



Общероссийский математический портал

И. В. Артамкин, Ю. А. Левицкая, Г. Б. Шабат, Штребелевы дифференциалы на семействах гиперэллиптических кривых, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2007, том 13, выпуск 6, 121–130

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

26 марта 2025 г., 00:01:50



# Штребелевы дифференциалы на семействах гиперэллиптических кривых

**И. В. АРТАМКИН**

*Московский государственный институт  
радиотехники, электроники и автоматики*

**Ю. А. ЛЕВИЦКАЯ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

**Г. Б. ШАБАТ**

*Российский государственный гуманитарный университет*

УДК 512.7+515.162

**Ключевые слова:** штребелевы дифференциалы, гиперэллиптические кривые.

## Аннотация

Работа посвящена построению штребелевых пар на семействах гиперэллиптических кривых. Дано полное доказательство штребелевости построенных дифференциалов и указана связь введённых конструкций с традиционными объектами комплексной алгебраической геометрии.

## Abstract

*I. V. Artamkin, Yu. A. Levitskaya, G. B. Shabat, Strebel differentials on families of hyperelliptic curves, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 121–130.*

Our paper is devoted to Strebel pairs on families of hyperelliptic curves. We provide a complete proof of the fact that constructed differentials are Strebel and point out the connections between the introduced constructions and classical objects of complex algebraic geometry.

## 1. Введение

Работа посвящена штребелевым парам (по аналогии с *парами Белого* мы называем *штребелевыми парами* пары, состоящие из римановой поверхности и штребелева дифференциала на ней) на семействах гиперэллиптических кривых. Эти семейства построены в работе [2], где приводится и набросок доказательства их штребелевости. В настоящей работе мы даём полное доказательство и указываем на связь наших конструкций с традиционными объектами комплексной алгебраической геометрии.

Квадратичные дифференциалы на римановых поверхностях могут рассматриваться как комплексно-аналитические аналоги римановых метрик. Эту аналогию

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2007, том 13, № 6, с. 121–130.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

можно понимать буквально: если квадратичный дифференциал в области действия некоторой локальной координаты  $z$  имеет вид  $f(dz)^2$ , то в этой же области корректно определена метрика  $ds^2 = |f| dz d\bar{z}$ , являющаяся римановой вне нулей и полюсов дифференциала; определён также элемент площади  $-i dz \wedge d\bar{z}$ . Однако более интересен подход, связанный с рассмотрением *всех* метрик на данной римановой поверхности. Он может быть сопоставлен с развившейся в последние десятилетия XX века физической *теорией струн*. Легко формулируются вариационные задачи, аналогичные задачам теории струн; при этом бесконечномерное и труднодоступное пространство метрик на данной поверхности заменяется на конечномерные пространства квадратичных дифференциалов с контролируемыми особенностями.

Одна из таких задач была поставлена и решена математиками задолго до появления теории струн. Эта задача ставится следующим образом (см. [7]). Пусть задана риманова поверхность, и пусть некоторым гомологическим классам простых замкнутых кривых на ней приписаны положительные вещественные числа. Рассмотрим множество регулярных квадратичных дифференциалов, в метриках которых любые замкнутые кривые выделенных гомологических классов не короче соответствующих чисел. Требуется найти в этом множестве дифференциал, определяющий наименьшую площадь всей поверхности. Решение этой задачи доставляется *штребелевыми* дифференциалами (более распространённое определение приведено ниже).

Сформулированная задача, как и несколько аналогичных ей, полностью решена в работах Тайхмюллера, Дженкинса, Штребеля и др. Однако все эти решения получены в рамках теоретико-функциональных подходов и являются *теоремами существования*. Алгебро-геометрическая и арифметическая природа получаемых штребелевых дифференциалов не рассматривалась, нетривиальные примеры не приводились; вероятно, первый конкретный пример был построен Н. Я. Амбург в [1] (построенная ей пара была определена над квадратичным полем  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ).

## 2. Определения и предварительные сведения

Пусть  $X$  — компактная риманова поверхность рода  $g$ . Обозначим буквой  $\Omega$  пучок голоморфных 1-форм на  $X$ .

**Определение 2.1.** *Квадратичный дифференциал*  $\eta$  на  $X$  — это сечение тензорного квадрата  $\Omega^{\otimes 2}$  кокасательного расслоения  $X$ .

Иначе говоря, если в некоторой области  $U$  поверхности  $X$  выбрана локальная координата  $z: U \hookrightarrow \mathbb{C}$ , то квадратичный дифференциал в этой области имеет вид  $\eta = f(dz)^2$ , где  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция. Если  $z_1: U_1 \hookrightarrow \mathbb{C}$  — другая локальная координата, то на  $U_1$  дифференциал имеет вид  $\eta = f_1(dz_1)^2$ , причём на  $U \cap U_1$  функции  $f$  и  $f_1$  связаны соотношением  $f = f_1 \cdot \left(\frac{dz_1}{dz}\right)^2$ .

**Утверждение 2.2 [3].** Любой ненулевой голоморфный квадратичный дифференциал на поверхности рода  $g$  имеет с учётом кратности  $4g - 4$  нуля.

Фиксируем на поверхности  $X$  точку  $P_0$ , в которой квадратичный дифференциал  $\eta$  не обращается в ноль. Пусть точка  $P \in X$  и гладкий путь, соединяющий  $P_0$  и  $P$ , также лежат вне множества нулей дифференциала  $\eta$ . Тогда можно выбрать одно из двух значений определённого в окрестности пути абелева дифференциала  $\sqrt{\eta}$  и рассмотреть функцию  $I(P) := \int_{P_0}^P \sqrt{\eta}$ . Эта функция определена локально, с точностью до знака и аддитивной константы, однако слоение, задаваемое линиями уровня её мнимой части  $\text{Im } I(P)$ , глобально определено на  $X$  вне множества нулей дифференциала  $\eta$ . Это слоение называется *горизонтальным слоением*, определённым квадратичным дифференциалом  $\eta$ .

**Определение 2.3.** *Горизонтальным слоем*, определённым квадратичным дифференциалом  $\eta$ , называется любой слой соответствующего горизонтального слоения.

Горизонтальные слои выходят из  $k$ -кратного нуля квадратичного дифференциала в  $k + 2$  направлениях. Вне нулей квадратичного дифференциала горизонтальные траектории локально выглядят как непересекающиеся замкнутые кривые.

**Определение 2.4.** *Сепаратрисой* (или критической кривой) называется горизонтальная кривая, один из концов которой является нулём дифференциала.

**Определение 2.5.** Квадратичный дифференциал  $\eta$  называется *штребелевым*, если объединение его сепаратрис и нулей компактно.

**Определение 2.6.** *Штребелевой парой* называется пара  $(X, \eta)$ , состоящая из поверхности  $X$  и штребелева дифференциала  $\eta$  на ней.

В случае штребелева дифференциала сепаратрисы начинаются и заканчиваются в нулях дифференциала. Поэтому можно говорить о *критическом графе* (или *графе сепаратрис*) штребелева дифференциала.

Штребелев дифференциал  $\eta$  задаёт на поверхности  $X$  «почти риманову» метрику следующим образом: если  $U$  — некоторая область на  $X$ , в которой штребелев дифференциал имеет вид  $\eta|_U = f(dz)^2$ , то метрика в этой области задаётся формулой  $ds^2|_U = |f| dz d\bar{z}$ . Эта метрика является римановой везде, кроме нулей дифференциала  $\eta$ .

**Утверждение 2.7 [7].** Сепаратрисы штребелева дифференциала в метрике, задаваемой штребелевым дифференциалом, разбивают поверхность на прямые метрические цилиндры.

Из этого утверждения следует, что на дополнении в  $X$  к множеству нулей и сепаратрис дифференциала можно задать набор карт, в каждой из которых можно выбрать такую локальную координату  $z$ , что штребелев дифференциал имеет вид  $(dz)^2$ .

### 3. Конструкция семейства штробелевых пар

Обозначим для  $p \in \mathbb{R}$  через  $\check{X}_p$  аффинную кривую (как это принято в современной литературе, кривую над полем комплексных чисел мы иногда называем *кривой*, а иногда — *римановой поверхностью*) рода  $g$ , задаваемую уравнением

$$y^2 = x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1,$$

а через  $X_p$  — её полную гладкую модель. Рассмотрим на этой кривой квадратичный дифференциал

$$\eta = x^{g-1} \left( \frac{dx}{y} \right)^2 = \frac{x^{g-1}(dx)^2}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}.$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $g$  — чётное натуральное число. Для любого  $p \in \mathbb{R}$  квадратичный дифференциал  $\eta = x^{g-1} \left( \frac{dx}{y} \right)^2$  является штробелевым на поверхности  $X_p$ .

**Доказательство.** Воспользуемся следующим критерием штробелевости дифференциала.

**Лемма 3.2.** Пусть на поверхности  $X$  задан квадратичный дифференциал  $\eta$  с множеством нулей  $\{A_1, \dots, A_n\}$  кратностей  $k_1, \dots, k_n$ . Пусть на этой поверхности дана конечная система таких начинающихся и кончающихся в нулях дифференциала непересекающихся гладких вещественных кривых, что все интегралы  $\int \sqrt{\eta}$  вещественны вдоль этих кривых (точнее,  $\text{Im} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\eta} = 0$  для любого отрезка  $[x_1; x_2]$  такой кривой). Пусть из каждого нуля  $A_i$  выходят ровно  $k_i + 2$  таких кривых. Тогда дифференциал  $\eta$  штробелев.

**Доказательство.** По существу, эта лемма является лишь переформулировкой определений. Действительно, из вещественности написанных интегралов следует, что данные кривые являются горизонтальными слоями дифференциала. Из того, что они начинаются и заканчиваются в его нулях, следует, что это сепаратрисы. Так как из нуля порядка  $k$  выходят ровно  $k + 2$  сепаратрисы, других сепаратрис нет. Следовательно, всё представленное семейство является в точности множеством сепаратрис дифференциала, поэтому это множество компактно и дифференциал штробелев.  $\square$

Введём некоторые обозначения. Обозначим через  $C_{\pm}$  «бесконечные» точки кривой  $\check{X}_p$ , т. е. такие точки, что  $\check{X}_p = X_p \setminus \{C_{\pm}\}$ . Введём также точки  $A_{\pm}$ , определяемые равенствами  $x(A_{\pm}) = 0$ ,  $y(A_{\pm}) = \pm i$ . Тогда  $x$  — рациональная функция на  $X_p$  с полюсами в  $C_{\pm}$  и нулями  $A_{\pm}$ .

Корнями функции  $f(x) := y^2 = x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$  будут две серии по  $g + 1$  комплексному числу, составляющие множество  ${}^{g+1}\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}$ .

**Утверждение 3.3.** Дифференциал  $\eta$  регулярен и имеет четыре нуля в точках  $A_{\pm}$  и  $C_{\pm}$  порядков  $g - 1$ . Имеет место дивизориальное соотношение

$$(\eta) = (g - 1)(A_+ + A_- + C_+ + C_-).$$

**Доказательство.** Нужно проверить регулярность дифференциала  $\eta$  в корнях многочлена  $x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$  и на бесконечности.

Для того чтобы проверить регулярность на бесконечности, перейдём в карты в окрестностях  $C_{\pm}$  с локальной координатой  $z := \frac{1}{x}$ . В этой координате

$$\eta = \frac{(\frac{1}{z})^{g-1} (d\frac{1}{z})^2}{(\frac{1}{z})^{2g+2} - 2p(\frac{1}{z})^{g+1} - 1} = \frac{z^{g+3} (dz)^2}{(1 - 2pz^{g+1} - z^{2g+2})z^4} = \frac{z^{g-1} (dz)^2}{1 - 2pz^{g+1} - z^{2g+2}}.$$

Отсюда следует, что дифференциал в обеих бесконечных точках регулярен и, более того, имеет ноль порядка  $g - 1$ .

В окрестностях нулей многочлена  $x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$  можно взять локальную координату  $y$ . Можно проверить, что в этой координате дифференциал имеет вид

$$\eta = \frac{2}{g+1} (y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} (dy)^2.$$

Следовательно, и в точках, в которых  $y = 0$ , дифференциал  $\eta$  регулярен.

Поскольку регулярный квадратичный дифференциал имеет на поверхности рода  $g$  с учётом кратности  $4g - 4$  нуля, а мы уже указали 4 нуля дифференциала  $\eta$  кратности  $g - 1$ , других нулей у него нет. Поэтому верны выписанные дивизориальные соотношения. Утверждение доказано.  $\square$

Задание поверхности уравнением  $y^2 = f(x)$  определяет двулистное накрытие римановой сферы  $X_p \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : (x, y) \mapsto x$ , разветвлённое в корнях многочлена  $f$  (ветвления на бесконечности нет, так как  $f$  имеет чётную степень. Это позволяет отождествить поверхность с двумя «листами» комплексной плоскости, склеенными так, что при однократном обходе любой из точек ветвления мы попадаем на другой лист.

Рассмотрим на  $x$ -плоскости лучи

$$L_k := \left\{ x \in \mathbb{C} \mid x = te^{\frac{2i\pi k}{g+1}}, t \in \left[ {}^{g+1}\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} + p}; \infty \right) \right\}$$

и отрезки

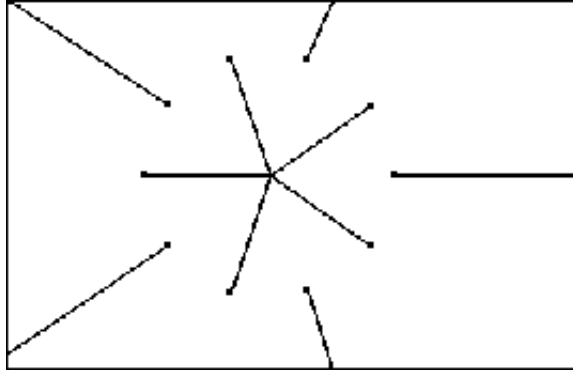
$$M_k := \left[ 0; e^{\frac{i\pi(2k+1)}{g+1}} {}^{g+1}\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} - p} \right]$$

(рис. 1). Наша цель — доказать, что эти множества являются проекциями сепаратрис дифференциала на  $x$ -плоскость.

Проекции сепаратрис нашего квадратичного дифференциала на  $x$ -плоскость суть множества точек  $P \in \mathbb{C}$ , удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{Im} \int_A^P \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}} dx = 0,$$

где  $A$  — один из нулей дифференциала.

Рис. 1. Граф сепаратрис в карте с локальной координатой  $x$ 

**Утверждение 3.4.** Для любого  $k \in \{1, \dots, g+1\}$  и любых  $x_1, x_2 \in L_k$  или  $x_1, x_2 \in M_k$  интегралы

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}} dx$$

вещественны (независимо от выбора ветви корня). Иначе говоря, вещественны интегралы  $\int \sqrt{\eta}$  по любому дугам, проектирующимся в компоненты объединения отрезков  $M_k$  и  $L_k \cup \infty$ .

**Доказательство.** Покажем, что на нужных интервалах эти интегралы в соответствующих координатах представляются интегралами от вещественнозначных функций.

Действительно, точки на отрезках  $M_k$  имеют вид

$$x = te^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{\pi(2k+1)}{g+1}, \quad t \in \left[0; \sqrt[g+1]{\sqrt{p^2+1}-p}\right],$$

а на лучах  $L_k$  — вид

$$x = te^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{2\pi k}{g+1}, \quad t \in \left[\sqrt[g+1]{\sqrt{p^2+1}+p}, \infty\right).$$

Поэтому в первом случае в очевидных обозначениях

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1} e^{(g-1)i\alpha}} e^{i\alpha} dt}{\sqrt{t^{2g+2} e^{(2g+2)i\alpha} - 2pt^{g+1} e^{(g+1)i\alpha} - 1}} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{g+1}{2}i\alpha} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} e^{(2g+2)i\alpha} - 2pt^{g+1} e^{(g+1)i\alpha} - 1}} \stackrel{\frac{g+1}{2}i\alpha = \pi(k+\frac{1}{2})i}{=} \end{aligned}$$

$$= (-1)^k i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} + 2pt^{g+1} - 1}} = (-1)^{k+1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{-t^{2g+2} - 2pt^{g+1} + 1}}.$$

Из того, что квадратный трёхчлен  $-u^2 - 2pu + 1$  имеет корни  $-p \pm \sqrt{p^2 + 1}$ , следует, что при  $u \in [0, -p + \sqrt{p^2 + 1}]$  этот квадратный трёхчлен принимает положительные значения. Так как переменная интегрирования  $t$  лежит на отрезке  $[t_1, t_2]$ , где  $t_1, t_2 \in [0; {}^{g+1}\sqrt{-p + \sqrt{p^2 + 1}}]$ , число  $1 - 2pt^{g+1} - t^{2g+2}$  вещественно и положительно. Поэтому функция под знаком интеграла в пределах интегрирования вещественна.

Во втором случае (на луче  $L_k$ ) интеграл принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{i\pi k} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} - 2pt^{g+1} - 1}} = (-1)^k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} - 2pt^{g+1} - 1}}.$$

Квадратный трёхчлен  $u^2 - 2pu - 1$  имеет корни  $p \pm \sqrt{p^2 + 1}$  и при  $u \in [p + \sqrt{p^2 + 1}, \infty)$  принимает положительные значения. Так как переменная интегрирования  $t$  лежит на отрезке  $[t_1, t_2]$ , где  $t_1, t_2 \in [{}^{g+1}\sqrt{p + \sqrt{p^2 + 1}}, \infty]$ , число  $t^{2g+2} - 2pt^{g+1} - 1$  вещественно и положительно. Поэтому функция под знаком интеграла в пределах интегрирования вещественна. Утверждение доказано.  $\square$

**Следствие 3.5.** Кривые  $\{P \in X \mid x(P) \in L_k\} \cup \{C_{\pm}\}$  и  $\{P \in X \mid x(P) \in M_k\}$ , где  $k = 1, \dots, g + 1$ , являются сепаратрисами дифференциала  $\eta$ .

**Доказательство.** Это утверждение очевидным образом вытекает из определения сепаратрис и предыдущего утверждения.  $\square$

Поскольку все нули дифференциала  $\eta$  суть  $A_{\pm}$ ,  $C_{\pm}$  и эти нули имеют кратности  $g - 1$ , предъявленная система кривых подпадает под условие леммы. Следовательно, дифференциал  $\eta$  штрелелев.  $\square$

## 4. Параметры цилиндров

Ограничимся случаем чётного рода.

**Утверждение 4.1.** Дополнение в поверхности  $X_p$  чётного рода  $g$  к объединению всех сепаратрис состоит из одного прямого цилиндра в метрике, определённой штрелелевым дифференциалом  $\eta$ . Высота и основание этого цилиндра равны соответственно

$$h = \frac{1}{g+1} \int_0^{\sqrt{p^2+1+p}} \sqrt{\frac{1}{x(1+2px-x^2)}} dx, \quad l = 2 \int_{\sqrt{p^2+1+p}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{x(x^2-2px-1)}} dx.$$



**Доказательство.** Наша поверхность является римановой поверхностью корня  $y = \sqrt{f(x)}$ , её естественная реализация — склейка двух копий римановой сферы  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , разрезанных по описанным выше проекциям сепаратрис.

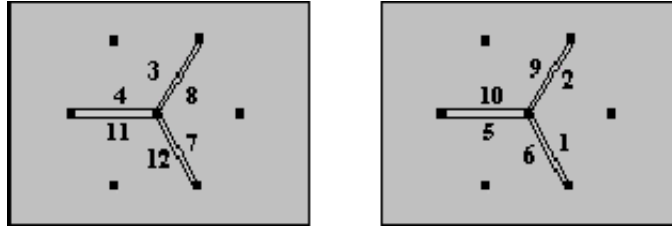


Рис. 2. Граф сепаратрис для рода 2

Пронумеруем отрезки сепаратрис, выходящих из нулей  $A_{\pm}$ , в порядке их следования при разрезании. Горизонтальный слой дифференциала  $\eta$ , проходящий через точку  $x = 1 + \delta$ ,  $y = \varepsilon$ , при малых вещественных параметрах  $\varepsilon, \delta > 0$  будет находиться в малой окрестности пронумерованных сепаратрис в порядке возрастания номеров. Эти горизонтальные слои при  $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$  будут стремиться к одному из оснований цилиндра. Второе основание будут составлять разрезы по сепаратрисам, соединяющим нули  $C_{\pm}$ .

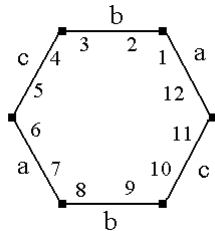


Рис. 3. Компонента связности графа сепаратрис

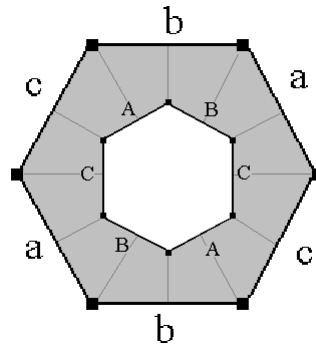


Рис. 4. Цилиндры для рода 2

Высоту этого цилиндра будет составлять вертикальное слоение дифференциала; это понятие определяется так же, как горизонтальное, с заменой  $\text{Im}$  на  $\text{Re}$ . Кривая на поверхности, проектирующаяся в отрезок  $N := [0; \sqrt[2g+1]{\sqrt{p^2 + 1} + p}]$ , является вертикальным слоем дифференциала  $\eta$ . Действительно, для  $x_1, x_2 \in N$  имеем

$$\text{Im} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-\eta} = \text{Im} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{1 + 2px^{g+1} - x^{2g+2}}} dx = 0,$$

так как на  $N$  подынтегральное выражение вещественно. Поскольку указанная кривая (образ отрезка  $N$ ) соединяет основания цилиндра, в силу ортогональности горизонтальных и вертикальных слоёв она является его высотой.

Высота  $h$  получившегося цилиндра равна

$$h = \int_0^{g+1\sqrt{p^2+1+p}} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{1+2px^{g+1}-x^{2g+2}}} dx,$$

поскольку подкоренное выражения принимает на рассматриваемом промежутке лишь положительные вещественные значения. Аналогично для основания:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{k=1}^{g+1} \int_{L_k} \sqrt{\eta} = \sum_{k=1}^{g+1} \int_{L_k} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2}-2px^{g+1}-1}} dx = \\ &= (g+1) \int_{g+1\sqrt{q+p}}^{\infty} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2}-2px^{g+1}-1}} dx. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.  $\square$

## 5. Заключительные замечания

1. Интегралы  $\int \sqrt{\eta}$  вдоль сепаратрис выглядят как несколько неклассические объекты. Однако они превращаются в обычные абелевы интегралы первого рода при переходе к *римановой поверхности корня из квадратичного дифференциала*, введённой в [6] как подмножество кокасательного расслоения  $T^*X_p$ , определённое соотношением  $\{\omega \mid \omega^2 = \eta\}$ . В данном случае эта риманова поверхность, которую мы обозначим  $X_p[\sqrt{\eta}]$ , может быть задана уравнением

$$v^2 = u^{4g+4} - 2pu^{2g+2} - 1,$$

а проекция  $\pi: X_p[\sqrt{\eta}] \rightarrow X_p$  определяется соотношениями  $\pi^*x = u^2$ ,  $\pi^*y = v$ ; при этом  $\pi^*\eta = (2u^g \frac{du}{v})^2$ .

2. Замена  $\lambda = x^g$  сводит приведённые выше значения высоты и длины цилиндра к периодам эллиптической кривой, определяемой уравнением

$$\mu^2 = \lambda(\lambda^2 - 2p\lambda - 1).$$

Замена  $z := u^{g+1}$  определяет накрытие кривой  $X_p[\sqrt{\eta}]$  другой эллиптической кривой, определяемой уравнением

$$v^2 = z^4 - 2pz^2 - 1.$$

Соотношения  $\lambda = z^2$ ,  $\mu = vz$  определяют 2-изогению этих двух эллиптических кривых.

## Литература

- [1] Амбург Н. Я. Пример регулярного штробелева дифференциала // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 5. — С. 149.
- [2] Артамкин И. В., Левицкая Ю. А., Шабат Г. Б. Примеры семейств штробелевых дифференциалов на гиперэллиптических кривых. — В печати.
- [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982.
- [4] Шабат Г. Б. Комплексный анализ и детские рисунки // Комплексный анализ в современной математике. — М.: Мир, 2001. — С. 253–264.
- [5] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.
- [6] Douady A., Hubbard J. On the density of Strebel differentials // Invent. Math. — 1975. — Vol. 30. — P. 175–179.
- [7] Strebel K. Quadratic Differentials. — Berlin: Springer, 1984.