



Общероссийский математический портал

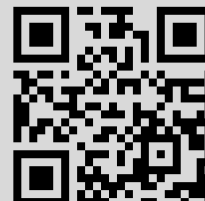
Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков, О верхней оценке мощности минимального разрешающего множества пороговой функции, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, 2012, том 19, выпуск 5, 35–46

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

16 марта 2025 г., 09:44:58



УДК 519.7

О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ МОЩНОСТИ
МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕШАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА
ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ *)

Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков

Аннотация. Предлагается новое необходимое и достаточное условие принадлежности точки минимальному разрешающему множеству пороговой функции k -значной логики. Это позволяет выделить большой подкласс пороговых функций, для которых мощность минимального разрешающего множества при фиксированном числе переменных n ограничена сверху полиномом от $\log_2 k$ степени $n - 2$.

Ключевые слова: пороговая функция, разрешающее множество, свойство разделённости.

Введение

Функция f , отображающая $E_k^n = \{0, 1, \dots, k - 1\}^n$ в $\{0, 1\}$, называется *пороговой*, если существует гиперплоскость, отделяющая множество точек, в которых f равна 0, от множества точек, в которых f равна 1.

В работе изучается строение и мощность разрешающего множества пороговой функции, т. е. такого множества точек из E_k^n , значений функции в которых достаточно для однозначного её восстановления в остальных точках области определения. Разрешающие множества естественным образом появляются в задаче расшифровки пороговой функции [7, 17]. Разрешающее множество пороговой функции f называется *минимальным* (или *тупиковым*), если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для f . Известно (см., например, [8, 13]), что минимальное разрешающее множество любой пороговой функции единственно. Максимальная мощность минимального разрешающего множества, где максимум берётся по всем пороговым функциям, заданным на E_k^n , называется *длиной обучения*.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00545-а).

Длина обучения $t(n, k)$ зависит от n экспоненциально, в частности, $t(n, 2) = 2^n$. Известно, что

$$c'_n \log^{n-2} k \leq t(n, k) \leq c''_n \log^{n-1} k, \quad (1)$$

где c'_n, c''_n — некоторые положительные величины, зависящие только от n . Верхняя оценка в (1) получена в [16] на основе [11, 15], нижняя оценка установлена в [8, 13], см. также [5], где приводятся явные выражения для c'_n, c''_n . В [4, 13] доказано, что $t(2, k) = 4$, а в [3] установлено, что $t(3, k) = \Theta(\log k)$. Средняя мощность минимального разрешающего множества изучается в [2, 14].

При получении верхних и нижних оценок длины обучения в [5, 8, 13, 16] и др. существенным образом используются результаты о числе вершин выпуклой оболочки целых точек полиэдра, заданного системой линейных неравенств (см. [1] и приведённый там список литературы). В свою очередь, при получении верхних оценок числа этих вершин плодотворным оказался подход В. Н. Шевченко [10, 12], основанный на использовании свойства разделённости. В настоящей работе для нахождения более точных оценок мощности минимального разрешающего множества предпринята попытка использовать свойство разделённости напрямую.

Авторы предполагают, что $t(n, k)$ при фиксированном n ограничена сверху полиномом от $\log k$ степени $n - 2$. Гипотеза верна при $n = 2, 3$ [3, 4, 13].

Здесь делается шаг в направлении возможного доказательства этой гипотезы для $n \geq 4$. Во-первых, дано новое необходимое и достаточное условие принадлежности точки минимальному разрешающему множеству (теорема 1). Во-вторых, в множестве $\Pi(n, k)$ пороговых функций, заданных на E_k^n , выделяется большой подкласс $\Pi'(n, k)$ таких функций, для которых это условие эквивалентно свойству разделённости. В-третьих, доказано (теорема 2), что мощность минимального разрешающего множества любой функции из этого подкласса ограничена сверху величиной $c_n \log^{n-2} k$, где c_n зависит только от n .

1. Определения и обозначения

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$, $f : E_k^n \rightarrow \{0, 1\}$, $k \geq 2$. Обозначим

$$M_\nu(f) = \{x \in E_k^n \mid f(x) = \nu\} \quad (\nu = 0, 1).$$

Функция f называется *пороговой*, если существуют число $a_0 \in \mathbb{R}$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$M_0(f) = \{x \in E_k^n \mid ax \leq a_0\}. \quad (2)$$

Запись вида ax , где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, здесь и далее означает линейную форму $ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Линейное неравенство $ax \leq a_0$ в (2) называется *пороговым неравенством* функции f . Множество всех пороговых функций, заданных на E_k^n , обозначим через $\Pi(n, k)$.

Разрешающим множеством функции $f \in \Pi(n, k)$ называется такое $T \subseteq E_k^n$, что для произвольной функции $g \in \Pi(n, k) \setminus \{f\}$ найдётся $z \in T$, для которого $f(z) \neq g(z)$. Разрешающее множество функции f называется *минимальным*, или *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для f . Известно (см., например, [8, 13]), что для любой пороговой функции f минимальное разрешающее множество единственно. Минимальное разрешающее множество функции f обозначим через $T(f)$. Определим $T_\nu(f) = T(f) \cap M_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$). *Длиной обучения* называется величина $t(n, k) = \max_{f \in \Pi(n, k)} |T(f)|$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$. Введём обозначения: $\text{conv } X$ — выпуклая оболочка множества X ; $\text{cone } X$ — коническая оболочка множества X ; $\text{Vert } X$ — множество вершин в $\text{conv } X$. Под суммой и разностью множеств X и Y векторов из \mathbb{R}^d понимаем $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ и $X - Y = \{x - y \mid x \in X, y \in Y\}$ соответственно.

2. Описание минимального разрешающего множества

С каждой функцией $f \in \Pi(n, k)$ связан конус $C(f)$ разделяющих функционалов [11], определяемый системой линейных неравенств относительно неизвестных a_0, a_1, \dots, a_n :

$$\begin{aligned} ax &\leq a_0 && \text{для всех } x \in M_0(f), \\ ax &> a_0 && \text{для всех } x \in M_1(f), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Пусть $T' \subseteq M_0(f)$, $T'' \subseteq M_1(f)$. Рассмотрим следующую подсистему системы неравенств (3):

$$\begin{aligned} ax &\leq a_0 && \text{для всех } x \in T', \\ ax &> a_0 && \text{для всех } x \in T''. \end{aligned} \quad (4)$$

В [8] доказана следующая характеристика минимального разрешающего множества пороговой функции.

Лемма 1 [8]. Пусть $f \in \Pi(n, k)$, $T' \subseteq M_0(f)$, $T'' \subseteq M_1(f)$. Для того чтобы $T_0(f) = T'$ и $T_1(f) = T''$, необходимо и достаточно, чтобы (4) являлась минимальной подсистемой системы (3), эквивалентной этой системе.

Введём обозначения: $K(f) = \text{cone}(M_0(f) - M_1(f))$ (если f — тождественная константа, то $K(f) = \{o\}$, где $o = (0, \dots, 0)$),

$$F_0(f) = \text{conv}(M_0(f)) + K(f), \quad F_1(f) = \text{conv}(M_1(f)) - K(f).$$

Пример 1. На рис. 1 изображены множества $F_0(f)$ и $F_1(f)$ для функции $f \in \Pi(2, 4)$, заданной пороговым неравенством $2x_1 + x_2 \leq 3$. Обозначим

$$x^{(1)} = (0, 3), \quad x^{(2)} = (1, 1), \quad y^{(1)} = (1, 2), \quad y^{(2)} = (2, 0). \quad (5)$$

Имеем $K(f) = \text{cone}\{r^{(1)}, r^{(2)}\}$,

$$F_0(f) = \text{conv}\{x^{(1)}, x^{(2)}\} + K(f), \quad F_1(f) = \text{conv}\{y^{(1)}, y^{(2)}\} - K(f),$$

где $r^{(1)} = x^{(1)} - y^{(2)} = (-2, 3)$, $r^{(2)} = x^{(2)} - y^{(1)} = (0, -1)$.

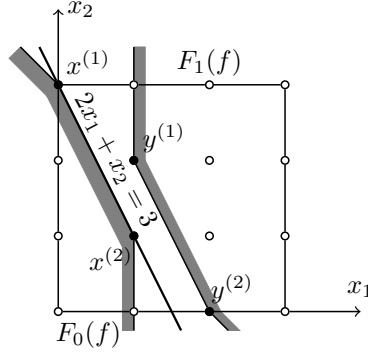


Рис. 1

Ниже (см. теорему 1) дано описание минимального разрешающего множества $T(f)$ в терминах множеств $F_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$).

Лемма 2. Пусть X, Y — конечные множества точек из \mathbb{R}^n , причём $\text{conv } X \cap \text{conv } Y = \emptyset$. Для множеств $X' = \text{conv } X + \text{cone}(X - Y)$ и $Y' = \text{conv } Y + \text{cone}(Y - X)$ имеют место следующие представления:

$$X' = \text{conv Vert } X' + \text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y'),$$

$$Y' = \text{conv Vert } Y' + \text{cone}(\text{Vert } Y' - \text{Vert } X').$$

Доказательство. Множество X' является полиэдром (многогранным множеством) и представлено как сумма политопа $\text{conv } X$ и полиэдрального конуса $\text{cone}(X - Y)$ (см., например, [9]). Аналогично, Y' — полиэдр. Из условия $\text{conv } X \cap \text{conv } Y = \emptyset$ следует, что конус $\text{cone}(X - Y)$ острый, и, следовательно, полиэдры X' и Y' не содержат ненулевых подпространств. Любой полиэдр, не содержащий ненулевых подпространств,

можно представить в виде суммы выпуклой оболочки его вершин и конуса его рецессивных направлений. Конусы рецессивных направлений полиэдров X' и Y' суть $\text{cone}(X - Y)$ и $\text{cone}(Y - X)$ соответственно, поэтому достаточно показать, что $\text{cone}(X - Y) = \text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y')$.

Вначале докажем, что $\text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y') \subseteq \text{cone}(X - Y)$. Для произвольной точки $x' \in X'$ найдутся $x \in \text{conv } X$ и $z \in \text{cone}(X - Y)$ такие, что $x' = x + z$. Точки $x + \frac{1}{2}z$ и $x + \frac{3}{2}z$ принадлежат X' . Так как $x' = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}z) + \frac{1}{2}(x + \frac{3}{2}z)$, точка x' не может быть вершиной множества X' при $z \neq o$. Таким образом, вершины X' являются вершинами $\text{conv } X$, следовательно, $\text{Vert } X' \subseteq X$. Аналогично получаем $\text{Vert } Y' \subseteq Y$. Из полученных включений вытекает соотношение

$$\text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y') \subseteq \text{cone}(X - Y).$$

Для доказательства включения $\text{cone}(X - Y) \subseteq \text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y')$ достаточно показать, что произвольный экстремальный вектор r конуса $\text{cone}(X - Y)$ принадлежит $\text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y')$. Для вектора r найдётся точка $v \in \text{Vert } X'$ такая, что луч $v + \text{cone } r$ является одномерной гранью X' . Пусть $a(x - v) = 0$ — опорная гиперплоскость к одномерной грани $v + \text{cone } r$ полиэдра X' , т. е. $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq o$, $ar = 0$, $a(x - v) < 0$ для всех $x \in X' \setminus (v + \text{cone } r)$.

Предположим, что нашлась точка $y \in Y'$ такая, что $a(y - v) < 0$. Тогда точка $z = 2v - y$ удовлетворяет неравенству $a(z - v) = a(v - y) > 0$ и $z = v + (v - y) \in X'$, так как $v - y \in \text{cone}(X' - Y') \subseteq \text{cone}(X - Y)$ и $v \in \text{Vert } X' \subseteq X$, что противоречит определению опорной гиперплоскости.

Значение линейной функции ay ограничено снизу на полиэдре Y' ($ay \geq av$). Если значение линейной функции на полиэдре ограничено снизу, то её минимум достигается на вершине полиэдра. Обозначим через y' вершину полиэдра Y' , на которой достигается минимум линейной функции ay . Если $a(y' - v) > 0$, то $a(y - v) > 0$ для всех $y \in Y'$. Тогда для любых $x \in X'$ и $y \in Y'$ выполняется $a(x - y) = a(x - v) + a(v - y) < 0$. Так как $r = x - y$ для некоторых $x \in X \subset X'$, $y \in Y \subset Y'$, то $ar < 0$, что противоречит определению a . Таким образом, установлено равенство $a(y' - v) = 0$. Поскольку $y' \in \text{Vert } Y' \subseteq Y$ и $v \in \text{Vert } X' \subseteq X$, имеем $v - y' \in \text{cone}(X - Y)$, следовательно, гиперплоскость $ax = av$ содержит луч $v + \text{cone}(v - y') \subset X'$. На опорной гиперплоскости $ax = av$ находится единственный луч из X' , поэтому $r = \beta(v - y') \in \text{cone}(X' - Y')$, где $\beta > 0$. Итак, $\text{cone}(X - Y) \subseteq \text{cone}(\text{Vert } X' - \text{Vert } Y')$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Если $f \in \Pi(n, k)$, то $T_\nu(f) = \text{Vert } F_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f — тождественная константа, то доказываемое равенство очевидно. Пусть f не является константой.

Вначале докажем, что $T_\nu(f) \subseteq \text{Vert } F_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$), т. е. $\text{Vert } F_0(f) \cup \text{Vert } F_1(f)$ — разрешающее множество функции f . Рассмотрим произвольную пороговую функцию $g \in \Pi(n, k)$, для которой $\text{Vert } F_\nu(f) \subseteq M_\nu(g)$ ($\nu = 0, 1$). Пусть гиперплоскость $ax = \beta$ разделяет множества $M_0(g)$ и $M_1(g)$, а именно, пусть $ax \leq \beta$ при $x \in M_0(g)$ и $ax > \beta$ при $x \in M_1(g)$. Так как $\text{Vert } F_\nu(f) \subseteq M_\nu(g)$ ($\nu = 0, 1$), имеем $az \leq 0$, где $z \in \text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f)$. Отсюда получаем неравенство $az \leq \beta$ при $z \in \text{conv Vert } F_0(f) + \text{cone}(\text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f))$ и неравенство $az > \beta$ при $z \in \text{conv Vert } F_1(f) + \text{cone}(\text{Vert } F_1(f) - \text{Vert } F_0(f))$. Учитывая включения

$$M_0(f) \subset F_0(f) = \text{conv Vert } F_0(f) + \text{cone}(\text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f))$$

(последнее равенство доказано в лемме 2) и

$$M_1(f) \subset F_1(f) = \text{conv Vert } F_1(f) - \text{cone}(\text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f)),$$

получаем, что $az \leq \beta$ при $z \in M_0(f)$ и $az > \beta$ при $z \in M_1(f)$. Тем самым установлены включения $M_\nu(f) \subseteq M_\nu(g)$ ($\nu = 0, 1$). Поскольку $M_0(f) \cup M_1(f) = E_k^n = M_0(g) \cup M_1(g)$, то $M_\nu(f) = M_\nu(g)$ ($\nu = 0, 1$), т. е. $f = g$. Следовательно, $\text{Vert } F_0(f) \cup \text{Vert } F_1(f)$ — разрешающее множество функции f .

Теперь покажем, что $\text{Vert } F_\nu(f) \subseteq T_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$), т. е. множество $\text{Vert } F_0(f) \cup \text{Vert } F_1(f)$ минимальное разрешающее. Достаточно показать, что для произвольной точки $v \in \text{Vert } F_0(f) \cup \text{Vert } F_1(f)$ найдётся функция $g \in \Pi(n, k)$, значения которой отличаются от значений функции f только в точке v . Для определённости будем считать, что $v \in \text{Vert } F_0(f)$. Тогда $a(x - v) = 0$ — опорная гиперплоскость к $F_0(f)$ в точке v , т. е. $a \in \mathbb{R}^n$, $a(x - v) < 0$ при $x \in F_0(f) \setminus \{v\}$. Поскольку

$$v + \text{cone}(\text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f)) \subset F_0(f),$$

для вектора $r \in \text{cone}(\text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f))$ выполняется неравенство $ar < 0$. Так как $v - \text{Vert } F_1(f) \subset \text{Vert } F_0(f) - \text{Vert } F_1(f)$, при $y \in \text{Vert } F_1(f)$ справедливо $a(v - y) < 0$. Из полученных неравенств вытекает, что если $y \in \text{conv Vert } F_1(f) + \text{cone}(\text{Vert } F_1(f) - \text{Vert } F_0(f)) = F_1(f)$, то $av < ay$. Определим пороговую функцию g следующим образом: $g(x) = 0$ при $ax < av$ и $g(x) = 1$ при $ax \geq av$. Из доказанных ранее неравенств следует, что $M_0(g) = M_0(f) \setminus \{v\}$ и $M_1(g) = M_1(f) \cup \{v\}$, т. е. значения функции g отличаются от значений f только в точке v . Случай $v \in \text{Vert } F_1(f)$ рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

Проиллюстрируем теорему на примерах.

Пример 1 (продолжение). Для пороговой функции $f \in \Pi(2, 4)$, заданной пороговым неравенством $2x_1 + x_2 \leq 3$ (см. рис. 1), вершины множества $F_0(f)$ суть $x^{(1)}, x^{(2)}$, а вершины множества $F_1(f)$ суть $y^{(1)}, y^{(2)}$, поэтому $T_0(f) = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$, $T_1(f) = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$, где $x^{(1)}, x^{(2)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ определены в (5).

Пример 2. Рассмотрим функцию $f \in \Pi(3, 10)$ с пороговым неравенством $20x_1 + 28x_2 + 35x_3 \leq 140$. Экстремальные лучи конуса $K(f)$ определяются векторами

$$(5, 0, -3), (4, -3, 0), (-2, 5, -3), (-4, 4, -1), (-4, -1, 3), (-3, -3, 4).$$

Далее,

$$\begin{aligned} F_0(f) &= \text{conv}\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\} + K(f), \\ F_1(f) &= \text{conv}\{y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}\} - K(f), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (7, 0, 0), & x^{(2)} &= (0, 5, 0), & x^{(3)} &= (0, 0, 4), \\ y^{(1)} &= (4, 1, 1), & y^{(2)} &= (3, 3, 0), & y^{(3)} &= (2, 0, 3). \end{aligned}$$

Таким образом, $T_0(f) = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$, $T_1(f) = \{y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}\}$. Вычисления выполнены с использованием программы *Skeleton* [6]. В [5] на этом примере проиллюстрирован другой метод нахождения $T(f)$.

Следствие 1. Пусть $f \in \Pi(n, k)$, $x, y \in T_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$), $x \neq y$. Тогда $2x - y \notin F_0(f) \cup F_1(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in T_0(f)$. Обозначим $z = 2x - y$.

Если $z \in F_0(f)$, то $x = (y + z)/2$, поэтому $x \notin \text{Vert } F_0(f) = T_0(f)$.

Если $z \in F_1(f)$, то рассмотрим $y' = y + (x - z)$. Так как $y \in M_0(f)$, а $x - z \in K(f)$, то $y' \in F_0(f)$. Имеем $y = (x + y')/2$, откуда $y \notin \text{Vert } F_0(f) = T_0(f)$.

Случай $x, y \in T_1(f)$ рассматривается аналогично. Следствие 1 доказано.

3. Верхняя оценка мощности минимального разрешающего множества

К сожалению, в общем случае авторам не известно удобного описания множеств $F_\nu(f)$ ($\nu = 0, 1$), которое позволило бы достаточно точно оценить $|\text{Vert } F_\nu(f)|$. Рассмотрим однако множество $\Pi'(n, k)$ таких пороговых функций f , для каждой из которых найдётся пороговое неравенство

$ax \leq a_0$, где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и

$$a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_0 < a_j(k-1) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Например, функция f из примера 1 не принадлежит множеству $\Pi'(2, 4)$, а функция из примера 2 принадлежит $\Pi'(3, 10)$.

Легко видеть, что разделяющая гиперплоскость функции $f \in \Pi'(n, k)$ пересекает только те рёбра гиперкуба E_k^n , которые инцидентны вершине $o = (0, \dots, 0)$. Кроме того, для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in M_0(f)$ имеем $x_j \leq k-2$ ($j = 1, 2, \dots, n$), так как $a_j x_j \leq ax \leq a_0 < a_j(k-1)$.

Класс $\Pi'(n, k)$ является достаточно «естественным». В частности, для любой $f \in \Pi'(n, k)$ множество $M_0(f)$ представляет собой множество допустимых точек некоторой задачи о рюкзаке (без ограничений на количество предметов данного типа), и, наоборот, для любой задачи о рюкзаке (с $a_j > 0$) найдутся k и функция $f \in \Pi'(n, k)$ такие, что $M_0(f)$ — множество её допустимых точек. При этом $\text{conv } M_0(f)$ — многогранник задачи о рюкзаке, представляющий большой интерес в целочисленном линейном программировании (см., например, [7, 9]). Кроме того, авторы надеются, что предлагаемый здесь подход для получения оценок мощности $|T(f)|$, где $f \in \Pi'(n, k)$, удастся в дальнейшем применить к произвольным пороговым функциям.

Обозначим через \mathbb{Z}_+^n множество векторов из \mathbb{Z}^n с неотрицательными компонентами. Говорят, что множество $G \subset \mathbb{Z}_+^n$ обладает *свойством разделённости*, если из условий $x, y \in G$, $x \neq y$ следует $2x - y \notin \mathbb{Z}_+^n$ [10]. Покажем, что если $f \in \Pi'(n, k)$, то множества $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладают свойством разделённости. Ниже для оценок их мощностей воспользуемся подходом из [10, 12].

Лемма 3. *Если $f \in \Pi'(n, k)$, то каждое из множеств $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладает свойством разделённости.*

Доказательство. Покажем, что если $f \in \Pi'(n, k)$, то $\mathbb{Z}_+^n \subseteq F_0(f) \cup F_1(f)$.

Пусть $ax \leq a_0$ — пороговое неравенство, коэффициенты которого удовлетворяют (6). Рассмотрим точки $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$, где

$$x_j^{(j)} = \left\lfloor \frac{a_0}{a_j} \right\rfloor, \quad y_j^{(j)} = \left\lfloor \frac{a_0}{a_j} \right\rfloor + 1, \quad x_j^{(i)} = y_j^{(i)} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; i \neq j).$$

Легко видеть, что $x^{(j)} \in M_0(f)$, и ввиду (6) $y^{(j)} \in M_1(f)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Пусть

$$K' = \text{cone}\{x^{(1)} - y^{(1)}, x^{(2)} - y^{(2)}, \dots, x^{(n)} - y^{(n)}\}.$$

Тогда $-\mathbb{Z}_+^n = K' \subseteq K(f)$.

Пусть $x \in \mathbb{Z}_+^n$. Если $ax \leq a_0$, то $x \in M_0(f) \subseteq F_0(f)$. Если $ax > a_0$, то

$$x \in M_1(f) + \mathbb{Z}_+^n = M_1(f) - K' \subseteq M_1(f) - K(f) = F_1(f).$$

Итак, $\mathbb{Z}_+^n \subseteq F_0(f) \cup F_1(f)$, поэтому согласно следствию 1 множества $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладают свойством разделённости. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $f \in \Pi'(n, k)$ и $ax \leq a_0$ — пороговое неравенство для f , для которого справедливо условие (6). Тогда для любого $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_0(f)$ существует j такое, что

$$\frac{a_0}{na_j} - \frac{1}{n} < x_j \leq \frac{a_0}{a_j},$$

и для любого $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_1(f)$ существует j такое, что

$$\frac{a_0}{na_j} < x_j \leq \frac{a_0}{a_j} + 1.$$

Доказательство. Пусть $x \in T_0(f)$. Выберем j так, чтобы

$$a_j x_j \geq a_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Рассмотрим точку y , полученную из x увеличением её j -й компоненты на 1. В силу (6) имеем $y \in E_k^n$. Если $y \in M_0(f)$, то легко видеть, что $x \notin \text{Vert } F_0(f)$, что противоречит условию $x \in T_0(f)$. Следовательно, $y \in M_1(f)$, откуда $ax + a_j = ay > a_0$, поэтому $ax > a_0 - a_j$. Ввиду (7) имеем $na_j x_j \geq ax > a_0 - a_j$, откуда $x_j > a_0/(na_j) - 1/n$.

С другой стороны, $ax \leq a_0$, поэтому $a_j x_j \leq a_0$, значит, $x_j \leq a_0/a_j$.

Пусть теперь $x \in T_1(f)$. Снова выберем j согласно (7). Заметим, что $x_j \geq 1$, так как в противном случае $x = o$, откуда $M_0(f) = \emptyset$ в силу (6). Рассмотрим точку y , полученную из x уменьшением её j -й компоненты на 1. Если $y \in M_1(f)$, то $x \notin \text{Vert } F_1(f) = T_1(f)$; противоречие. Тем самым $y \in M_0(f)$. Следовательно, $ax - a_j = ay \leq a_0$, откуда $a_j x_j \leq ax \leq a_0 + a_j$, поэтому $x_j \leq 1 + a_0/a_j$.

С другой стороны, используя (7), получаем, что $na_j x_j \geq ax > a_0$, значит, $x_j > a_0/(na_j)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5 [10, 12]. Пусть множество $G \subset \mathbb{Z}_+^n$ обладает свойством разделённости и для каждого $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ выполнено $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$ ($i = 1, \dots, n-1$), где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ — неотрицательные числа. Тогда

$$|G| \leq \prod_{i=1}^{n-1} \left\lceil 1 + \log_2 \frac{\beta_i + 2}{\alpha_i + 1} \right\rceil.$$

Теорема 2. Для любой $f \in \Pi'(n, k)$ при $n \geq 2$

$$|T_\nu(f)| \leq n(1 + \log_2 n)(1 + \log_2(k + 1))^{n-2} \quad (\nu = 0, 1). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [4, 13], что $|T_\nu(f)| \leq 2$ при $f \in \Pi(2, k)$. Таким образом, при $n = 2$ неравенство (8) выполнено. Далее считаем, что $n \geq 3$.

Пусть $ax \leq a_0$ — пороговое неравенство функции f , для которого выполнено (6). Обозначим через $T_{\nu j}$ ($\nu = 0, 1; j = 1, 2, \dots, n$) множество точек из $T_\nu(f)$, j -я компонента которых удовлетворяет неравенствам леммы 4. По лемме 3 множество $T_\nu(f)$ обладает свойством разделённости, поэтому тем же свойством обладают и его подмножества $T_{\nu j}$.

Используя лемму 5, оценим $|T_{0j}|$. При этом применим первое неравенство из леммы 4 и $n - 2$ неравенств $0 \leq x_i \leq k - 2$ ($i \neq j$). Учитывая, что $n \geq 3$, получаем

$$\begin{aligned} |T_{0j}| &\leq \left(1 + \log_2 \frac{\frac{a_0}{a_j} + 2}{\frac{a_0}{na_j} - \frac{1}{n} + 1}\right) (1 + \log_2 k)^{n-2} \\ &= \left(1 + \log_2 \frac{n(a_0 + 2a_j)}{a_0 + (n-1)a_j}\right) (1 + \log_2 k)^{n-2} \\ &\leq (1 + \log_2 n)(1 + \log_2 k)^{n-2}. \end{aligned}$$

Теперь, используя лемму 5, оценим $|T_{1j}|$. При этом применим второе неравенство из леммы 4 и $n - 2$ неравенств $0 \leq x_i \leq k - 1$ ($i \neq j$). Учитывая, что $n \geq 3$, получаем

$$\begin{aligned} |T_{1j}| &\leq \left(1 + \log_2 \frac{\frac{a_0}{a_j} + 3}{\frac{a_0}{na_j} + 1}\right) (1 + \log_2(k + 1))^{n-2} \\ &= \left(1 + \log_2 \frac{n(a_0 + 3a_j)}{a_0 + na_j}\right) (1 + \log_2(k + 1))^{n-2} \\ &\leq (1 + \log_2 n)(1 + \log_2(k + 1))^{n-2}. \end{aligned}$$

Суммируя по j , получаем оценки (8). Теорема 2 доказана.

Авторы благодарны В. Н. Шевченко и С. И. Веселову за полезные обсуждения и искренне признательны рецензенту, указавшему на огрехи в первом варианте работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веселов С. И., Чирков А. Ю. Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 14–31.

2. **Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.** Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестн. Нижегородск. гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. — С. 238–246.
3. **Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.** О мощности разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Мат. XIV Междунар. шк.-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Н. Новгород: Изд-во Нижегородск. гос. пед. ун-та, 2003. — С. 20–21.
4. **Золотых Н. Ю.** О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Мат. XI Межгос. шк.-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Ч. I. — М.: Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. — С. 74–79.
5. **Золотых Н. Ю.** Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: Физматлит, 2008. — С. 159–168.
6. **Золотых Н. Ю.** Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 153–163.
7. **Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.** Расшифровка пороговых функций k -значной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 3. — С. 18–23.
8. **Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.** О нижней оценке расшифровки пороговых функций k -значной логики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 346–352.
9. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. — М.: Мир, 1991. — 360 с.
10. **Шевченко В. Н.** О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. — 1981. — № 2. — С. 133–134.
11. **Шевченко В. Н.** О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. — С. 99–108.
12. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995. — 192 с.
13. **Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю.** О сложности расшифровки пороговых функций k -значной логики // Докл. РАН. — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 606–608.
14. **Antony M., Brightwell G., Shawe-Taylor J.** On exact specification by labeled examples // Discrete Appl. Math. — 1995. — Vol. 61, N 1. — P. 1–25.
15. **Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.** On integer points in polyhedra // Combinatorica. — 1992. — Vol. 12, N 1. — P. 27–37.
16. **Hegedüs T.** Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc.

7th Ann. ACM Conf. Computational Learning Theory (COLT'94). — New York: ACM Press, 1994. — P. 228–236.

- 17. Hegedüs T.** Generalized teaching dimensions and the query complexity of learning // Proc. 8th Ann. ACM Conf. Computational Learning Theory (COLT'95). — New York: ACM Press, 1995. — P. 108–117.

Золотых Николай Юрьевич,
e-mail: zolotykh@vmk.unn.ru
Чирков Александр Юрьевич,
e-mail: chir7@yandex.ru

Статья поступила
23 октября 2011 г.
Переработанный вариант —
23 марта 2012 г.