А. Н. Скиба, Характеризации конечных метанильпотентных групп,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 345–351

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ МЕТАНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А. Н. Скиба

Как отмечено в обзоре [1], несмотря на большое число работ по теории формаций, сравнительно мало исследований посвящено изучению свойств собственно самих формаций. В этой связи интересен результат П. Неймана [2] о том, что всякая подформация формации всех конечных нильпотентных групп замкнута относительно подгрупп. Л. А. Шеметков предложил автору рассмотреть следующую обратную задачу: какова (локальная) формация $\mathfrak{F}$, у которой каждая (локальная) подформация замкнута относительно подгрупп. Этой задаче посвящена настоящая работа. Мы дадим характеризации конечных метанильпотентных групп и покажем, что отмеченный результат П. Неймана допускает обращение.

В обозначениях и определениях будем следовать обзорам [1], [3] и монографии [4]. Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что пересечение всех (локальных) формаций, содержащих некоторое множество групп $\mathfrak{X}$, называют (локальной) формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. В дальнейшем будем обозначать через $\mathrm{form}\ \mathfrak{X}$ формацию, а через $\mathrm{lform}\ \mathfrak{X}$ локальную формацию, порожденную множеством $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется S-замкнутой (S_n-замкнутой), если $\mathfrak{F}$ замкнута относительно подгрупп (соответственно относительно инвариантных подгрупп). Группу G назовем l-формационно критической, если G не принадлежит локальной формации, порожденной всеми теми ее собственными (т. е. не изоморфными G) секциями, которые содержатся в $\mathrm{lform}\ G$.

Краткое содержание работы опубликовано в [5].

ЛЕММА 1. *Пусть A — некоторая группа операторов группы G и G имеет инвариантные A-допустимые подгруппы $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Тогда каждый A-композиционный фактор из $G / \bigcap_{i=1}^{r} N_i$ A-изоморфен некоторому A-композиционному фактору хотя бы одной из фактор-групп G/N_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.*

Доказательство проведем индукцией по r. Пусть $N_0 = \bigcap_{i=1}^{r-1} N_i$. Так как

$$G/N_0 \simeq (G/N_0 \cap N_r)/(N_0/N_0 \cap N_r),$$

то каждый A-композиционный фактор группы $G/N_0 \cap N_r$ является таковым либо для группы $N_0/N_0 \cap N_r \simeq \simeq N_0N_r/N_r$ и, значит, для G/N_r, либо для группы G/N_0 и, значит, для некоторой G/N_i, $i = 1, \ldots, r - 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть ступенчатая формация (ступенчатая формация разрешимых групп) $\mathfrak{F}$ имеет экран $\mathfrak{f}$. Формация $\mathfrak{F}$ является S-замкнутой (соответственно S_n-замкнутой), если S-замкнуты (соответственно S_n-замкнуты) все непустые формации, являющиеся значениями экрана $\mathfrak{f}$).*

Доказательство получается почти дословным повторением доказательства теоремы 4.7 из [4].

ЛЕММА 3. *Пусть H — группа типа A с инвариантной силовской q-подгруппой H_q. Пусть $G = PrH$ — регулярное сплетение группы P простого порядка p с H, причем $p \neq q$. Тогда формация* lform G *не является S_n-замкнутой.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна и формация lform G S_n-замкнута. Возьмем такой локальный экран $\mathfrak{f}$ формации lform G, что $\mathfrak{f}(p) = = \text{form}\,(G/F_p(G))$ для всех $p \in \pi(G)$ и $\mathfrak{f}(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(G)$. Известно, что $G = A \leftthreetimes H$, где A — некоторая элементарная абелева p-группа. Ввиду свойств сплетения $O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(A) = A$. Следовательно, $F_p(G) = = A$. Таким образом, $\mathfrak{f}(p) = \text{form}\, H$. Поскольку формация lform G S_n-замкнута, то в силу теоремы 2.2 из [6] S_n-замкнутой. является и формация $\mathfrak{N}_p\,\text{form}\, H$. Следовательно, $H_q \in \mathfrak{N}_p\,\text{form}\, H$. Но $p \neq q$ и поэтому $H_q \in \in \text{form}\, H$. Хорошо известно (см., например [4]), что $\text{form}\, H = QR_0H$. Из последнего вытекает, что в R_0H найдется такая группа H^*, что $H^*/N \simeq H_q$ для некоторой инвариантной подгруппы N из H^*. Но тогда H^* имеет центральный q-фактор. В силу леммы 1 H также будет иметь центральный q-фактор. Последнее противоречит тому, что H — группа типа A с инвариантной силовской q-подгруппой H_q. Итак, лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Группа (разрешимая группа) G нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая подформация из* form G *S-замкнута (соответственно S_n-замкнута).*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что теорема не верна, и G есть контрпример минимального порядка. Покажем, что G — группа типа A. Пусть группа G разрешима. Тогда G содержит максимальную инвариантную подгруппу M. По условию теоремы $M \in \text{form}\, G$. Значит, $\text{form}\, M \subseteq \text{form}\, G$. Поэтому условие теоремы выполняется и относительно M. По индукции M нильпотентна. Если теперь $\overline{M}$ — любая другая максимальная подгруппа из G, то $\overline{M} \in \text{form}\, G$ ввиду леммы 1.5 из [7], и, следовательно, условие теоремы справедливо относительно любой максимальной подгруппы из G. То же самое получаем и в случае, когда G неразрешима. По индукции G является группой Шмидта. Ясно, что $G/\Phi(G) \in \text{form}\, G$, и поэтому условие теоремы выполняется для фактор-группы $G/\Phi(G)$. Если $|G/\Phi(G)| < |G|$, то по индукции фактор-группа $G/\Phi(G)$ нильпотентна. Последнее противоречит свойствам групп Шмидта. Итак, $\Phi(G) = 1$, т. е. G является группой типа A. Пусть G_q — инвариантная силовская q-подгруппа из G. Тогда, по условию теоремы, $G_q \in \text{form}\, G$. Поскольку $\text{form}\, G = QR_0G$, то в R_0G найдется такая группа G^*, что $G^*/N \simeq G_q$ для некоторой инвариантной подгруппы N из G^*. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что в группе G имеется центральный q-фактор. Последнее противоречит свойствам групп типа A, что и доказывает нильпотентность группы G.

Необходимость. Пусть группа G нильпотентна. Тогда нильпотентными являются и все группы формации form G. Таким образом, обратное утверждение теоремы следует из результата работы [2].

Следствие. *Если в формации (формации разрешимых групп) $\mathfrak{F}$ каждая подформация S-замкнута (соответственно S_n-замкнута), то $\mathfrak{F}$ является формацией нильпотентных групп.*

ТЕОРЕМА 2. *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда каждая локальная подформация формации* $\mathrm{lform}\, G$ *является S-замкнутой.*

Доказательство. Достаточность. Прежде покажем, что группа G разрешима. В силу условия теоремы каждая секция группы G содержится в $\mathrm{lform}\, G$. По индукции, для собственных секций группы G теорема верна. Поэтому для доказательства разрешимости группы G достаточно показать, что G не проста. Предположим противное. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, G$ имеет такой локальный экран $\mathfrak{f}$, что $\mathfrak{f}(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G)) = \mathrm{form}\, G$ для всех $p \in \pi(G)$ и $\mathfrak{f}(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(G)$. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G, а p — некоторый простой делитель порядка G. По условию $M \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $M/F_p(M) \in \mathfrak{f}(p)$. Поскольку ввиду леммы 1 формация $\mathfrak{f}(p)$, содержит, кроме единичных групп, лишь те группы, у которых композиционные факторы изоморфны группе G, то $F_p(M) = M$. Таким образом, каждая максимальная подгруппа группы G p-нильпотентна. Значит группа G не проста в силу теоремы 5.4 из [8, I, IV]. Итак, группа G разрешима. Поскольку каждая собственная секция группы G метанильпотентна, то G либо сама метанильпотентна, либо обладает единственной минимальной нормальной подгруппой R, и $\Phi(G) = 1$. В дальнейшем будем предполагать, что группа G не метанильпотентна. Таким образом, справедливо второе. Подгруппа R является элементарной абелевой p-группой. Поскольку $\Phi(G) = 1$, то $G = R \rtimes H$, где H — некоторая максимальная подгруппа из G. Нетрудно показать, что $O_p(H) = 1$. Пусть $F_p = F_p(G)$. Ясно, что $R \subseteq F_p$. Из дедекиндова тождества $F_p = F_p \cap G = R\,(F_p \cap H)$ и того, что $O_p(H) = 1$, получаем, что $F_p = R$. Покажем, что H обладает подгруппой, являющейся группой Шмидта, инвариантная силовская подгруппа которой не pd-группа. Прежде заметим, что поскольку в разрешимой неметанильпотентной группе G каждая максимальная подгруппа метанильпотентна, то ввиду результатов работы [9], число простых делителей порядка группы G не превосходит 3. Пусть $\tau(H) = 2$. Тогда H — бипримарная ненильпотентная группа. Поскольку $O_p(H) = 1$, то по теореме 4.3.1 из [10] H обладает тривиальной или не тривиальной подгруппой Шмидта, силовская подгруппа которой не pd-группа. Предположим теперь, что $\pi(H) = \{p, q, r\}$. Ввиду разрешимости, $\mathring{H}$ обладает подгруппами $\mathring{H}_{r'}$ и $\mathring{H}_{q'}$. Поскольку $H_{r'}H_{q'} = H$ и $O_p(H) = 1$, то хотя бы одна из подгрупп $H_{r'}$ и $H_{q'}$ не p-замкнута. Пусть это будет $H_{r'}$. По теореме 4.3.1 из [10] в $H_{r'}$ имеется тривиальная или нетривиальная подгруппа Шмидта H^* такая, что $H_q^* \lhd \lhd H^*$. Итак, в любом случае некоторая подгруппа T из H есть группа Шмидта, инвариантная силовская подгруппа которой является p'-группой. Пусть $T^* = T/\Phi(T)$. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = PrT^*$, где P — группа порядка p. Поскольку, по условию, формация $\operatorname{lform} G$ S-замкнута, то по теореме 2.2 из [6] S-замкнутой является и формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{f}(p)$, где $\mathfrak{f}$ — произвольный внутренний локальный экран формации $\operatorname{lform} G$. Пусть $\mathfrak{f}$ — такой локальный экран формации $\operatorname{lform} G$, что $\mathfrak{f}(q) = \operatorname{form}(G/F_q(G))$ для всех $q \in \pi(G)$ и $\mathfrak{f}(q) = \varnothing$, если $q \notin \pi(G)$. Тогда, поскольку $F_p(G) = R$, то $\mathfrak{f}(p) = \operatorname{form}(G/R) = \operatorname{form} H$. Следовательно, формация $\mathfrak{N}_p \operatorname{form} H$ является S-замкнутой. Таким образом, $T^* \in \mathfrak{N}_p \operatorname{form} H$. Но $O_p(T^*) = 1$, и поэтому $T^* \in \operatorname{form} H$. Отсюда вытекает, что $\Gamma \in \mathfrak{N}_p \operatorname{form} H \subseteq \operatorname{lform} G$. Итак, $\operatorname{lform} \Gamma \subseteq \operatorname{lform} G$. Из последнего, ввиду условия теоремы, следует, что формация $\operatorname{lform} \Gamma$ S-замкнута. Полученное противоречит лемме 3. Итак, остается заключить, что группа G метанильпотентна.

Необходимость. Пусть группа G метанильпотентна. Тогда метанильпотентной является и каждая группа из $\operatorname{lform} G$, поскольку множество всех метанильпотентных групп является локальной формацией. Необходимость теперь вытекает из леммы 2, так как каждая локальная формация является ступенчатой.

Следствие. *Пусть в локальной формации $\mathfrak{F}$ каждая локальная подформация является S-замкнутой. Тогда формация $\mathfrak{F}$ состоит из метанильпотентных групп.*

ТЕОРЕМА 3. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая l-формационно критическая группа H из* $\operatorname{lform} G$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$H = P \rtimes Q$, где P — группа простого порядка p, а Q — либо единичная группа, либо циклическая q-группа, причем $p > q$ и $Q_H = 1$;*

2) *$|H|$ делит $|G|$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — все l-формационно критические группы из $\operatorname{lform} G$. Покажем прежде, что $\mathfrak{F} =$

$= \mathrm{lform}\,\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\} = \mathrm{lform}\, G$. Действительно, предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathrm{lform}\, G$. Выберем в формации $\mathrm{lform}\, G$ группу A наименьшего порядка, не содержащуюся в $\mathfrak{F}$. Тогда любая собственная секция группы A принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $A \notin \mathfrak{F}$, то A — l-формационно критическая группа. Последнее противоречит определению $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$. Поскольку, по условию, все группы $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ сверхразрешимы, то $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$ — формация сверхразрешимых групп. Таким образом, группа G сверхразрешима.

Необходимость. Пусть группа G — сверхразрешима. Рассмотрим произвольную l-формационно критическую группу H из $\mathrm{lform}\, G$. Ясно, что H сверхразрешима. Из определения l-формационно критической группы легко следует, что $\Phi(H) = 1$ и H обладает единственной минимальной нормальной подгруппой R. Тогда $H = R \rtimes A$, где A — максимальная подгруппа из H. Пусть R является p-группой. Нетрудно показать, что $O_p(A) = 1$. Отсюда ввиду дедекиндова тождества $F_p(H) = F_p(H) \cap H = R\,(F_p(H) \cap A)$ получаем, что $R = F_p(H)$. Заметим также, что $R = C_H(R)$, поскольку $R \subseteq C_H(R)$ и $C_H(R) = C_H(R) \cap H = R\,(C_H(R) \cap H) = R$, ввиду отсутствия в группе H минимальных нормальных подгрупп, отличных от R. Поскольку H сверхразрешима, то $|R| = p$. Группа автоморфизмов циклической группы простого порядка циклична. Следовательно, A — циклическая группа. Покажем, что A — примарная группа. Предположим противное. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — все силовские подгруппы из A $(r \geqslant 2)$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\,\{RA_i \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$, Возьмем такой локальный экран $\mathfrak{f}$ формации $\mathfrak{F}$, что

$$\mathfrak{f}(q) = \mathrm{form}\,\{RA_i/F_q(RA_i) \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$$

для всех $q \in \pi = \pi(RA_1, RA_2, \ldots, RA_r)$ и $\mathfrak{f}(q) = \varnothing$, если $q \notin \pi$. Заметим, что для всех $q \in \pi$ и отличных от p, $\mathfrak{f}(q) = \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ — формация единичных групп, и $\mathfrak{f}(p) = \mathrm{form}\, A$. Но такой же самый экран имеет и локальная формация $\mathrm{lform}\, H$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, H$. Используя лемму 2, легко показать, что формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута. Все сказанное приводит нас к противоречию с тем, что H l-формационно критическая группа. Таким образом, остается заключить, что A — примарная группа. Если $|H| = p$, то утверждение теоремы относительно H справедливо. Пусть $\pi(H) = \{p, q\}$. Ясно, что $p > q$ и $|H_p|$ делит $|G|$. Покажем, что $|H_q|$ делит $|G|$. Так как $H \in \in \mathrm{lform}\, G$, то $H_q \simeq H/F_p(H) \in \mathrm{form}\,(G/F_p(G))$. Поскольку G — сверхразрешимая группа, то $G/F_p(G)$ — абелева группа. Пусть $G/F_p(G) \simeq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, где все A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — циклические примарные группы. Ясно, что

$$\mathrm{form}\,(G/F_p(G)) = \mathrm{form}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \\ = QR_0\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

В результате применения операций Q и R_0 экспонента групп не увеличивается. Следовательно, поскольку H_q циклична и содержится в $\mathrm{form}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, то ее порядок не превосходит $|A_1, A_2, \ldots, A_n|$. Теорема доказана.

Гомельский государственный университет

Поступило 9.XI.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Шеметков Л. А., Два направления в развитии теории непростых конечных групп, Успехи матем. наук, **30**, № 2 (1975), 179—198.
[2] Nenmann P. M., A note on formations of finite nilpotent groups, Bull. London Math. Soc., **2**, № 1 (1970), 91.
[3] Чунихин С. А., Шеметков Л. А., Конечные группы, Сб., Алгебра. Топология. Геометрия, 1969 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР), М., 1971, 7—70.
[4] Шеметков Л. А., Формации конечных групп, М., «Наука», 1978.
[5] Скиба А. Н., О формациях, порожденных конечными группами, Докл. АН БССР, **23**, № 2 (1979), 101—103.
[6] Doerk K., Zur Theorie der Formationen endlicher anflösbarer Gruppen, J. Algebra, **13**, № 3 (1969), 345—373.
[7] Bryant R. M., Bryce R. A., Hartley B., The formation generated by a finite group, Bull. Austral. Math. Soc., **2**, № 3 (1970), 347—357.
[8] Huppert B., Endliche Gruppen. I, Berlin-Heidelberg — N. Y., Springer, 1967.
[9] Kramer O., Zur Struktur endlicher auflösbarer Gruppen mit mindestens drei Untergruppen von paarweise feilerfremden Indizes, Arch. Math., **16** (1975), 361—366.
[10] Чунихин С. А., Подгруппы конечных групп, Минск, «Наука и техника», 1964.