

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Ковалев, А. А. Крупнов, Численное моделирование химически неравновесного течения частично ионизованного воздуха в вязком ударном слое,  
*Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, номер 2, 54–59

<https://www.mathnet.ru/vmumm1992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

24 апреля 2025 г., 19:26:14



**5. Выводы.** Анализ полученных данных показал: значения  $C_x$  для случая  $\varepsilon < 0$  всегда превышают значения  $C_x$  при  $\varepsilon > 0$ ;

увеличение площади лопастей приводит к существенному увеличению скорости вращения цилиндров;

величина скорости вращения каждого ротора при полной компоновке модели больше, чем для случая одиночного авторотирующего цилиндра;

максимальную скорость вращения на исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса можно получить как при  $\varepsilon > 0$ , так и при  $\varepsilon < 0$ . Однако  $|\varepsilon_{\max}|$  в первом случае достигается при увеличении расстояния между цилиндрами, а во втором — при его уменьшении.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкадова В. П. Вращающийся цилиндр в потоке вязкой несжимаемой жидкости//Механ. жидкости и газа. 1982. № 1. 25—33.
2. Bard H. M., Dennis S. C. R. Time-dependent viscous flow past an impulsively started rotating and translating circular cylinder//J. Fluid. Mech. 1985. 447—484.
3. Griffiths R. T., Ma C. Y. Differential boundary layer separation effects in the flow over a rotating cylinder//Aeronaut. J. 1969. 73. 524—526.
4. Козлов В. П. Эффекты движущейся стенки, возникающие при поперечном обтекании вращающегося цилиндра дозвуковым потоком//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. 79—84.
5. Задачи физико-механического практикума по газовой и волновой динамике: Учебное пособие/Под ред. В. П. Козлова, Е. А. Сагомоян. М., 1993.
6. Jacobson T. D. Magnus characteristics of arbitrary rotating bodies//AGARD. 1973. N 171.
7. Коваленко В. М. и др. Обтекание вращающегося и неподвижного кругового цилиндра вблизи плоского экрана//Изв. Сиб. отд. СССР. Сер. техн. н. 1983. № 13, вып. 3. 50—59.
8. Miller M. C. Wind-tunnel measurements of the surface pressure distribution on a spinning magnus rotor//J. Aircraft. 1978. 16, N 12. 815—822.
9. Шкадова В. П., Фалуниин М. П., Козлов В. П., Фещенко С. А. Вопросы аэродинамики вращающихся тел (в печати).
10. Mokhtarian F., Modi V. F., Yokomizo T. Rotating air scoop as airfoil boundary layer control//J. Aircraft. 1988. 25, N 10. 973—975.
11. Шаповалов В. М. и др. Течение неьютоновской жидкости в зазоре между вращающимся цилиндром и проницаемой поверхностью при роторном гранулировании//Инж.-физ. журн. 1982. 54, № 3. 415—422.

Поступила в редакцию  
23.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 533.6.011

**В. Л. Ковалев, А. А. Крупнов**

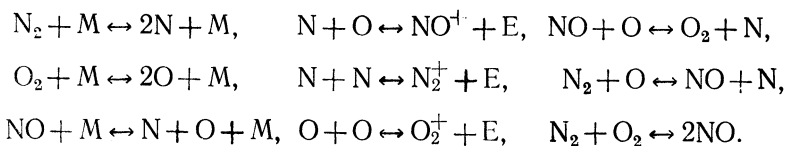
#### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОГО ТЕЧЕНИЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОГО ВОЗДУХА В ВЯЗКОМ УДАРНОМ СЛОЕ**

В настоящей работе сравниваются результаты расчетов уровня ионизации и других характеристик течения в вязком ударном слое около затупленных по сфере конусов с данными баллистических экспериментов  $RAM-C$ , приведенными в [1, 2]. Учитывались многокомпонентная диффузия, неравновесный характер протекания реакций диссоциации и ионизации, а также гетерогенные каталитические реакции. Эксперименты  $RAM-C$  исследовались в [1] в рамках уравнений вяз-

кого ударного слоя, а в работе [2] — на основе параболизированной системы уравнений Навье—Стокса. При этом использовались различные модели колебательной релаксации молекул. Однако был сделан ряд упрощающих предположений при описании диффузионных свойств смеси и расчете концентраций заряженных компонент. Так, в [1] в рамках девятикомпонентной модели воздуха заряженные частицы не учитывались при определении концентраций нейтральных компонент и в уравнении энергии, а рассчитывались после решения задачи о нейтральной смеси. Для описания диффузионных свойств компонент применялись соотношения Фика с постоянными числами Шмидта. Такие же предположения были сделаны и в [2] в рамках пяти- и семикомпонентных моделей воздуха, причем концентрация электронов определялась из условий Саха.

Сверхзвуковое обтекание наветренной поверхности затупленных конусов исследовалось в рамках модели полного вязкого ударного слоя (ПВУС). Уравнения ПВУС следуют из уравнений Навье—Стокса, если в последних оставить члены порядка  $O(1)$  и  $O(Re^{-1/2})$  и пренебречь членами порядка  $O(Re^{-1})$ , ответственными за молекулярный перенос массы, импульса и энергии вдоль координатной линии, связанной с основным направлением потока. Система уравнений ПВУС записывается в переменных типа Дородницына ( $\xi, \eta$ ) [3]. В полученной системе физическая координата  $y$  рассматривается как искомая функция  $y = y(\xi, \eta)$ . Уравнение для  $y$  является следствием уравнений состояния, неразрывности и проекции уравнения импульсов на нормаль. В качестве граничных условий для уравнений ПВУС на внешней границе (искомой ударной волне) используются обобщенные условия Ренкина—Гюгионо, учитывающие эффекты молекулярного переноса в зоне скачка уплотнения с тем же асимптотическим порядком точности по числу  $Re$ , что и сами уравнения ПВУС. Граничные условия на теле аналогичны граничным условиям для уравнений пограничного слоя. Уравнения полного вязкого ударного слоя в настоящее время широко используются для исследования сверхзвукового безотрывного обтекания гладких тел вязким газом в широком диапазоне чисел Рейнольдса, охватывающем течения от режимов со скольжением до режимов с образованием как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоя на теле.

В рамках модели полного вязкого ударного слоя рассматривалось неравновесное течение диссоциированного и частично ионизированного воздуха ( $O_2, N_2, NO, NO^+, O_2^+, N_2^+, O, N, E$ ), между компонентами которого протекают реакции диссоциации и рекомбинации, ассоциативной ионизации и обменные:



Смесь считалась квазинейтральной. Использовалась сводка скоростей гомогенных химических реакций, приведенная в [4], константы равновесия и теплоемкости компонент определялись по данным работы [5]. Коэффициенты переноса рассчитывались по формулам работы [6]. Предполагалось, что вращательные и колебательные степени свободы находятся в равновесии с поступательными. Однако в какой-то степени колебательно-диссоционное взаимодействие учитывалось, поскольку

используемые константы скоростей химических реакций частично включают в себя этот эффект.

На непроницаемой и неразрушаемой каталитической поверхности обтекаемого тела выставлялись условия непротекания и прилипания и предполагалось, что поверхность тела изотермическая. Поверхность считалась некаталитической по отношению к рекомбинации атомов и идеально каталитической к рекомбинации заряженных компонент. Также рассматривались варианты, в которых поверхность предполагалась некаталитической к рекомбинации всех компонент. Были проведены расчеты и для семикомпонентной модели воздуха ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $NO^+$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $E$ ) при тех же условиях на обтекаемой поверхности.

Для решения уравнений ПВУС применялся метод глобальных итераций по продольной составляющей градиента давления и форме головной ударной волны [7]. На первой глобальной итерации угол наклона ударной волны задавался аналитически [3]:

$$\operatorname{tg} \beta_s = \frac{1}{H_1} \frac{dy_s}{dx} = c \left( \sqrt{(2c-1)/c^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right), \quad \beta_s = \beta - \alpha.$$

Здесь  $\beta$ ,  $\alpha$  — углы наклона ударной волны и контура тела к оси симметрии,  $H_1 = 1 + y/R$  — коэффициент Ламе,  $R$  — радиус кривизны контура обтекаемой поверхности. Для функции  $c=c(x)$  предложено полуэмпирическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1-k}{2R} c \sqrt{2c-1}.$$

При этом использовались аппроксимационные формулы [8] для отхода и кривизны ударной волны в критической точке, непрерывность кривизны ударной волны в точке сопряжения сфера—конус и стремление на бесконечности угла ее наклона к углу Маха; параметр  $k$  лежит в пределах от 0,5 до 1 (для сферы он равен отношению кривизн ударной волны и тела при  $\alpha=0$ ). Продольная составляющая градиента давления на первой глобальной итерации аппроксимировалась согласно приближению Вигнерона [9]. При переходе к следующей глобальной итерации для вычисления новых значений продольного градиента давления и формы ударной волны (производной по продольной координате от отхода ударной волны) распределение давления вдоль координатной линии  $\eta = \operatorname{const}$  и отход ударной волны сглаживались с помощью минимизации функционала

$$\int_0^{\zeta_{\max}} [(\varphi - \varphi_0)^2 + \lambda^2 \dot{\varphi}^2] d\zeta.$$

Здесь  $\varphi_0$ ,  $\varphi$  — соответственно функция до и после минимизации,  $\zeta$  — длина дуги продольной координатной линии  $\eta = \operatorname{const}$ ,  $\lambda$  — параметр сглаживания [10]. Точка обозначает производную по  $\zeta$ . При граничных условиях  $\varphi(0) = \varphi_0(0)$ ,  $\varphi(\zeta_{\max}) = \varphi_0(\zeta_{\max})$  экстремальная задача сводится к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\lambda^2 \frac{d\dot{\varphi}}{d\zeta} = \varphi - \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = \dot{\varphi},$$

которая решалась разностным методом четвертого порядка точности аппроксимации. Существенно, что при этом одновременно находились сглаженные поля  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ . Такой способ вычисления  $\dot{\varphi}$  эффективно учитывает влияние всех точек вдоль каждой координатной линии  $\eta = \operatorname{const}$ .

и тем самым распространение возмущений вверх по потоку. Кроме того, в точке разрыва кривизны контура тела при высоком порядке аппроксимации формы ударной волны и проекции градиента давления не требуется применять специальные разностные формулы, как в работах [11—13], если поместить один из расчетных узлов в эту точку.

При известных продольной составляющей градиента давления и форме ударной волны система уравнений полного вязкого ударного слоя решалась разностным методом [14], разработанным ранее авторами для решения нелинейных, существенно взаимосвязанных систем уравнений параболического типа. Использовалась неявная разностная схема четвертого порядка точности аппроксимации по поперечной координате, а к нелинейной системе разностных уравнений применялся метод Ньютона. Система для поправок решалась векторной прогонкой.

Исследовалось течение в ударном слое у аппаратов серии RAM—С, представляющих собой затупленные по сфере радиуса 15,24 см конусы с углом полураствора  $9^\circ$ . Результаты обработки данных натурального эксперимента по измерению уровня электронной концентрации у таких аппаратов представлены в [1, 2]. На рис. 1 приведены экспериментальные и полученные в расчетах (пунктирные линии) распределения максимального значения поперек ударного, слоя вдоль боковой поверхности числовой плотности электронов  $n_e$  на высотах полета 71 и 81 км. Для рассмотренных высот наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментальными значениями. На рис. 2 и 3 показаны распределения числовой плотности электронов для различных моделей воздуха в сечении  $x/R=8,2$  при полете на высотах

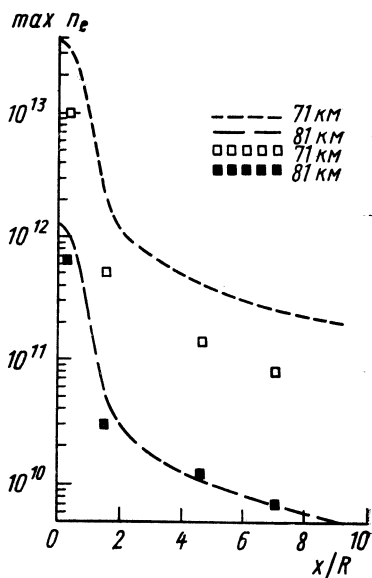


Рис. 1

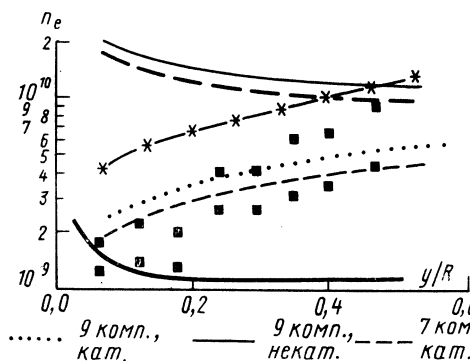


Рис. 2

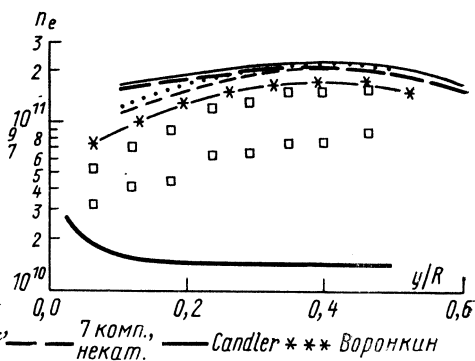


Рис. 3

81 и 71 км соответственно. Отметим, что вычисленная в [2] числовая плотность электронов  $n_e$  (сплошная линия), в отличие от экспериментальных данных (квадратики), убывает с увеличением поперечной координаты и может отличаться от экспериментальных значений почти

на порядок. Это вызвано тем, что в [2] поверхность тела предполагается некаталитической по отношению к рекомбинации заряженных частиц. Наши расчеты как для девятикомпонентной модели воздуха, так и для семикомпонентной хорошо согласуются с экспериментом, если считать поверхность тела идеально каталитической относительно рекомбинации заряженных частиц. Расчеты, проведенные в работе [1] с этими же граничными условиями, также хорошо согласуются с экспериментальными данными. Использование некаталитических граничных условий для заряженных компонент приводит к неверному характеру распределения  $n_e$ , как в [2]. Отметим, что результаты расчетов для семи- и девятикомпонентной моделей воздуха практически не отличаются. На рис. 4, 5 сравниваются распределения давления на поверхности тела

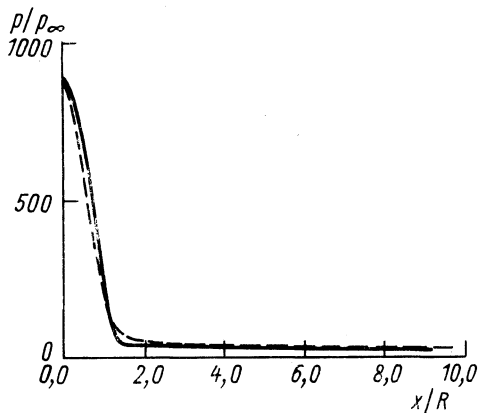


Рис. 4

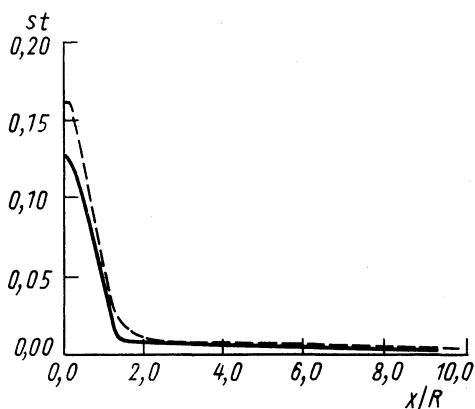


Рис. 5

и числа Стантона с расчетами [2] для высоты 71 км (пунктирные линии). Применяемые термохимические модели не оказывают влияния на распределение давления, но в окрестности точки торможения их влияние на тепловой поток к поверхности существенно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта № 94-01-00634-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронкин В. Г. Неравновесный вязкий ударный слой на притупленных конусах//Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1979. № 6. 15—20.
2. Candler G., MacCormack R. W. The computation of hypersonic ionized flow in chemical and thermal nonequilibrium//AIAA Paper. 1988. N 511.
3. Тирский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким потоком газа при наличии вдува//Научные труды Ин-та механики МГУ. 1975. № 39. 5—38.
4. Провоторов В. П., Рябов В. В. Исследование неравновесного гиперзвукового вязкого ударного слоя//Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2111. 142—156.
5. Гурвич Л. В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М., 1978.
6. Гиришфельдер Дж., Кертис И., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., 1961.
7. Ковалев В. Л., Крупнов А. А. Численный метод решения уравнений многокомпонентного турбулентного вязкого ударного слоя у каталитической поверхности//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 3. 66—74.
8. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., 1975.

9. Vigneron Y. C., Rakich J. V., Tannehill J. C. Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges//AIAA Paper. 1978. N 1137.
10. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Н. Численные методы. М., 1987.
11. Васильевский С. А., Тирский Г. А., Утюжников С. В. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя//Докл. АН СССР. 1986. 290, № 5. 1058—1061.
12. Srivastava B. N., Werle M. J., Davis R. T. Viscous shock-layer solutions for hypersonic spherecones//AIAA J. 1978. 16, N 2. 137—144.
13. Глазков Ю. В., Тирский Г. А., Щербак В. Г. Метод решения параболизированных уравнений Навье—Стокса с использованием глобальных итераций//Матем. моделирование. 1990. 2, № 8. 31—41.
14. Ковалев В. Л., Крупнов А. А. Многокомпонентный химически реагирующий турбулентный вязкий ударный слой у каталитической поверхности//Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1989. № 2. 144—148.

Поступила в редакцию  
09.03.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 530.1

А. Н. Голубятников, А. Г. Калугин

#### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД С ВЫСОКОЙ АФФИННОЙ СИММЕТРИЕЙ

Исследован вопрос о существовании вещественных характеристических скоростей распространения поперечных волн в простых несжимаемых анизотропных средах, обладающих четырехпараметрическими группами внутренней симметрии, что может быть связано с устойчивостью среды. Показано, что устойчивыми могут быть только среды нематического и смектического типов, известные в физике жидких кристаллов.

1. Пусть удельная внутренняя энергия  $U$  идеальной несжимаемой среды зависит только от одной комбинации  $I$  сопутствующих компонент метрического тензора  $\hat{g}_{qi} = x_q^i x_i^j \delta_{ij}$ ,  $\det(g_{qi}) = 1$ , где  $x_q^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^q}$  — компоненты матрицы дисторсии,  $x^i$  — декартовы эйлеровы и  $\xi^q$  — лагранжевы координаты точек среды [1]. Причем функция  $I(\hat{g}_{qi})$  в данной точке среды инвариантна относительно четырехпараметрической группы линейных унимодулярных преобразований лагранжевых переменных, не меняющих координат этой точки и сохраняющих  $\det(\hat{g}_{qi})$ . Не исключено, что в случае неоднородной среды группа симметрии или ее представление может меняться от точки к точке.

Ниже приведены допустимые согласно классификации [2] инварианты  $I$  и ограничения на  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — векторы, задающие свойства анизотропии среды, контравариантные и соответственно ковариантные компоненты которых в сопутствующей системе координат  $\xi^q$  не зависят от закона движения среды  $x^i(\xi^q, t)$ :

$$1) I = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{A}|}, \text{ где } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A} \text{ ограничены соотношениями } \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = 0, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0;$$