеем $K \rightarrow \pm\infty$ при стягивании кривых на сфере к полюсам.

Точки перегиба кривых на сфере определяются из условия $K + K'' = 0$ для кривых на цилиндре. Мы заключаем, что число точек перегиба на одной из линий уровня на сфере не меньше четырех.

Оказывается, в качестве такой кривой всегда можно взять кривую, делящую площадь сферы пополам. Более того, можно отказаться от условия трансверсальности меридианам.

Теорема 2. Замкнутая гладкая кривая на сфере, делящая площадь сферы пополам, имеет не менее четырех точек перегиба.

Доказательство. Это вытекает из следующего общего факта проективной топологии, представляющего и самостоятельный интерес.

Теорема 3. Замкнутая гладкая несамопересекающаяся кривая на сфере, имеющая не более двух точек нулевой геодезической кривизны, целиком лежит в одной открытой полусфере.

Замечание. То, что замкнутая несамопересекающаяся локально выпуклая гиперповерхность на сфере любой размерности и несамопересекающаяся (не обязательно замкнутая) кривая (возможно с краем) без внутренних точек перегиба на двумерной сфере целиком лежат в одной полусфере, доказано в [8].

Теорема 2 вытекает из теоремы 3. Действительно, если бы кривая имела меньше четырех точек перегиба, то она умещалась бы в одной полусфере и не могла бы делить площадь сферы пополам.

§7. Сферические кривые с двумя точками перегиба

Доказательство теоремы 3 существенно опирается на результаты из проективной топологии [8] и будет здесь проведено не со всеми деталями (во избежание повторений рассуждений из [8]). В частности, я буду предполагать, что данная кривая с двумя точками нулевой геодезической кривизны есть кривая общего положения, так что эти точки A и B являются обыкновенными точками перегиба (от этого ограничения можно избавиться).

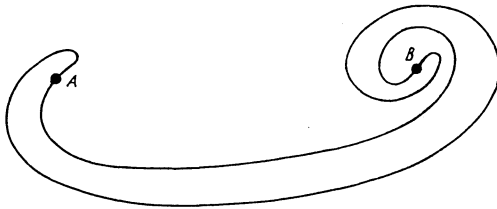


Рис. 3. Кривая с двумя точками перегиба.

Точки перегиба A и B (рис. 3) делят кривую на два (локально) выпуклых отрезка, ведущих из A в B . Эти криволинейные отрезки искривлены в одну сторону (в том смысле, что реперы (направление отрезка; направление нормали на сфере, направленной к центру кривизны), построенные для обоих отрезков, задают одинаковые ориентации сферы).

Согласно [8], каждый из этих двух криволинейных отрезков AB целиком умещается в одну открытую полусферу. После проектирования $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ сферы на проективную плоскость этот криволинейный отрезок превращается в *аффинную* локально выпуклую незамкнутую кривую AB (не пересекающуюся с некоторой „бесконечно удаленной“ прямой $\mathbb{R}P^1$).

Основная трудность доказательства теоремы 3 состоит в том, чтобы убедиться, что эту „бесконечно удаленную“ прямую можно выбрать общей для обоих криволинейных отрезков AB на сфере. Такой выбор действительно возможен, и вот почему.

Рассмотрим аффинную выпуклую кривую AB . Граница ее выпуклой оболочки (рис. 4) состоит из выпуклой дуги CD и отрезка DC , соединяющего концы этой дуги (этот результат, неявно содержащийся в [8], доказываться здесь не будет).

Точка C может совпадать (или не совпадать) с A , а D — с B (на рис. 4 $C = A$, но $D \neq B$). Область, ограниченная кривой CDC на аффинной плоскости, определяет на исходной сфере область, содержащую интервал AB большого круга (меньший π). Эту область я назову *сферической выпуклой оболочкой* нашего выпуклого отрезка AB исходной кривой на сфере.

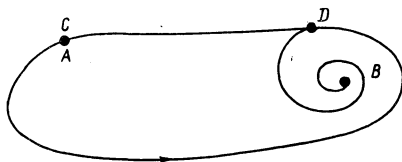


Рис. 4. Выпуклая оболочка выпуклого криволинейного отрезка AB .

Для второго ведущего из A в B выпуклого отрезка исходной кривой тоже можно построить сферическую выпуклую оболочку.

Основная лемма. *Из двух построенных сферических выпуклых оболочек одна содержит другую.*

Теорема 3 вытекает из этой леммы, так как большая сферическая выпуклая оболочка умещается в некоторой полусфере.

Доказательство основной леммы*. Рассмотрим большой круг, проходящий через A и B . Назовем его *экватором*. Его длина равна 2π . Обе сферические выпуклые оболочки высекают на экваторе интервалы, содержащие интервал AB и меньшие π .

Рассмотрим аффинную выпуклую кривую AB . Прямая S , содержащая A и B , пересекает кривую AB . Пусть K и L концы наибольшего отрезка прямой S с концами на кривой AB (рис. 5).

Пусть k и l следующие точки пересечения AB и S (дуги Kk и (или) Ll могут оказаться тривиальными, тогда $K = k$ и (или) $L = l$).

Замкнутая кривая $KklLK$ ограничивает область, содержащую аффинную кривую AB и отрезок AB аффинной прямой S . Этой области соответствует на сфере область X .

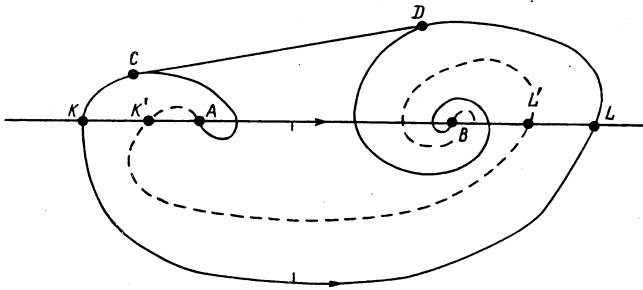
Второму криволинейному отрезку AB подобным образом соответствует область X' . Легко видеть, что одна из областей X , X' содержит другую.

В самом деле, область прилегает к аффинной прямой вдоль отрезка (для X это kl) с той стороны, где находится выпуклая дуга KL . Назовем соответствующее полушарие *южным*, а кривую KL — *южной кривой*.

Лемма. *Южное полушарие одно и то же для обоих отрезков, на которых точки перегиба A и B делят исходную кривую.*

Доказательство. Это полушарие лежит по ту сторону отрезка AB на экваторе, для которой репер (направление от A к B ; направление внутрь полусферы) ориентирует сферу противоположно реперу (направление криволинейного отрезка AB ; направление в сторону его центра кривизны на сфере).

*Автор благодарит М. З. Шапиро и В. Д. Седых, обнаруживших и исправивших ошибку в его первоначальном доказательстве этой леммы.

Рис. 5. Южные кривые KL и $K'L'$.

Но ориентации сферы, заданные обоими выпуклыми отрезками AB и направлениями на их центры кривизны на сфере, одинаковы (вблизи точки A , а значит и всюду). Поэтому одинаковы и „южные“ полушария. Лемма доказана.

Южные дуги KL одной и $K'L'$ другой выпуклой оболочки обе лежат на южной полусфере. Они не пересекаются, так как исходная кривая на сфере несамопересекающаяся. Следовательно, пары (K, L) и (K', L') на экваторе не перемежаются. Значит, одна из коротких дуг экватора, скажем KL , содержит другую, $K'L'$. Из этого следует, что весь выпуклый криволинейный отрезок AB , содержащий точки K' и L' , лежит внутри сферической выпуклой оболочки $KLDC$ (на рис. 5 этот отрезок изображен пунктирной линией).

Доказательство того (геометрически достаточно очевидного из рис. 5) факта, что пунктирная кривая AB не может выходить за пределы выпуклой оболочки $CKLD$, проводится методами работы [8] и здесь подробно проводиться не будет.

Из этого факта следует, что и сферическая выпуклая оболочка пунктирной кривой лежит внутри выпуклой оболочки кривой $ACKLDB$. Основная лемма доказана, а с ней и теорема 3, а значит и теорема 2.

§8. Фронты с двумя точками перегиба

Лежандровы кривые, далекие от окружностей стандартного цилиндра, спроектированные на цилиндр $\{\varphi, z\}$ и затем на сферу, уже не будут ни графиками функций $z = K(\varphi)$, ни гладкими кривыми на сфере.

Эти проекции (для лежандровых кривых общего положения) имеют особенности фронтов общего положения — точки самопересечения и точки возврата полукубического типа. При этом касательные ветвей, как в обычных точках, так и в точках самопересечения и возврата, не „вертикальны“: на них $d\varphi \neq 0$.

Возникает вопрос, сколько точек перегиба обязан иметь фронт, имеющий наибольшее число точек перегиба в семействе фронтов на сфере, соединяющем малую параллель с центром в южном полюсе с малой параллелью с центром в северном полюсе. В случае семейства общего положения все эти фронты коориентированы направлением меридиана от южного полюса к северному.

Фронты семейства зависят от одного параметра и при его изменении они испытывают стандартные перестройки (а именно квадратичные самокасания, тройные самопересечения с разделенными касательными, трансверсальные прохождения одной ветви фронта через точку возврата другой и, наконец, рождение или смерть пары точек возврата).

Следующий пример показывает, что всем этим условиям можно удовлетворить в семействах фронтов, никакой из которых не имеет больше двух точек перегиба.

Вначале построим кривую семейства, делящую площадь сферы пополам. Она будет несамопересекающейся и сама по себе доставляет контрпример к попытке обобщения теоремы 2 на кривые с особенностями.

Рассмотрим на экваторе сферы (рис. 6) две антиподальные точки A и A' . Точка A будет точкой перегиба нашего фронта. Отрезки фронта выпуклы вплоть до точек возврата B (где касательная к фронту становится горизонтальной, т. е. касается параллели $Z = -1/2$) и C (где фронт касается параллели $Z = 1/2$), причем координата φ на интервале BAC монотонно растет.

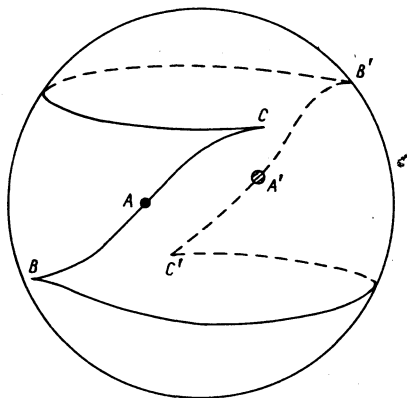


Рис. 6. Фронт с двумя точками перегиба, делящий площадь сферы пополам.

Отрезок $B'A'C'$ получен из BAC центральной симметрией. Симметричные друг другу отрезки CD' и $C'B$ близки к параллелям $Z = 1/2$ и $Z = -1/2$. На отрезке AC радиус кривизны на сфере направлен в южную сторону, а на BA — в северную. Таким образом, A и A' — единственные точки перегиба.

Включим построенную кривую в семейство фронтов, интерполирующее параллель, близкую к южному полюсу, в параллель, близкую к северному полюсу. С этой целью продеформируем построенную кривую к южному полюсу (деформация к северному полюсу получается симметрией).

Вначале заставим дуги BC и $B'C'$ двигаться, вращаясь вокруг вертикальной оси сферы, как твердые тела, навстречу друг другу, сокращая длину „параллели“ $B'C$ (и растягивая „параллель“ $C'B$). Точкам B и C' в некоторый момент придется

пройти друг сквозь друга, причем касательные совпадут (от этой перестройки не общего положения можно избавиться малой деформацией конструкции). После этого возникнет две точки самопересечения фронта. Затем верхняя точка самопересечения, X , будет подниматься вдоль BA и $C'A'$. После того, как она пройдет через точки перегиба A и A' , мы прекратим вращение дуг (рис. 7).

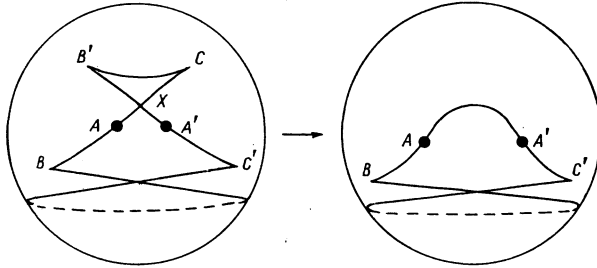


Рис. 7. Стягивание дуги $B'C$.

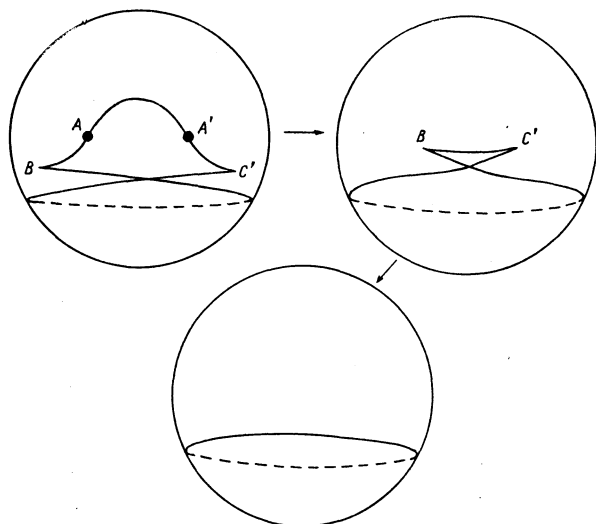
Следующий шаг состоит в уничтожении треугольника $XB'C$ (смерть двух точек возврата B' и C'). После этого получится кривая всего с двумя точками возврата B и C' и по-прежнему с двумя точками перегиба A и A' . Эти две точки перегиба можно совместно уничтожить гладкой деформацией (рис. 8) дуги BC' . Оставшиеся две точки возврата умирают вместе с нижней точкой самопересечения фронта. Возникает фронт, близкий к параллели $Z = -1/2$, который легко стянуть к южному полюсу.

Замечание. В процессе перестроек, описанных выше, фронты в некоторый момент испытывали самокасание. Соответствующие лежандровы кривые самопересекаются, т.е. не вложены, как для стандартного лежандрова цилиндра, а лишь иммерсированы в $ST^*\mathbb{R}^2$.

Поэтому не исключено, что четыре точки возврата фронта на плоскости неизбежны, если все фронты семейства, соединяющего стягивающийся неособый замкнутый фронт с расширяющимся, не имеют самокасааний. Это свойство выполнено, например, в случае, когда возмущенный цилиндр, как и стандартный, вложен в $ST^*\mathbb{R}^2$.

В частности, интересен случай, когда этот возмущенный цилиндр соединяется со стандартным регулярной гомотопией, при которой цилиндр все время остается вложенным и расслоенным на замкнутые лежандровы кривые. Для этого достаточно, например, чтобы возмущенный цилиндр можно было получить из стандартного цилиндра действием контактоморфизма, соединенного с тождественным контактоморфизмом гладким путем в группе контактоморфизмов пространства $ST^*\mathbb{R}^2$ на себя, отличных от тождественного преобразования лишь в компактных областях.

Однако даже в этом частном случае неизбежность четырех точек возврата на выворачивающемся наизнанку фронте не доказана.

Рис. 8. Стягивание дуги BC' .

Список литературы

- [1] Arnold V. I., *Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique*, C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 3719–3722.
- [2] Arnold V. I., *Sur les propriétés topologiques des projections lagrangiennes en géométrie symplectique des caustiques*, Cahiers de Mathématiques de la décision, Ceremade, 9320, 14/6/93, 1–9.
- [3] Conley C., Zehnder E., *The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. **73** (1983), 33–49.
- [4] Floer A., *Proof of the Arnold conjecture and generalizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J. **53** (1986), 1–32.
- [5] Табачников С. Л., *Вокруг четырех вершин*, Успехи мат. наук **45** (1990), № 1, 191–192.
- [6] Arnold V. I., *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*, Preprint: Forschungsinstitut für Mathematik, ETH Zürich, May 1993, To appear in: Adv. Sov. Math., AMS, Providence, 1994.
- [7] Арнольд В. И., *Инварианты и перестройки фронтов на плоскости*, Тр. МИРАН, М., 1994.
- [8] Арнольд В. И., *Разветвленное накрытие $CP^2 \rightarrow S^4$, гиперболичность и проективная топология*, Сиб. мат. журн. **29** (1988), № 5, 36–47.
- [9] Givental A. B., *A symplectic fixed point theorem for toric manifolds*, Progress in Math., Floer memorial volume, Birkhäuser, to appear, 1994.

Поступило 24 декабря 1993 г.