Замечание. Нетрудно показать, что каноническое отображение множества классов неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{M}^n_{p,\omega}(\Gamma\,;\Xi)$ на $\operatorname{Prim}(\mathfrak{M}^n_{p,\omega}(\Gamma\,;\Xi))$ — биекция. Следовательно, из теоремы 4 вытекает обобщение доказанной в [5] для $p=2$ теоремы о вычислении спектра C^*-алгебры $\mathfrak{M}^n_{2,\omega}(\Gamma\,;\Xi)$.

4. В заключение сформулируем теорему о классификации рассматриваемых алгебр. Наряду с описанным выше сложным контуром Γ с множеством узловых точек Ξ и весом ω рассмотрим другой, аналогично определяемый, сложный контур Γ' с множеством узловых точек Ξ' и весом ω'.

Теорема 5. *Для того чтобы банаховы алгебры $\mathfrak{M}^n_{p,\omega}(\Gamma\,;\Xi)$ и $\mathfrak{M}^{n'}_{p,\omega'}(\Gamma'\,;\Xi')$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы пары $(\Gamma\,;\Xi)$ и $(\Gamma'\,;\Xi')$ были гомеоморфны и чтобы n равнялось n'.*

Достаточность является простым следствием теоремы о замене переменной в сингулярном интеграле и содержится в [4, с. 30]. Необходимость доказывается при помощи теоремы 4.

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. **2.** *Крупник Н. Я.* Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинев: Штиинца, 1984. **3.** *Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь.* Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нётеровость. – Ростов на Дону: Изд-во РГУ, 1986. **4.** *Roch S., Silbermann B.* Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebra. – Berlin: Akademie Der Wissenschaften der DDR, 1990. **5.** *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* // Изв. вузов. Сер. матем. – 1984. – №4. – С. 37–46. **6.** *Симоненко И. Б.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, №3. – С. 567–586. **7.** *Стукопин В. А.* // Деп. ВИНИТИ №34 В-88; РЖМат. – 1988. – 4Б1129. **8.** *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. – М.: «Наука», 1989.

Ростовский институт сельхозмашиностроения
Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию
15 июля 1992 г.

УДК 519.46

Кратности S_n-модулей и индекс и заряд таблиц

© 1993. И. Ф. Донин

Пусть A и B — косые диаграммы одного и того же порядка n, а T_A и T_B — соответствующие представления симметрической группы S_n (над фиксированным полем характеристики нуль). Существует несколько комбинаторных интерпретаций числа сплетения $\nu(A,B)=\dim\operatorname{Hom}_{S_n}(T_A,T_B)$. Это интерпретации типа правила Литтлвуда–Ричардсона, основанные на комбинаторике диаграмм A и B (см., например, [1, 2, 3]) и интерпретации типа Гельфанда–Зелевинского, где $\nu(A,B)$ представляется как число целых точек некоторого выпуклого многогранника в пространстве схем Гельфанда–Цетлина (ГЦ-схем) (см. [5]). Однако в этих интерпретациях весьма неочевидна симметрия между

A и B, хотя ясно, что $\nu(A, B) = \nu(B, A)$.

В этой работе мы даем новую комбинаторную интерпретацию числа $\nu(A, B)$ как множества целочисленных решений системы линейных неравенств, причем эти неравенства симметричны относительно A и B и равенство $\nu(A, B) = \nu(B, A)$ становится самоочевидным.

Далее оказывается, что отклонения от выполнения этих неравенств можно охарактеризовать числами, которые являются обобщениями индекса и заряда таблицы.

1. Напомним, что заполнением косой диаграммы A называется функция t, определенная на квадратах этой диаграммы, со значениями в множестве натуральных чисел. Будем говорить, что заполнение t имеет форму A. Вес заполнения t — это набор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, где μ_i — число квадратов $x \in A$, таких, что $t(x) = i$. Если B — другая косая диаграмма, то заполнение t назовем B-заполнением диаграммы A, если $\mu_i = l_i(B)$, где $l_i(B)$ равно числу квадратов в i-й строке диаграммы B. Заполнение t называется таблицей, если числа $t(x)$ в диаграмме A не убывают вдоль строк слева направо и строго возрастают вдоль столбцов сверху вниз (см. [1]). Заполнение t формы A назовем B-таблицей, если t является таблицей и B-заполнением одновременно. Если t является B-заполнением диаграммы A, то свяжем с t слово $\omega(t) = a_1 a_2 \dots a_n$, которое образуется при чтении чисел $t(x)$ в A справа налево и сверху вниз. Слово $\omega(t)$ назовем B-решетчатым, если оно состоит из «хороших» элементов a_i. При этом «хорошие» элементы определяются так:

(i) все единицы являются хорошими;
(ii) элемент k хороший, если число хороших элементов, строго предшествующих k и равных k, меньше, чем число предшествующих хороших элементов, равных $k - 1 + d_k$. Здесь d_i, $i \geqslant 2$, — число квадратов i-й строки диаграммы B, расположенных левее первого квадрата $(i-1)$-й строки диаграммы B.

В работе [3] доказаны следующие варианты правила Литтлвуда–Ричардсона.

Предложение 1. *Число $\nu(A, B)$ равно количеству B-таблиц t формы A, удовлетворяющих условию*

(∗) *существует биекция $\varphi\colon B \to A$, такая, что $t(\varphi(x)) = \rho(x)$ для всех $x \in B$ ($\rho(x)$ — номер строки, в которой лежит квадрат x) и для любых $x_1, x_2 \in B$, лежащих в одном столбце, $\rho(x_1) > \rho(x_2) \implies \rho(\varphi(x_1)) > \rho(\varphi(x_2))$.*

Предложение 2. *Число $\nu(A, B)$ равно количеству B-таблиц t формы A, таких, что слово $\omega(t)$ является B-решетчатым.*

Формулировка предложения 2 ближе к классической формулировке правила Литтлвуда–Ричардсона.

2. Предложение 1 связано со следующей явной реализацией пространства $\mathrm{Hom}_{S_n}(T_A, T_B)$ (см. [3, 4]).

Пусть R_A, C_A — подгруппы в группе перестановок квадратов диаграммы A, оставляющих инвариантными соответственно строки и столбцы A.

Назовем две биекции $\varphi, \psi\colon A \to B$ эквивалентными ($\varphi \sim \psi$), если существуют такие элементы $\alpha_A \in R_A$, $\alpha_B \in R_B$, что $\varphi = \alpha_B \psi \alpha_A^{-1}$. Пусть $P(A, B)$ — пространство, натянутое на множество $K(A, B)$ классов эквивалентности биекций из A в B. Будем обозначать через $[\varphi]$ класс эквивалентности, соот-

ветствующий биекции φ. Определим $H(A,B)$ как подпространство в $P(A,B)$, натянутое на элементы вида

$$e_\varphi = \sum_{\beta_A \in C_A, \beta_B \in C_B} [\beta_B \varphi \beta_A^{-1}](-1)^{\widetilde{\beta}_A + \widetilde{\beta}_B},$$

где $\varphi\colon A \to B$ — биекция, а $\widetilde{\beta}_A$ — четность перестановки β_A. Как показано в [3], пространство $H(A,B)$ изоморфно $\mathrm{Hom}_{S_n}(T_A, T_B)$.

Опишем классы эквивалентности из $K(A,B)$. Пусть $\psi, \varphi\colon A \to B$ — биекции. Обозначим через $\varphi(i,j)$ количество квадратов j-й строки диаграммы A, которые переходят в i-ю строку диаграммы B. Ясно, что $\psi \sim \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(i,j) = \psi(i,j)$ для всех i, j. С другой стороны, если дан набор целых чисел $a = \{a_{ij}\}$, такой, что $a_{ij} \geqslant 0$, $\sum_j a_{ij} = l_i(B)$, $\sum_i a_{ij} = l_j(A)$, то он определяет класс биекций $K_a(A,B) = [\varphi]$, где $\varphi(i,j) = a_{ij}$.

Если $\varphi\colon B \to A$ — биекция, то с ней связано B-заполнение t_φ диаграммы A, а именно, если $x \in A$, то в квадрат $x \in A$ вписывается число $p(\varphi^{-1}(x))$. Ясно, что все B-заполнения диаграммы A получаются таким способом. Скажем, что класс $[\varphi]$ является таблицей, если он содержит такую биекцию $\psi\colon B \to A$, что заполнение t_ψ является таблицей. В предложении 1 класс $[\varphi]$ является таблицей. Условие $(*)$ предложения 1 эквивалентно тому, что класс $[\varphi^{-1}] \in K(A,B)$ тоже является таблицей. Это вытекает из следующего элементарного утверждения.

Лемма. *Пусть t — заполнение косой диаграммы A, такое, что числа $t(x)$, $x \in A$, строго возрастают по столбцам сверху вниз. Тогда после упорядочения по возрастанию чисел этого заполнения во всех строках строгое возрастание по столбцам сохранится.*

Пусть диаграмма A представлена как разность двух диаграмм Юнга: $A = \lambda \setminus \overline{\lambda}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p$, $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_{\overline{p}})$, $\overline{\lambda}_1 \geqslant \dots \geqslant \overline{\lambda}_{\overline{p}}$. Пусть $\varphi\colon B \to A$ — биекция. Легко показать, что класс $[\varphi]$ является таблицей, если выполняется система неравенств

$$\overline{\lambda}_i + \sum_{j \leqslant k} \varphi(i,j) \geqslant \overline{\lambda}_{i+1} + \sum_{j \leqslant k+1} \varphi(i+1,j).$$

Из приведенных выше рассмотрений вытекает

Теорема 1. *Пусть $A = \lambda \setminus \overline{\lambda}$, $B = \mu \setminus \overline{\mu}$ — две косые диаграммы порядка n, представленные как разности диаграмм Юнга. Тогда $\dim \mathrm{Hom}_{S_n}(T_A, T_B)$ равно числу целочисленных решений a_{ij} следующей системы:*

$$a_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_j a_{ij} = l_i(A), \quad \sum_i a_{ij} = l_j(B), \tag{1}$$

$$\overline{\lambda}_i + \sum_{j \leqslant k} a_{ij} \geqslant \overline{\lambda}_{i+1} + \sum_{j \leqslant k+1} a_{i+1,j}, \tag{2}$$

$$\overline{\mu}_j + \sum_{i \leqslant k} a_{ij} \geqslant \overline{\mu}_{j+1} + \sum_{i \leqslant k+1} a_{i,j+1} \tag{3}$$

($l_i(A)$ — длина i-й строки диаграммы A).

Пусть в теореме 1 $A = \lambda$ — диаграмма Юнга. Положим $\lambda_i^{(k)} = \sum_{j \leqslant k} a_{ij}$. Если числа a_{ij} удовлетворяют неравенствам (1) и (2), то набор $\{\lambda_i^{(k)}\}$ образует

ГЦ-схему типа λ. Выражая в (3) a_{ij} через $\lambda_i^{(k)}$ получаем правило Гельфанда–Зелевинского [5]. Таким образом, теорема 1 является обобщением этого правила.

3. Пусть $b = (b_1, \dots, b_n)$ — последовательность целых чисел длины n. Определим индекс и заряд формулами

$$\operatorname{ind}(b) = \sum_{b_j \geqslant b_{j+1}} j, \qquad c(b) = \sum_{b_j \geqslant b_{j+1}} (n-j)$$

соответственно. Пусть t — заполнение косой диаграммы A и t_i — последовательность чисел, получающаяся при чтении i-го столбца диаграммы A сверху вниз. Положим $\operatorname{ind}(t) = \sum_i \operatorname{ind}(t_i)$ и $c(t) = \sum_i c(t_i)$. Пусть $a = \{a_{ij}\}$ — набор целых чисел, удовлетворяющих условию (1) теоремы 1. Тогда a определяет классы эквивалентности $K_a(A, B)$, $K_a(B, A)$ биекций $A \to B$ и $B \to A$ соответственно.

Определение. $\operatorname{ind}_a(A, B) = \min_\varphi \operatorname{ind}(t_\varphi)$, $c_a(A, B) = \min_\varphi c(t_\varphi)$, где минимум берется по всем биекциям из класса $K_a(A, B)$.

Если набор a удовлетворяет (2) (соответственно (3)), то $\operatorname{ind}_a(B, A) = 0$ и $c_a(B, A) = 0$ (соответственно $\operatorname{ind}_a(A, B) = 0$ и $c_a(A, B) = 0$).

Таким образом, индекс и заряд можно интерпретировать как степень отклонения от неравенств (2) и (3).

Теорема 2. *Пусть B — диаграмма Юнга и $K_a(B, A)$ — класс, содержащий таблицу. Тогда $c_a(A, B)$ совпадает с зарядом этой таблицы, определенным в* [1].

Литература

1. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. – М.: Мир, 1985. **2.** *Zelevinsky A. V.* // J. Algebra. – 1981. – V. 69, No. 1. – P. 82–94. **3.** *Donin I. F.* // Seminar on supermanifolds, Univ. of Stockholm. – 1988. – No. 3. – P. 1–38. **4.** *Донин И. Ф.* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 303, №6. – С. 1296–1301. **5.** *Гельфанд И. М., Зелевинский А. В.* Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1986, Т. 2. – С. 22–31.

Факультет математики,
Университет Бар-Илан, Израиль

Поступило в редакцию
18 ноября 1991 г.

УДК 513.881

О блочных пространствах Кёте, в которых образ каждого непрерывного оператора имеет базис

© 1993. В. П. Кондаков

В заметке [1] был выделен класс $\mathcal{N}$ пространств Кёте–Фреше, в которых произвольный линейный оператор допускает представление в виде

$$T = J + K, \tag{1}$$

где матрица оператора J в основном базисе может иметь отличные от нуля