П.П.Таммела

ОБЛАСТЬ ЭРМИТА-МИНКОВСКОГО ПРИВЕДЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ОТ ШЕСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

§ I.

Пусть

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

– положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами a_{ij}, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Говорят, что форма f приведена по Минковскому, если для любого набора целых чисел $l_1, \ldots, l_n$ из условия о.н.д. $(l_i, \ldots, l_n) = 1$ следует, что

$$f(l_1, \ldots, l_n) \geqslant a_{ii}. \tag{I}$$

Общая теория приведения положительных квадратичных форм по Минковскому развита в его известном мемуаре [3] (см. также прекрасное изложение [4]).

В $N = \frac{n(n+1)}{2}$ -мерном пространстве коэффициентов $\{a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n}\}$ область приведения Минковского есть выпуклый гоноэдр с конечным числом граней. Минковский [2] сформулировал ряд утверждений, позволяющих вычислять гоноэдр приведения для $n \leqslant 6$. Однако доказательство этих утверждений было опубликовано Минковским лишь для $n \leqslant 4$ ([I],[3]). В случае $n = 5$ эти утверждения были недавно доказаны С.С.Рышковым [5].Цель настоящей заметки – доказательство утверждений Минковского для $n = 6$. Точнее говоря, мы доказываем следующее предложение (сформулированное без доказательства Минковским [2]).

<u>Теорема</u>. П у с т ь

$$f = \sum_{i,j=1} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

– п о л о ж и т е л ь н о о п р е д е л е н н а я к в а д р а т и ч н а я ф о р м а с в е щ е с т в е н н ы м и к о э ф ф и ц и е н т а м и a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$. П у с т ь $n \leqslant 6$. Д л я т о г о , ч т о б ы f б ы л а п р и в е д е н а п о М и н к о в с к о м у , н е о б х о д и м о и д о с т а т о ч н о , ч т о б ы о н а у д о в л е т в о р я л а у с л о в и я м

$$a_{ii} \leq a_{i+1,\,i+1} \qquad (i=1,\ldots,n-1) \tag{2}$$

и условиям

$$f(\ell_1,\ldots,\ell_n) \geq a_{kk}, \tag{3}$$

где $k=1,\ldots,n$, а значения ℓ_i берутся из следующей таблицы

ℓ_k	$\pm\ell_{k'}$	$\pm\ell_{k''}$	$\pm\ell_{k'''}$	$\pm\ell_{k^{IV}}$	$\pm\ell_{k^{V}}$	
I	I					
I	I	I				
I	I	I	I			
I	I	I	I	I		
I	I	I	I	2		(4)
I	I	I	I	I	I	
I	I	I	I	I	2	
I	I	I	I	2	2	
I	I	I	I	2	3	

Здесь $(k, k', k'', \ldots, k^{(n-1)})$ пробегают все перестановки индексов $(1, 2, \ldots, n)$. При этом из таблицы (4) берутся лишь строки, не превосходящие по длине n, причем пустые места заполняются нулями.

§ 2.

Прежде чем доказывать теорему, сформулируем и докажем ряд лемм.

Введем следующие обозначения: I) e_i – вектор, у которого i-тая координата равна I, а все остальные равны 0 $(i=1,\ldots,n)$; 2) если $i, j, \ldots, k$ суть индексы (возможно, совпадающие) из набора $(1, 2, \ldots, n)$, то

$$e_{i,j,\ldots,k} = e_i + e_j + \ldots + e_k.$$

В этих обозначениях неравенства (3) отвечающие строкам таблицы (4) (кроме последней), запишутся следующим образом.

$$f(e_{j_0,j_1,j_2,\ldots,j_t})-f(e_{j_0})\geq 0 \qquad (t=1,2,\ldots,n-1), \tag{5}$$

$$f(e_{j_0,j_1,\ldots,j_{t-1},j_t,j_t})-f(e_{j_0})\geq 0 \quad (t=4,5,\ldots,n-1), \tag{6}$$

$$f(e_{j_0,j_1,\ldots,j_{t-1},j_{t-1},j_t,j_t})-f(e_{j_0})\geq 0 \quad (t=5,\ldots,n-1). \tag{7}$$

Неравенства (5),(6),(7) эквивалентны соответственно неравенствам:

$$2f(e_{j_0};\ e_{j_1,j_2,\ldots,j_t})+f(e_{j_1,j_2,\ldots,j_t})\geq 0 \quad (t=1,2,\ldots,n-1), \tag{8}$$

$$2f(e_{j_0};\ e_{j_1,j_2,\ldots,j_{t-1},j_t,j_t})+f(e_{j_1,\ldots,j_{t-1},j_t,j_t})\geq 0 \quad (t=4,5,\ldots,n-1), \tag{9}$$

$$2f(e_{j_0};\ e_{j_1,\ldots,j_{t-1},j_{t-1},j_t,j_t})+f(e_{j_1,\ldots,j_{t-1},j_{t-1},j_t,j_t})\geq 0 \quad (t=5,\ldots,n-1), \tag{10}$$

здесь $f(x;y)$ – билинейная форма

$$f(x;\ y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ y_j,$$

отвечающая квадратичной форме f; $j_0, j_1, \ldots, j_t$ – различные индексы, выбранные среди $(1, 2, \ldots, n)$.

Далее, ради краткости, в формулировках лемм I–3 через $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ мы обозначаем точку с целыми координатами $\ell_1,\ldots,\ell_n$, удовлетворяющими неравенствам

$$0\leq \ell_1\leq \ell_2\leq \ldots \leq \ell_n. \tag{II}$$

<u>Лемма I</u>. Пусть k – любой индекс с условием $0\leq k\leq n-1$. Пусть для f выполнены неравенства*) (5) для $t=1,2,\ldots,k+1$. Пусть выполняется неравенство

*) А следовательно, и равносильные им неравенства (8).

$$2\ell_{n-\kappa} > \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i. \tag{12}$$

Наконец, пусть если $\kappa \geqslant 3$, то выполняется неравенство

$$2\ell_{n-\kappa} > \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i + \sum_{i=0}^{\kappa-3} (i+1)(\kappa-i-2)(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1}) - (\ell_{n-\kappa+1}-\ell_{n-\kappa}). \tag{13}$$

Тогда

$$\mathfrak{f}(\ell) \geqslant \mathfrak{f}(\ell - e_{n-\kappa,\ldots,n}). \tag{14}$$

Доказательство. Имеем*)

$$\mathfrak{f}(\ell) - \mathfrak{f}(\ell - e_{n-\kappa,\, n-\kappa+1,\ldots,n}) = 2\mathfrak{f}(\ell;\, e_{n-\kappa,\, n-\kappa+1,\ldots,n}) - \mathfrak{f}(e_{n-\kappa,\, n-\kappa+1,\ldots,n}).$$

Разлагая билинейную форму $\mathfrak{f}(\ell;\, e_{n-\kappa,\, n-\kappa+1,\ldots,n})$ по первому аргументу в соответствии с представлением

$$\ell = \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i e_i + \ell_{n-\kappa} e_{n-\kappa,\, n-\kappa+1,\ldots,n} + \sum_{i=0}^{\kappa-1} (\ell_{n-i} - \ell_{n-i-1}) e_{n-i,\ldots,n},$$

получаем

$$\mathfrak{f}(\ell) - \mathfrak{f}(\ell - e_{n-\kappa,\ldots,n}) = \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i \{2\mathfrak{f}(e_i;\, e_{n-\kappa,\ldots,n}) + \mathfrak{f}(e_{n-\kappa,\ldots,n})\} +$$

$$+ (\ell_{n-\kappa+1} - \ell_{n-\kappa})\{2\mathfrak{f}(e_{n-\kappa};\, e_{n-\kappa+1,\ldots,n}) + \mathfrak{f}(e_{n-\kappa+1,\ldots,n})\} +$$

$$+ (\ell_{n-\kappa+2} - \ell_{n-\kappa+1}) \sum_{j=n-\kappa}^{n-\kappa+1} \{2\mathfrak{f}(e_j;\, e_{n-\kappa+2,\ldots,n}) + \mathfrak{f}(e_{n-\kappa+2,\ldots,n})\} +$$

---

*) Здесь и далее, если $v < u$, то сумму $\sum_{j=u}^{v}$ считаем равной 0. Считаем также, что $\ell_m = \ell_n$,

$$\max_{m \leqslant h \leqslant n} \mathfrak{f}(e_h) = 0, \text{ если } m > n.$$

$$+\sum_{i=0}^{k-3}(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1})\sum_{j=n-k}^{n-k+1}\{2f(e_j;\, e_{n-i,\dots,n})+f(e_{n-i,\dots,n})\}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-3}(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1})\sum_{j=n-k+2}^{n-i-1}\ \sum_{h=n-i}^{n}\{2f(e_j;\, e_h)+f(e_j)\}+$$

$$+(2\ell_{n-k}-\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i-1)\{f(e_{n-k,\dots,n})-\max_{n-k+2\le h\le n} f(e_h)\}+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k})\{f(e_{n-k+1,\dots,n})-\max_{n-k+2\le h\le n} f(e_h)\}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-3}(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1})\sum_{j=n-k+2}^{n-i-1}(i+1)\{\max_{n-k+2\le h\le n} f(e_h)-f(e_j)\}+$$

$$+(2\ell_{n-k}-\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i-1+\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-\sum_{i=0}^{k-3}(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1})(k-i-2)(i+1))\max_{n-k+2\le h\le n} f(e_h).$$

Поэтому имеет место неравенство (I4), ибо, в силу (5) каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно, а потому в силу(II), (I2) и (I3) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма I доказана.

Замечание. При $k=3$ и $n=6$ неравенство (I3) принимает вид

$$\ell_3+\ell_4+\ell_5>\ell_1+\ell_2+\ell_6. \qquad (I3')$$

Лемма 2. Пусть $k=3$ или $k=4$. Пусть для f выполнены неравенства (5), (6) и (7) для $t=1,2,\dots,k+1$. Пусть выполняются неравенства

$$2\ell_{n-\kappa} > \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i, \qquad \ell_{n-\kappa} + \ell_n - \ell_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i. \tag{I5}$$

Наконец, пусть если $\kappa = 4$, то выполняется неравенство

$$\ell_{n-4} + \ell_{n-3} + \ell_{n-2} > \sum_{i=1}^{n-5} \ell_i + \ell_{n-1}. \tag{I6}$$

Тогда

$$f(\ell) \geqslant f(\ell - e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n}). \tag{I7}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$A = \min\{\ell_{n-\kappa};\ \ell_n - \ell_{n-1}\}, \qquad B = \min\{\ell_{n-\kappa} - A;\ \ell_{n-1} - \ell_{n-2}\},$$

$$C = \min\{\ell_{n-\kappa+1} - \ell_{n-\kappa},\ \ell_{n-1} - \ell_{n-2} - B\}.$$

Имеем

$$f(\ell) - f(\ell - e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n}) = 2f(\ell;\ e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n}) - f(e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n}).$$

Разлагая билинейную форму $f(\ell;\ e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n})$ в соответствии с представлением

$$\ell = \sum_{i=1}^{n-\kappa-1} \ell_i e_i + A e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n} + B e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n-1,n,n} +$$

$$+ (\ell_{n-\kappa} - A - B) e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n} + C e_{n-\kappa+1,\ldots,n-1,n-1,n,n} +$$

$$+ (\ell_{n-\kappa+1} - \ell_{n-\kappa} - C) e_{n-\kappa+1,n-1,n} + \sum_{i=2}^{\kappa-2} (\ell_{n-i} - \ell_{n-i-1}) e_{n-i,\ldots,n} +$$

$$+ (\ell_{n-1} - \ell_{n-2} - B - C) e_{n-1,n} + (\ell_n - \ell_{n-1} - A) e_n,$$

получаем

$$f(\ell) - f(\ell - e_{n-\kappa,\ldots,n-1,n,n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-k-1} \ell_i\{2f(e_i;\ e_{n-k,\dots,n-1,n,n}) + f(e_{n-k,\dots,n-1,n,n})\} +$$

$$+(\ell_{n-k}-A-B)\{f(e_{n-k,\dots,n-1,n})-f(e_n)\}+$$

$$+B\{f(e_{n-k,\dots,n-1,n})-f(e_{n-1})\}+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)\{f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n})+2f(e_{n-k};\ e_{n-k+1,\dots,n-1,n})\}+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)\{f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n})-f(e_n)\}+$$

$$+C\{f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\}+$$

$$+C\{2f(e_{n-k};\ e_{n-k+1,\dots,n-1,n-1,n,n})+f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n-1,n,n})\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{k-2}(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1})\sum_{j=n-2}^{n-1}\{2f(e_j;\ e_n)+f(e_n)\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{k-2}(\ell_{n-i}-\ell_{n-i-1})\sum_{j=n-k}^{n-k+1}\{2f(e_j;\ e_{n-i,\dots,n-1,n})+f(e_{n-i,\dots,n-1,n})\}+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\sum_{i=n-3}^{n-2}\{2f(e_i;\ e_{n-1,n})+f(e_{n-1,n})\}+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\{2f(e_{n-1};\ e_n)+f(e_n)\}+$$

$$+(\ell_n-\ell_{n-1}-A)\sum_{i=n-3}^{n-1}\{2f(e_i;\ e_n)+f(e_n)\}+$$

$$+B[f(e_{n-k,\dots,n-1,n-1,n,n})-f(e_{n-k,\dots,n-1,n})]+$$

$$+(\ell_n-\ell_{n-1}-A)[\sum_{i=n-k}^{n-4} 2f(e_i;\ e_n)+f(e_n)]+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)[\sum_{i=n-k}^{n-4} 2f(e_i;\ e_n)+f(e_n)]+$$

$$+(2A-1-\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i+\ell_{n-k}-A-B+B)\{f(e_{n-k,\dots,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\}+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)[f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n,n})-f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n})]+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\sum_{i=n-k}^{n-4}\{2f(e_i;\, e_{n-1})+f(e_{n-1})\}+$$

$$+\{2A-1-\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i+\ell_{n-k}-A-B+B-(k-3)(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\}f(e_{n-1}).$$

Поэтому имеет место неравенство (I7), ибо, во-первых, в силу (5), (6), и (7) каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно; во-вторых, для $k=3$ и $k=4$ в силу (5) и леммы I выражения в квадратных скобках неотрицательны; так что в силу (II), (I5) и (I6) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрица - тельно.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $n=6$. Пусть для f выполняются неравенства (5), (6) и (7) для $t=1, \ldots, 5$. Пусть выполняются условия

$$1\le \ell_1=\ell_2=\ell_3, \qquad 2\ell_m\le \sum_{i=1}^{m-1}\ell_i \qquad (m=4,5,6). \tag{I8}$$

Наконец, пусть выполняются условия

или I) $\ell_5=2\ell_4=2\ell_1$, (I9)

или 2) $\ell_6=\ell_5>\ell_3$. (20)

Тогда

$$f(\ell)\ge f(\ell-e_{1,2,3,4,5,5,6,6}). \tag{2I}$$

Доказательство. Пусть

$$A=\min(\ell_1+\ell_4-\ell_5,\ \ \ell_4-\ell_3).$$

Имеем

$$f(\ell)-f(\ell-e_{1,2,3,4,5,5,6,6})=2f(\ell;e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6}).$$

Разлагая билинейную форму $f(\ell;\, e_{1,2,3,4,5,5,6,6})$ в соответствии с представлением

$$\ell=(\ell_5-\ell_4)e_{1,2,3,4,5,5,6,6}+Ae_{1,2,3,4,4,5,5,6,6}$$

$$+(\ell_1+\ell_4-\ell_5-A)e_{1,2,3,4,5,6}+(\ell_4-\ell_3-A)e_{4,5,6}+(\ell_6-\ell_5)e_6,$$

получаем

$$\begin{aligned}
&f(\ell)-f(\ell-e_{1,2,3,4,5,5,6,6})=\\
&=A\{f(e_{1,2,3,4,5,6})-f(e_4)\}+\\
&+(\ell_1+\ell_4-\ell_5-A)\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6})-f(e_6)\}+\\
&+(\ell_1+\ell_4-\ell_5-A)\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\}+\\
&+(\ell_4-\ell_3-A)\sum_{i=2}^{3}\{2f(e_i;\ e_{4,5,6})+f(e_{4,5,6})\}+\\
&+(\ell_4-\ell_3-A)\{2f(e_4;\ e_{5,6})+f(e_{5,6})\}+\\
&+(\ell_4-\ell_3-A)\{2f(e_1;\ e_{5,6})+f(e_{5,6})\}+\\
&+(\ell_4-\ell_3-A)\{2f(e_1;\ e_4)+f(e_1)\}+\\
&+(\ell_6-\ell_5)\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\}+\\
&+(\ell_6-\ell_5)\sum_{i=1}^{4}\{2f(e_i;\ e_{5,6})+f(e_{5,6})\}+\\
&+(2(\ell_5-\ell_4)-1-(\ell_6-\ell_5)+A)\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\}+\\
&+A[f(e_{1,2,3,4,4,5,5,6,6})-f(e_{1,2,3,4,5,6})]+\\
&+\{2(\ell_5-\ell_4)-1-(\ell_6-\ell_5)+A-(\ell_4-\ell_3-A)\}f(e_1).
\end{aligned}$$

Поэтому имеет место неравенство (21), ибо, во-первых, в силу (5), (6) и (7) каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно; во-вторых, в силу (5) и леммы I выражение в квадратных скобках неотрицательно; так что в силу (11), (18), (19) и (20) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма 3 доказана.

§ 3

Перейдем к доказательству теоремы. Далее везде считаем, что $n \leq 6$. Если форма приведена по Минковскому, то для нее среди других выполняются и неравенства (2) и (3).

Докажем и обратное утверждение: если f удовлетворяет неравенствам (2) и (3), то она приведена по Минковскому. Пусть $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ вектор с целыми координатами и пусть о.н.д. $(\ell_j, \ldots, \ell_n) = 1$ для некоторого j $(1 \leq j \leq n)$. Мы должны доказать, что

$$f(\ell_1, \ldots, \ell_n) \geq a_{jj}. \tag{22}$$

I°. Не нарушая общности, можно считать, что все $\ell_i \geq 0$ для $i = 1, \ldots, n$; ибо иначе форму f можно заменить на форму $f_1 = f(\pm x_1, \ldots, \pm x_n)$, где знаки выбраны так, чтобы

$$f_1(|\ell_1|, \ldots, |\ell_n|) = f(\ell_1, \ldots, \ell_n).$$

2°. Пусть все координаты вектора ℓ, кроме одной равны нулю и о.н.д. $(\ell_j, \ldots, \ell_n) = 1$. Тогда $\ell = e_i$ для некоторого $i \geq j$ и

$$f(\ell) = f(e_i) = a_{ii} \geq a_{jj}$$

в силу (2). Итак, в этом случае неравенство (22) доказано. Поэтому в дальнейшем считаем, что имеется, по крайней мере, две ненулевых координаты.

3°. Предварительно докажем следующие вспомогательные утверждения.

<u>Лемма 4</u>. Пусть f удовлетворяет условиям (3). Пусть целый вектор $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ отличен от векторов таблицы (4), $\ell_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем имеются ровно s ненулевых координат $(2 \leq s \leq n \leq 6)$. Тогда существует целый вектор $\ell' = (\ell'_1, \ldots, \ell'_n)$ с условиями

I) $0 \leq \ell'_i \leq \ell_i$ $(i = 1, \ldots, n)$;

2) $\ell'_i > 0$, если $\ell_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;

3) $\ell'_1 + \ldots + \ell'_n < \ell_1 + \ldots + \ell_n$;

4) $f(\ell') \leq f(\ell)$.

<u>Доказательство.</u> Не нарушая общности, мы предполагаем, что для $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ выполняются условия (II). Ибо иначе мы можем форму f заменить на форму $f' = f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$ так, чтобы

6 30

$\ell_{\kappa_1} \le \ldots \le \ell_{\kappa_n}$. Доказав же лемму 4 для формы ς', мы ее докажем тем самым и для формы ς.

В следующей таблице дается построение вектора ℓ' по вектору ℓ (для разных s и при различных условиях, налагаемых на координаты вектора ℓ). В примечании указано основание (ссылка на различные случаи леммы I–3), в силу которого для вновь построенного вектора ℓ' выполнены условия I) – 4)

s	условие на	построение вектора	примечание
2	$\ell_{n-1} < \ell_n$	$\ell' = \ell - e_n$	Л. 1. при $\kappa = 0$
	$\ell_{n-1} = \ell_n$	$\ell' = \frac{1}{\ell_n}\ell$	$\ell = \ell_{n-1} e_{n-1,n}$
3	$\ell_{n-2} < \ell_n$	$\ell' = \ell - e_n$	Л. 1. при $\kappa = 0$
	$\ell_{n-2} = \ell_n$	$\ell' = \frac{1}{\ell_n}\ell$	$\ell = \ell_n e_{n-2,n-1,n}$
4	$2\ell_n > \sum\limits_{i=n-3}^{n-1} \ell_i$	$\ell' = \ell - e_n$	Л. 1. при $\kappa = 0$
	$2\ell_n \le \sum\limits_{i=n-3}^{n-1} \ell_i$ $2\ell_{n-1} > \sum\limits_{i=n-3}^{n-2} \ell_i$	$\ell' = \ell - e_{n-1,n}$	Л. 1. при $\kappa = 1$
	$2\ell_m \le \sum\limits_{i=n-3}^{m-1} \ell_i \; (m=n-1,n)$ $\ell_{n-2} > 1$	$\ell' = \ell - e_{n-2,n-1,n}$	Л. 1. при $\kappa = 2$
5	$2\ell_n > \sum\limits_{i=n-4}^{n-1} \ell_i$	$\ell' = \ell - e_n$	Л. 1. при $\kappa = 0$
	$2\ell_n \le \sum\limits_{i=n-4}^{n-1} \ell_i$ $2\ell_{n-1} > \sum\limits_{i=n-4}^{n-2} \ell_i$	$\ell' = \ell - e_{n-1,n}$	Л. 1. при $\kappa = 1$
	$2\ell_m \le \sum\limits_{i=n-4}^{m-1} \ell_i \; (m=n-1,n)$ $2\ell_{n-2} > \sum\limits_{i=n-4}^{n-3} \ell_i$	$\ell' = \ell - e_{n-2,n-1,n}$	Л. 1. при $\kappa = 2$

	$2\ell_m \leq \sum\limits_{i=n-4}^{m-1} \ell_i \ (m=n-2,\ n-1, n)$, $\ell_{n-3}+\ell_{n-2}+\ell_{n-1} > \ell_{n-4}+\ell_n$ $\ell_{n-3} > 1$	$\ell'=\ell-e_{n-3,n-2,n-1,n}$	Л. 1. при $\kappa=3$
	$2\ell_m \leq \sum\limits_{i=n-4}^{m-1} \ell_i \ (m=n-2, n-1, n)$, $\ell_{n-3}+\ell_{n-2}+\ell_{n-1} \leq \ell_{n-4}+\ell_n$ $\ell_{n-3} > 1$	$\ell' = \frac{1}{\ell_{n-4}}\ell$	$\ell=\ell_{n-4}\, e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n}$
	$2\ell_6 > \sum\limits_{i=1}^{5} \ell_i$	$\ell'=\ell-e_6$	Л. 1. при $\kappa=0$
	$2\ell_6 \leq \sum\limits_{i=1}^{5} \ell_i$ $2\ell_5 > \sum\limits_{i=1}^{4} \ell_i$	$\ell'=\ell-e_{5,6}$	Л. 1. при $\kappa=1$
	$2\ell_m \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=5,6)$, $2\ell_4 > \sum\limits_{i=1}^{3} \ell_i$	$\ell'=\ell-e_{4,5,6}$	Л. 1. при $\kappa=2$
$s=n=6$	$2\ell_m \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=4,5,6)$, $\ell_3 > \ell_1$ $\ell_3+\ell_4+\ell_5 > \ell_1+\ell_2+\ell_6$	$\ell'=\ell-e_{3,4,5,6}$	Л. 1. при $\kappa=3$

$2\ell_m \le \sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=4,5,6)$, $\ell_3 > \ell_1$ $\ell_3+\ell_4+\ell_5 \le \ell_1+\ell_2+\ell_6$ $\ell_2 = 1$	$\ell' = \ell - e_{3,4,5,6,6}$	$\ell = e_{1,2} + 2e_{3,4,5,6,6}$ Л. 2. при $к=3$
$2\ell_m \le \sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=4,5,6)$, $\ell_3 > \ell_1$ $\ell_3+\ell_4+\ell_5 \le \ell_1+\ell_2+\ell_6$ $\ell_2 > 1$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,6,6}$	$\ell_6 > \ell_5$, $\ell_2 \geq \ell_1$ $\ell_2 + \ell_4 \geq \ell_5$ Л. 2. при $к=4$
$2\ell_m \le \sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=4,5,6)$, $\ell_3 = \ell_2 = \ell_1 > 1$ $\ell_2+\ell_3+\ell_4 > \ell_1+\ell_5$ $\ell_2+\ell_6 > \ell_1+\ell_5$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,6,6}$	Л. 2 при $к=4$
$2\ell_m \le \sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=4,5,6)$, $\ell_3 = \ell_2 = \ell_1 > 1$ $\ell_2+\ell_3+\ell_4 \le \ell_1+\ell_5$	$\ell' = \ell - e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$	$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4$ $\ell_5 = 2\ell_1$ Л. 3. (19)
$2\ell_m \le \sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \ (m=4,5,6)$ $\ell_3 = \ell_2 = \ell_1 > 1$ $\ell_2+\ell_6 \le \ell_1+\ell_5$ $\ell_5 > \ell_3$	$\ell' = \ell - e_{1,2,3,4,5,5,6}$	$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$ $\ell_5 = \ell_6$ $\ell_5 > \ell_3$ Л. 3. (20)

	$2\ell_m \le \sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \quad (m=4,5,6),$ $\ell_3=\ell_2=\ell_1>1$ $\ell_2+\ell_6 \le \ell_1+\ell_5$ $\ell_5=\ell_3$	$\ell'=\frac{1}{\ell_1}\ell$	$\ell=\ell_1 e_{1,2,3,4,5,6}$

Простыми рассуждениями убеждаемся, что условия, налагаемые на координаты ℓ_i векторов ℓ, исчерпывают все возможные векторы, не входящие в таблицу (4). Заметим здесь лишь, что если $\ell_{n-3}=1$, то из условий

$$2\ell_{n-m} \le \sum_{i=1}^{n-m-1} \ell_i \qquad (m=0,1,2)$$

можно вывести, что ℓ – табличный вектор. Условия применимости лемм также проверяются достаточно просто.

Лемма 4 доказана.

Для того, чтобы сформулировать следующее предложение, условимся называть переходы от ℓ к ℓ', указанные в таблице, содержащейся в доказательстве леммы 4, редукциями леммы 4.

Дополнение к лемме 4. Вектор $\ell^{(1)}=e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$ редукциями леммы 4 может быть получен лишь из одного из следующих векторов $m^{(1)}=e_{1,2,3,4}+3e_{5,6}$; $m^{(2)}=e_{1,2}+2e_{3,4}+3e_{5,6}$;

$$m^{(3)}=e_1+2e_{2,3,4}+3e_5+4e_6; \qquad m^{(4)}=e_1+2e_{2,3}+3e_{4,5,6};$$

$$m^{(5)}=2e_{1,2,3,4,5,6,6}; \qquad m^{(6)}=2e_{1,2,3,4,5,5,6,6}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть редукции таблицы, отвечающие $s=n=6$. Эти редукции осуществляются вычитанием из исходного вектора ℓ векторов e_i; $e_{i,j}$; $e_{i,j,k}$; $e_{i,j,k,m}$; $e_{i,j,k,m,m}$; $e_{i,j,k,m,p,p}$; $e_{i,j,k,m,p,p,q,q}$. Учитывая, что $\ell^{(1)}=e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$ и непосредственно проверяя выполнения для ℓ условий осуществлении редукции, мы приходим к указанному набору $m^{(i)}$.

Лемма 5. Для любой формы f от шести переменных, удовлетворяющей условиям (3),

$$f(m^{(i)}) \geq \max_{j=1,\dots,6} a_{jj} \qquad (i=1,\dots,6).$$

Доказательство. Имеем

$$f(m^{(1)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6}) + 2\sum_{i=1}^{4}\{2f(e_i;\ e_{5,6}) + f(e_{5,6})\}$$

$$f(m^{(2)}) = \sum_{i=1}^{2}\{2f(e_i;\ e_{3,4,5,6}) + f(e_{3,4,5,6})\} +$$

$$+\sum_{i=3}^{4}\{2f(e_i, e_{5,6}) + f(e_{5,6})\} +$$

$$+ f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6}) + f(e_{3,4,5,6})$$

$$f(m^{(3)}) = \{f(e_{1,2,3,4,5,5,6}) - f(e_1)\} +$$

$$+\{f(e_{2,3,4,5,6,6}) - f(e_5)\} +$$

$$+\{f(e_{2,3,4,5,5,6,6}) - f(e_{2,3,4,5,6})\} +$$

$$+ f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6}) + f(e_{2,3,4,5,6})$$

$$f(m^{(4)}) = \{2f(e_1;\ e_{2,3,4,5,6}) + f(e_{2,3,4,5,6})\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\{2f(e_i;\ e_{4,5,6}) + f(e_{4,5,6})\} +$$

$$+\sum_{i=2}^{3}\{2f(e_i;\ e_{4,5,6}) + f(e_{4,5,6})\} +$$

$$+ f(e_{1,2,3,4,5,6}) + 2f(e_{2,3,4,5,6})$$

$$f(m^{(5)}) = \sum_{i=1}^{2}\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) - f(e_i)\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\{2f(e_i;\ e_6) + f(e_i)\} +$$

$$+\sum_{i=3}^{5}\{2f(e_i;\ e_6) + f(e_6)\} +$$

$$+ f(e_{1,2,3,4,5,6}) + f(e_{1,2,3,4,5,6,6})$$

$$f(m^{(6)})=2\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\}+$$

$$+\sum_{i=5}^{6}\{2f(e_1;\ e_i)+f(e_1)\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{4}\{2f(e_i;\ e_{5,6})+f(e_{5,6})\}+$$

$$+f(e_{1,2,3,4,5,6})+f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6}).$$

В силу неравенств (5),(6) и (7) выражения в фигурных скобках неотрицательны; сумма других слагаемых не меньше, чем $\max\limits_{i=1,\dots,6} f(e_i)$

Лемма 5 доказана.

4^0. Пусть f – форма, удовлетворяющая условиям (2) и (3) теоремы. В силу леммы 4 для любого целого неотрицательного вектора $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ с s $(2\le s\le n\le 6)$ ненулевыми координатами существует такой же табличный вектор $\ell'=(\ell_1',\dots,\ell_n')$ (с условием $\ell_i'>0$, если $\ell_i>0$), что

$$f(\ell)\geq f(\ell').$$

При этом, если $\ell_i=1$, то и $\ell_i'=1$. Таким образом, если последняя ненулевая координата ℓ равна единице, то и последняя ненулевая координата ℓ' равна единице. В силу (3)

$$f(\ell)\geq f(\ell')\geq f(e_j)=a_{jj},$$

где $\ell_j=\ell_j'=1$ и $\ell_i=\ell_i'=0$ для $i>j$.

Поэтому в дальнейшем считаем, что последняя ненулевая координата ℓ больше единицы.

5^0. При $s=2,3,4$ для любого целого вектора ℓ с s положительными координатами в силу леммы 4 $\ell_i'=1$, если $\ell_i=0$; $\ell_i'=0$, если $\ell_i=0$ $(i=1,\dots,n)$. В силу условий (3)

$$f(\ell)\geq f(\ell')\geq \max_{\ell_i\neq 0} f(e_i)$$

и неравенство (22) справедливо.

6^0. При $s=5$ в силу леммы 4 $f(\ell)\geq f(\ell')$, где у табличного вектора ℓ' хоть один из последних двух положительных координат единица, то в силу (3) имеем

$$f(\ell)\geq f(\ell')\geq f(e_k)=a_{kk},$$

где k – предпоследний индекс положительных координат ℓ. Учитывая п.5^0, отсюда выводим неравенство (22).

7^0. Пусть $s=n=6$; $\ell=(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ и для $j=4$ о.н.д. $(\ell_j, \ldots, \ell_6)=1$. По лемме 4 существует табличный вектор $\ell'=(\ell'_1, \ldots, \ell'_6)$, у которого среди последних трех координат хоть одна единица. Тогда в силу (3) имеем

$$f(\ell) \geqslant f(\ell') \geqslant a_{44}.$$

Случай $\ell_6=1$ рассматривался в пункте 4^0. Следовательно, для доказательства (22) нам достаточно исследовать случай о.н.д. $(\ell_5, \ell_6)=1$ Докажем, что в этом случае

$$f(\ell) \geqslant a_{55}. \tag{23}$$

8^0. Пусть $s=n=6$ и о.н.д. $(\ell_5, \ell_6)=1$. Если бы мы при помощи леммы 4 пришли к вектору ℓ' таблицы (4), у которого на пятом или на шестом месте стояла единица, то

$$f(\ell) \geqslant f(\ell') \geqslant a_{55}.$$

Поэтому для доказательства (23) нам остается рассмотреть векторы ℓ' таблицы (4), у которых $\ell'_5>1$, $\ell'_6>1$, т.е. векторы

$$\ell^{(1)}=(1,1,1,1,2,2), \quad \ell^{(2)}=(1,1,1,1,2,3), \quad \ell^{(3)}=(1,1,1,1,3,2).$$

9^0. Покажем, что

$$f(\ell^{(2)}) \geqslant a_{66} \geqslant a_{55}, \qquad f(\ell^{(3)}) \geqslant a_{55}. \tag{24}$$

Имеем

$$f(e_{i,j,k,\ell,m,m,r,r,r}) = \{f(e_{i,j,k,\ell,m,r,r}) - f(e_m)\} +$$

$$+\sum_{t=i,j,k,\ell} \{2f(e_t;\, e_{m,r}) + f(e_{m,r})\} + f(e_r) \geqslant f(e_r) \geqslant f(e_r),$$

где i, j, k, ℓ, m, r – различные индексы. В силу (5) и (6) выражения в фигурных скобках неотрицательны. Отсюда следуют неравенства(24), а с ним и неравенство (23).

10^0. Чтобы доказать теорему, нам остается заметить, что в силу леммы 5 для всех векторов $m^{(i)}$ $(i=1, \ldots, 6)$, из которых получается вектор $\ell^{(1)}=(1,1,1,1,2,2)$ редукцией леммы 4

$$f(m^{(i)}) \geqslant a_{55} \qquad (i=1, \ldots, 6),$$

и мы доказали неравенство (23), а с ним – и неравенство (22).

Теорема доказана.

Приношу благодарность А.В.Малышеву за постановку задачи и

внимание к работе и С.С.Рышкову за возможность ознакомиться с его работой [5] в рукописи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Minkowski H. Sur la reduction des formes quadratiques positives quaternaires. Gesamm. Abh., Bd I, 1911, 145-148.

[2] Minkowski H. Gesamm. Abh., Bd I, 1911, 217-218.

[3] Minkowski H. Diskontinuitätsbereich fur arithmetische Aequivalenz. Gesamm. Abh., Bd II, 1911, 53-100.

[4] van der Waerden B.L. Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Acta mathem., 1956, 96, 265-309.

[5] Рышков С.С. К теории приведения положительных квадратичных форм по Эрмиту-Минковскому. Этот сборник стр.37-64.