



Общероссийский математический портал

А. Н. Хайкин, Слабо градуированные аналоги леммы Гаусса и критерия Эйзенштейна, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 813–816

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

23 марта 2025 г., 08:16:08



# Слабо градуированные аналоги леммы Гаусса и критерия Эйзенштейна

А. Н. ХАЙКИН

**Ключевые слова:** критерий Эйзенштейна, градуированные кольца, кольца с дифференцированиями.

## Аннотация

Данная работа является продолжением цикла работ, посвященных общим формам леммы Гаусса и критерия Эйзенштейна. Так, в работах [1] и [2] даны формулировки для колец с дифференцированием, а в [3] — для  $Z$ - и  $Z^+$ -градуированных колец. В данной работе рассматриваются  $Z^+$ -слабо градуированные кольца, включающие в себя два предыдущих класса колец. Теорема 1 является аналогом критерия Эйзенштейна, теорема 2 — аналог леммы Гаусса, следствие из них — некоторое улучшение основного результата статьи Ковачича [1]. В теореме 3 показана частичная необходимость некоторых достаточных условий, предложенных в работе.

## Abstract

*A. N. Khaikin, Weak graded analogues of Gauss lemma and Eisenstein criterion, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* **1**(1995), 813–816.

This paper continues a series of investigations, devoted to generalized forms of Gauss lemma and Eisenstein criterion. Thus in papers [1] and [2] statements for rings with derivations are given, and in [3] those for  $Z$ - and  $Z^+$ -graded rings. In this paper  $Z^+$ -weak graded rings (which include two previous classes) are considered. Theorem 1 is an analog of Eisenstein criterion, theorem 2 is an analog of Gauss lemma. Some improvement of the result of Kovachich [1] follows from these theorems. Partial necessity of some sufficient conditions introduced in the paper has been demonstrated in theorem 3.

*Определение.* Кольцо  $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$  называется  $Z^+$ -слабо градуированным, если для умножения однородных элементов выполняется следующее условие:

$$a_t b_s = c_0 + \dots + c_{t+s}, \quad \text{где } a_t \in A_t, b_s \in A_s, c_i \in A_i.$$

Параллельно рассмотрим  $Z^+$ -градуированное кольцо  $A^*$ , состоящее из элементов кольца  $A$  со следующим умножением на однородных элементах  $a_t \in A_t$ ,  $b_s \in A_s$ :  $a_t * b_s = c_{t+s}$ , где  $c_{t+s}$  — однородный элемент из  $A_{t+s}$  в разложении  $a_t b_s$ . Если рассмотреть каноническую фильтрацию кольца  $A$  ( $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ , где  $A^n = \bigoplus_{k=0}^n A_k$ ), то кольцо  $A^*$  изоморфно ассоциированному с данной фильтрацией градуированному кольцу.

*Определение.* Назовем идеал  $I$  однородным в  $A$ , если из того, что

$$a = a_0 + \dots + a_n \in I \quad (a_i \in A_i),$$

следует, что  $a_i \in I$  для всех  $i$ .

Из определения следует, что если  $I$  — однородный идеал в  $A$ , то  $I$  — однородный идеал в  $A^*$ .

*Определение.* Элемент  $L \in A$  называется неразложимым, если из того, что  $L = MN$ , следует, что или  $M$ , или  $N$  лежат в  $A_0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A^*$  — целостное,  $I$  — однородный идеал в  $A$ ,  $I$  — вполне первичный идеал в  $A^*$ . Элемент  $L = c_0 + \dots + c_l \in A$ . Если  $c_0 \notin I$ ,  $c_i \in I$  ( $i \geq 1$ ),  $c_l \notin I^2$ , то тогда  $L$  неразложим.

**Доказательство.** Допустим, что это не так.

$L = c_0 + \dots + c_l = (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_m) = MN$ .  $l = n + m$ ,  $c_l = a_n * b_m$ . Так как  $I$  — вполне первичный идеал в  $A^*$  и  $c_l \notin I^2$ ,  $c_l \in I$ , то имеем два случая: 1)  $a_n \in I$ ,  $b_m \notin I$ ; 2)  $a_n \notin I$ ,  $b_m \in I$ .

1). Пусть для любого  $i \geq r$   $a_i \in I$ . Так как  $L \notin I$ , то  $M \notin I$ , то есть  $r > 0$ . Рассмотрим  $c_{m+r-1} = \mathfrak{J}_{m+r-1} \left( \sum_{i+k \geq m+r-1} a_i b_k \right) \in I$ , где  $\mathfrak{J}_{m+r-1}$  — проекция на  $A_{m+r-1}$ ,  $i \geq r + (m - 1 - k)$ . Если  $i \geq r$ , то  $a_i \in I \implies a_i b_k \in I \implies \mathfrak{J}_{m+r-1}(a_i b_k) \in I$ .  $i < r$  только тогда, когда  $i = r - 1$ ,  $k = m$ . Следовательно,  $\mathfrak{J}_{m+r-1}(a_{r-1} b_m) = a_{r-1} * b_m \in I$ . Так как  $a_{r-1}, b_m \notin I$ , то имеем противоречие с целостностью  $A^*/I$ .

Случай 2) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Если  $A_0$  лежит в множестве неделителей нуля в  $A$  и удовлетворяет левому условию Оре (т. е. для любых  $a_0 \in A_0$ ,  $M \in A$  существуют такие  $b_0 \in A_0$ ,  $N \in A$ , что  $Na_0 = b_0M$ ), то можно рассмотреть соответствующее кольцо частных  $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$ , где  $B_i = A_0^{-1}A_i$ . Далее, пусть для любых  $a_0 \in A_0$ ,  $a_i \in A_i$  выполняется включение  $a_0 a_i \in A_i$  и для любого необратимого элемента  $a_0 \in A_0$  существует такой необратимый элемент  $c \in A_0$ , что идеал, порожденный  $a_0$ , лежит в  $cA$ . В дальнейшем будем рассматривать такое кольцо  $A$ .

*Определение.* Однородные элементы  $\{a_0, \dots, a_n\}$  называются взаимно простыми, если не существует такого необратимого  $c \in A_0$ , что  $a_i \in cA$  для любого  $i$ .

Рассмотрим условия, которые мы будем накладывать в дальнейшем на кольцо  $A$ .

*Условие 1.* Пусть  $c \in A_0$ ,  $a_k$  и  $b_m$  — однородные элементы. Из взаимной простоты пар  $\{c, a_k\}$  и  $\{c, b_m\}$  следует, что  $\{c, a_k * b_m\}$  взаимно просты.

*Условие 2.* Для любых однородных элементов  $\{a_0, \dots, a_n\}$  существует такой элемент  $c \in A_0$ , что  $a_i \in cb_i$ ,  $\{b_0, \dots, b_n\}$  взаимно просты и  $c$  однозначно определен (с точностью до умножения справа на обратимый элемент).

**Предложение.** Пусть на кольце  $A$  выполнено условие 1)  $c_0 + \dots + c_l = (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_m)$ . Предположим, что  $\{a_0, \dots, a_n\}$  и  $\{b_0, \dots, b_m\}$  взаимно просты. Тогда элементы  $\{c_0, \dots, c_l\}$  взаимно просты.

**Доказательство.** Пусть  $\{c_0, \dots, c_l\} \in aA$ , где  $a \in A_0$  и  $a$  необратим. Пусть  $a_i$  — такой элемент, что  $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}\}$  не взаимно простые, а при добавлении  $a_i$  становятся взаимно простыми. Аналогично пусть  $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}, b_m, \dots, b_{j+1}\}$  не взаимно простые, а при добавлении  $b_j$  становятся взаимно простыми. Тогда  $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}, b_m, \dots, b_{j+1}\} \in cA$ ,  $c \in A_0$ ,  $c$  необратим. Пусть  $e \in A_0$  — такой необратимый элемент, что идеал, порожденный  $c$ , лежит в  $eA$ .

$$c_{i+j} = \mathfrak{J}_{i+j} \left( \sum_{k+t \geq i+j} a_k b_t \right), \quad \text{где } \mathfrak{J}_{i+j} \text{ — проекция на } A_{i+j}.$$

Если  $k > i$ , то  $a_k \in eA$ , поэтому  $a_k b_t \in eA$ , а так как  $eA_{i+j} \in A_{i+j}$ , то  $\mathfrak{J}_{i+j}(a_k b_t) \in eA$ . Если  $t > j$ , то  $b_t \in cA$ , и поэтому  $a_k b_t \in eA$  ( $Ac \subseteq eA$ )  $\implies \mathfrak{J}_{i+j}(a_k b_t) \in eA$ . Так как  $c_{i+j} \in eA$ , то  $\mathfrak{J}_{i+j}(a_i b_j) \in eA$ , то есть  $a_i * b_j \in eA$ . Но  $\{c, a_i\}$  и  $\{c, b_j\}$  взаимно просты, так как добавление  $a_i$  или  $b_j$  в  $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}, b_m, \dots, b_{j+1}\}$  дает взаимно простые наборы. Значит, из условия 1 элементы  $\{c, a_i * b_j\}$  взаимно просты, что приводит в противоречию.

**Теорема 2.** Пусть в кольце  $A$  выполнены условия 1 и 2. Тогда, если элемент  $L \in A$  разложим в  $B$ , то  $L$  разложим и в  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $L = MN$ ,  $M$  и  $N \in B$ . Используя условие 2, можно получить  $L = p^{-1}q\tilde{M}\tilde{N}$ , где  $p, q \in A_0$ ,  $\tilde{M}, \tilde{N} \in A$  и наборы однородных элементов в  $\tilde{M}, \tilde{N}$  взаимно просты. Далее,  $q\tilde{M}\tilde{N} = pL = pt\tilde{L}$  (однородные элементы в  $\tilde{L}$  взаимно просты). По предложению однородные элементы в  $\tilde{M}\tilde{N}$  взаимно просты. То есть  $q = pts$ , где  $s$  обратим (условие 2). Значит,  $L = ts\tilde{M}\tilde{N}$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $R$  — дифференциальная область целостности,  $F$  — ее поле частных.  $\mathbb{D}$  — дифференцирование кольца  $R$ ,  $\mathbb{Q}$  — автоморфизм кольца  $R$ ,  $P$  — простой дифференциальный (инвариантен относительно  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{-1}$ ) идеал  $R$ . Пусть для любого конечнопорожденного идеала локального кольца  $R_p$  существует наименьший главный, содержащий его, и идеал  $PR_p$  главный. Рассмотрим  $R[\mathbb{D}]$ , где  $\mathbb{D}r = \mathbb{Q}(r)\mathbb{D} + \mathbb{D}(r)$  для  $r \in R$  — умножение в  $R[\mathbb{D}]$ .

Пусть элемент  $L = \sum_{i=0}^l c_i \mathbb{D}^i \in R[\mathbb{D}]$  такой, что  $c_i \in P$  ( $i \geq 1$ ),  $c_0 \notin P$ ,  $c_l \notin P^2$ .

Тогда элемент  $L$  неразложим над  $F$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $A = R_p[\mathbb{D}]$  — слабо градуированное кольцо, где  $A_0 = R_p$ ,  $A_i = R_p \mathbb{D}^i$ ,  $B = F[\mathbb{D}]$ . Так как  $PR_p$  — главный идеал, то  $PR_p = xR_p$ . Так как  $P$  — дифференциальный идеал, то  $\mathbb{D}(y) \in xR_p$  и  $\mathbb{Q}(y) \in xR_p$  для любого  $y \in PR_p$ . Таким образом, условие, что для любого необратимого  $c \in A_0$  существует такой необратимый  $d \in A_0$ , что идеал, порожденный  $c$ , лежит в  $dA$ , выполнено.

Также очевидно, что для любого  $c \in A_0$   $cA_i \subseteq A_i$ . Проверим выполнение условия 1. Пусть  $\{a, b\mathbb{D}^n\}$  и  $\{a, c\mathbb{D}^m\}$  — взаимно простые. Так как  $R_p$  — локальное кольцо и  $PR_p$  — главный идеал, то взаимная простота элементов  $\{a, b\mathbb{D}^n\}$  означает, что либо  $a$ , либо  $b$  обратим.

Аналогично, из второго следует, что либо  $a$ , либо  $c$  обратим. Если  $a$  обратим, то  $\{a, b\mathbb{Q}^n(c)\} = R_p$ . Если обратимы  $b$  и  $c$ , то  $b\mathbb{Q}^n(c)$  обратим. Условие 2 следует из того, что для любого конечнопорожденного идеала в  $R_p$  существует наименьший главный, содержащий его. Заметим, что  $I = PR_p[\mathbb{D}]$  — простой однородный идеал в  $A$ . Таким образом, из теоремы 2 следует, что элемент  $L$  разложим над  $F$ , когда  $L$  разложим над  $R_p$ . А из теоремы 1 —  $L$  неразложим над  $R_p$ .

**Теорема 3.** Пусть  $R$  — коммутативная область целостности. Известно, что разложимость многочлена  $D \in R[x]$  над  $R$  равносильна разложимости над полем частных  $F$ . Тогда на  $A = R[x]$  выполнено условие 1 (т. е. из того, что  $\{a, b\}$  и  $\{a, c\}$  взаимно просты, следует, что  $\{a, bc\}$  взаимно просты).

**Доказательство.** Пусть существуют такие  $a, b, c \in R$ , что  $\{a, b\}$  и  $\{a, c\}$  взаимно простые, но  $a = \tilde{a}e$ ,  $bc = \tilde{a}d$ ,  $\tilde{a}$  необратим. Будем считать, что  $\tilde{a} = a$ , тогда  $bc = ad$ . Рассмотрим  $(1 + a^{-1}bx)(a + cx) = a + (b + c)x + dx^2 = L$ . Допустим, что  $L = (a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x)$  разложим над  $R$ . Так как  $F[x]$  — кольцо с единственностью разложения на простые множители, то  $1 + a^{-1}bx = 1 + a_0^{-1}a_1x$ ,  $a + cx = a_0b_0 + a_0b_1x$ . То есть  $ba_0 = aa_1$ ,  $a = a_0b_0$ ,  $c = a_0b_1$ . Так как  $\{a, c\}$  взаимно просты, то  $a_0$  обратим,  $\{a, b\}$  взаимно просты,  $b = aa_1a_0^{-1} \implies a$  обратим. Получили противоречие.

**Следствие.** Пусть  $R$  — коммутативная область целостности. Для любого конечнопорожденного идеала в  $R$  существует наименьший главный идеал, содержащий его. (Выполнено условие 2 на  $A = R[x]$ .) Тогда эквивалентны условия:

- 1) любой  $L \in R[x]$ , разложимый над  $F$ , разложим над  $R$ ;
- 2) из того, что  $\{a, b\}$  и  $\{a, c\}$  взаимно просты, следует, что  $\{a, bc\}$  взаимно просты (т. е. выполнено условие 1 на  $A = R[x]$ ).

## Литература

- [1] Kovačić J. Eisenstein criterion for noncommutative polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 34. — № 1. — P. 25–29.
- [2] Беркович Л. М. Аналог критерия Эйзенштейна для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Межвузовский сборник научных статей. — Куйбышев, 1988. — С. 20–27.
- [3] Бабула В. В. О некоторых обобщениях критерия Эйзенштейна // Укр. мат. журн. — Т. 42. — № 7. — С. 983–985.

Статья поступила в редакцию в январе 1995 г.