Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 515.14+515.16

Квазиторические полностью нормально расщепимые представители в кольце комплексных кобордизмов

Г. Д. Соломадин

Гладкое стабильно комплексное многообразие называется полностью касательно/нормально расщепимым (англ. totally tangentially/normally split manifold), если его стабильно касательное/нормальное расслоение, соответственно, изоморфно сумме комплексных линейных расслоений. В статье доказано, что каждый класс градуировки выше 2 кольца комплексных кобордизмов содержит квазиторическое полностью касательно и нормально расщепимое многообразие.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: комплексные кобордизмы, квазиторические многообразия, башни Ботта, вычеты биномиальных коэффициентов.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11818

1. Введение

Семейство элементов кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* называется *порождающим*, если оно мультипликативно порождает это кольцо. В настоящей работе построены квазиторические многообразия, касательные и нормальные расслоения которых расщепимы в сумму комплексных линейных расслоений. Мы показываем, что классы кобордизмов этих многообразий дают порождающее семейство кольца Ω_U^*. Далее будем называть полностью касательно/нормально расщепимое многообразие ПКР/ПНР-*многообразием*, соответственно. В результате доказано, что представителем каждого класса комплексных кобордизмов градуировки большей 2 можно выбрать квазиторическое ПКР- и ПНР-многообразие. Напомним, что любое квазиторическое многообразие является ПКР-многообразием [1].

Семейство порождающих кольца Ω_U^* называется семейством *образующих* в случае, если в каждой (четной) градуировке Ω_U^* имеется единственный элемент этого семейства. В работе [2] Рэй явно построил семейство стабильно комплексных многообразий, каждое из которых является ПКР- и ПНР-многообразием. Построенное семейство доставляет набор мультипликативных порождающих кольца комплексных кобордизмов Ω_U^*. Рэй также предъявил стабильно комплексные ПКР- и ПНР-многообразия, представляющие обратные к классам элементов построенного им

Работа выполнена в МИАН им. В. А. Стеклова за счет гранта РНФ № 14-11-00414.

© Г. Д. Соломадин, 2019

семейства в Ω_U^*. Операция связной суммы стабильно комплексных многообразий согласована с ПКР/ПНР-свойствами. Из этих наблюдений вытекает

Теорема 1 [2; теорема 3.9]. *Каждый элемент градуировки больше* 2 *кольца комплексных кобордизмов* Ω_U^* *содержит представитель, являющийся одновременно* ПКР- *и* ПНР-*многообразием.*

В [3] Бухштабер и Рэй построили торические многообразия, являющиеся мультипликативными порождающими кольца Ω_U^*. Связное неособое комплексное алгебраическое многообразие X называется *торическим многообразием*, если X можно наделить эффективным действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^{\dim_{\mathbb{C}} X}$ с открытой плотной орбитой (см. [4]). Отметим, что классические гиперповерхности Милнора $H_{i,j}$, доставляющие семейство порождающих кольца Ω_U^* [5], не являются торическими многообразиями при $2 \leqslant i \leqslant j$ (см., например, предложение 4). Связная сумма торических многообразий не (комплексно) кобордантна торическому многообразию; препятствием к этому является род Тодда, принимающий значение 1 на любом торическом многообразии.

В работе [1] Бухштабер, Панов и Рэй определили операцию *бриллиантовой суммы* в (большей) категории квазиторических многообразий. Для любых двух квазиторических многообразий их бриллиантовая сумма кобордантна связной сумме данных многообразий. “-1”-проблема нахождения многообразия с противоположным классом комплексных кобордизмов была решена взятием противоположной ориентации. (Ориентация не входит в определение квазиторического многообразия. Имеется понятие омниориентации квазиторического многообразия, связанное с расщеплением естественной стабильно касательной структуры на квазиторическом многообразии, см. [4].) Так была доказана следующая

Теорема 2 [1]. *Каждый элемент кольца комплексных кобордизмов* Ω_U^* *градуировки* 4 *и выше содержит гладкое квазиторическое* ПКР-*многообразие.*

Отметим результат работ [7], [8] о существовании гладких проективных торических многообразий, доставляющих семейство *образующих* кольца Ω_U^*.

Центральным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 3. *Каждый элемент кольца комплексных кобордизмов* Ω_U^* *градуировки больше* 2 *и выше содержит представитель, являющийся одновременно гладкими квазиторическими* ПКР- *и* ПНР-*многообразиями.*

Приведем краткое содержание разделов статьи. В разделе 2 для гладкого компактного стабильно комплексного многообразия X и набора комплексных линейных расслоений

$$\xi_i \to X, \qquad i = 1, \dots, k+1,$$

определено гладкое многообразие $BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)$, называемое расслоением ограниченных флагов над X. Полученное многообразие является локально тривиальным расслоением над X, слоем которого является многообразие ограниченных флагов BF_k. Многообразие $BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)$ является башней $\mathbb{C}P^1$-расслоений над X.

Мы доказываем, что для ПНР-многообразия X и любого набора комплексных линейных расслоений

$$\xi_i \to X, \qquad i = 1, \dots, k+1,$$

$BF(\xi_{k+1},\dots,\xi_1)$ является ПНР-многообразием. Если X является квазиторическим многообразием, то $BF(\xi_{k+1},\dots,\xi_1)$ также является квазиторическим многообразием. Мы используем эту конструкцию для построения квазиторических ПНР-многообразий в доказательстве основной теоремы 3. Расслоение ограниченных флагов над точкой является многообразием ограниченных флагов BF_n соответствующей размерности. Мы приводим обзор свойств многообразий BF_n.

В разделе 3 рассматриваются известные порождающие кольца Ω_U^*: гиперповерхности Милнора $H_{i,j}$ [5] и многообразия Бухштабера–Рэя $BR_{i,j}$ [3]. Мы показываем, что эти многообразия не являются, вообще говоря, полностью нормально расщепимыми [3]. (Поэтому для доказательства теоремы 3 используются другие многообразия.)

Раздел 4 содержит другие конструкции ПНР-многообразий: раздутия неособых комплексных проективных ПНР-многообразий вдоль трансверсальных пересечений коразмерности 2 неособых гиперповерхностей, бриллиантова сумма двух квазиторических ПНР-многообразий и изменение ориентации квазиторического ПНР-многообразия. Отметим, что первая конструкция корректно определена в классе гладких проективных торических ПНР-многообразий (раздуваемое подмногообразие должно быть инвариантным при действии тора $(\mathbb{C}^\times)^n$).

В разделе 5 определяются гладкие проективные торические ПНР-многообразия $X_{i,j}$, $0<i\leqslant j$, (расслоение ограниченных флагов над BF_i) и $M_{i,j}$, $0<i\leqslant j$ (эквивариантное раздутие некоторого инвариантного подмногообразия в $X_{i,j}$ коразмерности 2) комплексной размерности $i+j$. Далее вводится квазиторическое ПНР-многообразие $N_{i,j}$, $0\leqslant i\leqslant j$, являющееся $M_{i,j}$ при $1<i$, и определяемое при помощи операций бриллиантовой суммы и смены ориентации многообразий $M_{1,j}$, BF_{j+1} при $i=0,1$ (см. определение 5). (Числа Милнора многообразий $N_{i,j}$ оказываются более удобными для сравнения по модулю простого числа.) Известный результат Милнора–Новикова об образующих кольца Ω_U^* сводит поиск образующей среди $\mathbb{Z}$-линейных комбинаций многообразий $N_{i,j}$ (в смысле бриллиантовой суммы и изменения ориентации) к задаче о $\mathbb{Z}$-линейных комбинациях чисел Милнора многообразий $N_{i,j}$. По модулю нахождения чисел Милнора многообразий $X_{i,j}$, $M_{i,j}$ (и, тем самым, чисел $s_{i+j}(N_{i,j})$) (см. раздел 6) и некоторых теоретико-числовых выкладок (которым посвящен раздел 7) мы решаем данную задачу и доказываем основную теорему 3.

В разделе 8 приводится гипотеза о том, что некоторые явно заданные проективные алгебраические многообразия являются торическими. Доказательство этой гипотезы дало бы более простое доказательство основной теоремы 3.

2. Расслоения ограниченных флагов

В этом разделе приведена конструкция локально тривиального расслоения над любым гладким компактным стабильно комплексным многообразием X^{2n}. Слоем этого расслоения является многообразие ограниченных флагов (см. [3], [4; § 7.7]). Расслоение ограниченных флагов является башней $\mathbb{C}P^1$-расслоений, начиная с X^{2n}. Мы показываем, что расслоение ограниченных флагов над ПНР-многообразием также является ПНР-многообразием. В случае базы, являющейся квазиторическим многообразием X, расслоение ограниченных флагов над X естественно наделяется структурой квазиторического многообразия. (Проективизируемые комплексные

расслоения ранга 2 расщепляются в сумму одномерных.) (Под комплексными расслоениями здесь и далее понимаются исключительно комплексные векторные расслоения.) При доказательстве основной теоремы 3 мы будем использовать только расслоения ограниченных флагов, являющиеся башнями Ботта. Тем не менее, формализм расслоений ограниченных флагов оказывается удобным для вычислений.

2.1. Определение и свойства. Пусть даны гладкое компактное стабильно комплексное многообразие X^{2n} и комплексные линейные расслоения $\xi_i \to X$, $i = 1, \dots, k+1$, над ним.

Определение 1. Положим $BF(\xi_1) := X$. Обозначим линейное расслоение $\xi_1 \to X = BF(\xi_1)$ через ζ_1. Для $1 \leqslant i \leqslant k$ $BF(\xi_{i+1}, \dots, \xi_1)$ есть по определению $\mathbb{C}P^1$-*расслоение над* $BF(\xi_i, \dots, \xi_1)$. Именно

$$BF(\xi_{i+1}, \dots, \xi_1) = \mathbb{P}(\zeta_i \oplus \xi_{i+1}) \to BF(\xi_i, \dots, \xi_1). \tag{2.1}$$

Тавтологическое линейное расслоение этого $\mathbb{C}P^1$-расслоения обозначим через $\zeta_{i+1} \to BF(\xi_{i+1}, \dots, \xi_1)$.

Проективизация суммы Уитни комплексных линейных расслоений над гладким комплексном (алгебраическим, торическим, соответственно) многообразием имеет естественную комплексную (алгебраическую, торическую, соответственно) структуру (см., например, [8]). Следовательно, расслоение ограниченных флагов $BF(\xi_{n+1}, \dots, \xi_1)$ имеет естественную комплексную (алгебраическую, торическую, соответственно) структуру, в соответствующем предположении о базе X. Для естественной комплексной структуры на расслоении ограниченных флагов $BF(\xi_{n+1}, \dots, \xi_1)$ имеет место изоморфизм

$$TBF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1) \oplus \underline{\mathbb{C}}^k \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} (\zeta_i \oplus \xi_{i+1})\overline{\zeta_{i+1}} \oplus TX, \tag{2.2}$$

где $\underline{\mathbb{C}}$ есть линейное тривиальное расслоение над $BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)$, и $\overline{\zeta_{i+1}}$ комплексно сопряжено к ζ_{i+1}. (Здесь и далее символы обратных образов и тензорных произведений векторных расслоений по возможности опускаются.)

Замечание 1. Стабильно комплексная структура расслоения ограниченных флагов $BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)$, вообще говоря, зависит от порядка последовательности $\{\xi_{k+1}, \dots, \xi_1\}$ (см. формулу (2.2)).

Обозначим через

$$\zeta_{k+1}^* \to BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1) = \mathbb{P}(\zeta_k \oplus \xi_{k+1}) \to BF(\xi_k, \dots, \xi_1)$$

векторное расслоение, слоем которого над точкой $l \subset (\zeta_k \oplus \xi_{k+1})_x$, $x \in BF(\xi_k, \dots, \xi_1)$ является комплексная прямая $l^\perp$, ортогональная l. (Расслоение $\zeta_k \oplus \xi_{k+1}$ наделяется послойно эрмитовой метрикой, так как является векторным расслоением над компактным стабильно комплексным многообразием.) Обозначим через

$$\zeta_i^* \to BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)$$

обратный образ расслоения $\zeta_i^* \to BF(\xi_i, \dots, \xi_1)$ по отношению к композиции

$$BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1) \to BF(\xi_i, \dots, \xi_1)$$

проекций (2.1), $i = 1, \dots, k+1$. Векторное расслоение $\zeta_i^* \to BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)$ линейно и удовлетворяет тождествам (см. [2]):

$$\zeta_{i+1} \oplus \zeta_{i+1}^* \simeq \zeta_i \oplus \xi_{i+1}, \qquad \zeta_{i+1} \oplus \bigoplus_{k=1}^{i} \zeta_{k+1}^* \simeq \bigoplus_{k=1}^{i+1} \xi_i, \tag{2.3}$$

где $i = 1, \dots, k$.

Для любого комплексного расслоения $\alpha \to X$ существует единственное с точностью до стабильной эквивалентности векторных расслоений "обратное" комплексное расслоение $\theta \to X$, т.е. такое, что $\alpha \oplus \theta \simeq \underline{\mathbb{C}}^r$, где $\underline{\mathbb{C}}^r$ есть тривиальное комплексное векторное расслоение ранга r над X. Из общих свойств операций над векторными расслоениями вытекает следующая

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \alpha' \to X$ суть комплексные линейные векторные расслоения, чьи стабильно обратные комплексные векторные расслоения полностью расщепимы. Пусть $f\colon Y \to X$ есть непрерывное отображение (Y есть произвольное гладкое компактное многообразие). Тогда стабильно обратные комплексные расслоения к $\overline{\alpha}$, $f^*\alpha$, $\alpha \oplus \alpha'$, $\alpha\alpha'$ полностью расщепимы.*

Из леммы 1 немедленно вытекает

Предложение 1. *Пусть X – ПНР-многообразие, и расслоения, стабильно обратные к $\xi_i \to X$, полностью расщепимы при $i = 1, \dots, k+1$. Тогда многообразие $BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1) \to X$ есть ПНР-многообразие.*

Число Милнора $s_n(X^{2n})$ стабильно комплексного многообразия X^{2n} определяется по формуле

$$s_n(X^{2n}) = \langle t_1^n + \dots + t_k^n, [X^{2n}] \rangle \in \mathbb{Z},$$

где $t_1, \dots, t_k$ суть соответствующие образующие Ву.

Положим

$$x_i := c_1(\xi) \in H^2(X; \mathbb{Z}), \qquad i = 1, \dots, k+1.$$

Предложение 2. *Имеем*

$$\begin{aligned} &s_{n+k}(BF(\xi_{k+1}, \dots, \xi_1)) \\ &\qquad = (1 + (-1)^{n+k-1}) \langle (1 + x_{k+1})^{n+k-1} (1 + x_k)^{-1} \cdots (1 + x_1)^{-1}, [X] \rangle. \end{aligned}$$

2.2. Многообразия ограниченных флагов. Пусть $X = pt$. Тогда

$$BF(\xi_{n+1}, \dots, \xi_1) = BF(\underline{\mathbb{C}}, \dots, \underline{\mathbb{C}}).$$

Данное многообразие называется *многообразием ограниченных флагов* и обозначается через BF_n. Многообразие BF_n является торическим многообразием комплексной размерности n. Обозначим через β_i, β_i^*, $i = 0, \dots, n$ векторные расслоения $\zeta_{i+1}, \zeta_{i+1}^* \to BF_n$, соответственно. (Здесь мы следуем обозначениям из работы [2].) Тождество (2.3) для BF_n принимает вид

$$\beta_{i+1} \oplus \beta_{i+1}^* \simeq \beta_i \oplus \underline{\mathbb{C}}, \qquad \beta_i \oplus \bigoplus_{k=1}^{i} \beta_k^* \simeq \underline{\mathbb{C}}^{i+1}, \tag{2.4}$$

где $i = 0, \dots, n$ (см. [2]).

Следствие 1. *BF_n есть* ПНР-*многообразие.*

Пусть $e_0, \dots, e_n$ и $z_0, \dots, z_n$ есть базис в $\mathbb{C}^{n+1}$ и двойственный к нему, соответственно. Введем обозначение $\mathbb{C}_i := \mathbb{C}\langle e_i \rangle$, $i = 0, \dots, n$, где $\mathbb{C}\langle e_i \rangle$ есть линейная оболочка вектора e_i. Тогда BF_n отождествляется с множеством последовательностей прямых $(l_0, \dots, l_n)$, $l_0 := \mathbb{C}_0$, в $\mathbb{C}^{n+1}$, удовлетворяющих включениям

$$l_{i+1} \subset l_i \oplus \mathbb{C}_{i+1}, \qquad i = 0, \dots, n-1. \tag{2.5}$$

Из последнего вытекает, что

$$l_i \subset \mathbb{C}\langle e_0, \dots, e_i \rangle \tag{2.6}$$

для $i = 0, \dots, n$. Следовательно, BF_n является подмногообразием в $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}P^i$, заданным (алгебраическими) условиями (2.5). Пусть $[z_{i,0} : \dots : z_{i,i}]$ суть однородные координаты i-го множителя в произведении $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}P^i$. Согласно стандартной теореме линейной алгебры, условия (2.5) равносильны вырождению всех 2×2-миноров матриц, т.е.

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} z_{i+1,0} & z_{i+1,1} & \dots & z_{i+1,i} \\ z_{i,0} & z_{i,1} & \dots & z_{i,i} \end{pmatrix} = 1, \tag{2.7}$$

где $i = 1, \dots, n-1$.

Обозначим через f_n отображение $f_n \colon BF_n \to \mathbb{C}P^n$, $(l_0, \dots, l_n) \mapsto l_n$. f_n есть ограничение морфизма проекции $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}P^i \to \mathbb{C}P^n$ на BF_n. Тогда

$$f_n^* \eta_n = \beta_n, \tag{2.8}$$

где η_n есть тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Можно показать, что f_n является композицией последовательных раздутий собственных прообразов проективных подпространств

$$\{z_0 = \dots = z_{n-1} = 0\} \subset \dots \subset \{z_0 = z_1 = 0\} \subset \mathbb{C}P^n,$$

заданных соответствующими уравнениями в однородных координатах $[z_0 : \dots : z_n]$ пространства $\mathbb{C}P^n$.

Замечание 2. Приведенное выше описание многообразия ограниченных флагов отличается от стандартного (см. [3], [4; p. 292]), которое обозначим через BF'_n. Однако данные многообразия изоморфны. Сперва нужно сделать замену базиса $\mathbb{C}^{n+1}$ на $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$, $v_i = e_{n+1-i}$, $i = 0, \dots, n$. Включение (2.5) примет вид

$$l_{i+1} \subset l_i \oplus \mathbb{C}\langle v_{n-i} \rangle \qquad \text{для} \quad i = 0, \dots, n.$$

Затем нужно изменить порядок прямых: $L_i = l_{n-i+1}$, так что

$$L_{n-i} \subset L_{n-i+1} \oplus \mathbb{C}\langle v_{n-i} \rangle \qquad \text{для} \quad i = 0, \dots, n.$$

Чтобы получить BF'_n, остается сделать замену $i = j - 1$.

3. Обзор известных мультипликативных порождающих кольца Ω_U^*

В этом разделе показано, что известные мультипликативные порождающие кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* не являются, вообще говоря, квазиторическими ПНР-многообразиями. Следовательно, они не подходят для доказательства теоремы 3.

3.1. Гиперповерхности Милнора. Гиперповерхность Милнора $H_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$, есть по определению гиперповерхность бистепени $(1,1)$ в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ (комплексной размерности $i+j-1$), заданная уравнением

$$\sum_{k=0}^{i} z_k w_k = 0 \tag{3.1}$$

в однородных координатах $[z_0 : \dots : z_i]$, $[w_0 : \dots : w_j]$ в $\mathbb{C}P^i$ и $\mathbb{C}P^j$, соответственно (По определению, $H_{0,0} = \varnothing$.) Слоем тавтологического линейного расслоения $\eta_i \to \mathbb{C}P^i$ над $[l] \in \mathbb{C}P^i$, $l \subset V$, является прямая l. Обозначим через η_i^* векторное расслоение над $\mathbb{C}P^i$, слоем которого над $[l] \in \mathbb{C}P^i$, $l \subset V$, является ортогональное дополнение $l^\perp$ в $\mathbb{C}^{i+1}$. Ясно, что

$$\operatorname{rk} \eta_i^* = i, \qquad \eta_i \oplus \eta_i^* = \underline{\mathbb{C}}^{i+1}.$$

Предложение 3 [9], [5]. *Ограничение естественной проекции $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^i$ на $H_{i,j}$ индуцирует структуру локально тривиального $\mathbb{C}P^{j-1}$-расслоения*

$$H_{i,j} = \mathbb{P}(\overline{\eta_i^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to \mathbb{C}P^i.$$

Числа Милнора многообразий $H_{i,j}$ находятся легко. Далее выводится

Предложение 4 [5]. *$H_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $i+j = n+1$, являются мультипликативными порождающими кольца Ω_U^* в градуировке $2n$.*

Заметим, что

$$H_{0,j} = \mathbb{C}P^{j-1}, \qquad H_{1,j} = \mathbb{P}(\eta_1 \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-1}) \to \mathbb{C}P^1$$

суть торические многообразия. На самом деле, этим исчерпываются все торические гиперповерхности Милнора. (Кольцо когомологий $H^*(H_{i,j};\mathbb{Z})$ доставляет соответствующее препятствие.)

Предложение 5 [4; Theorem 9.1.5]. *Многообразие $H_{i,j}$ при $2 \leqslant i \leqslant j$ не является торическим многообразием.*

Дуализация первого класса Черна $c_1(\xi) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ линейного векторного расслоения $\xi \to X$ над компактным стабильно комплексным многообразием доставляет стабильно комплексное *подмногообразие* $D \subset X$ вещественной коразмерности 2 (см. [10; с. 78], [11]). Нормальное комплексное линейное векторное расслоение вложения $D \subset X$ совпадает с ограничением ξ на D. Первый класс Черна $c_1(\xi) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ двойственнен по Пуанкаре классу $[D] \in H_{2(n-1)}(X;\mathbb{Z})$.

Предложение 6 [5], [4; Proposition D.6.3]. *Многообразие $H_{i,j}$ является дуализацией первого класса Черна комплексного линейного расслоения $\overline{\eta_i}\,\overline{\eta_j'}$ над $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$.*

3.2. Многообразия Бухштабера–Рэя. В [3] Бухштабер и Рэй построили гладкие проективные торические многообразия $BR_{i,j}$, доставляющие мультипликативные порождающие кольца комплексных кобордизмов Ω_U^*. (Обозначение из статьи [3]: $B_{i,j}$.)

Определение 2 (см. [3]). Пусть $0 \leqslant i \leqslant j$. Тогда

$$BR_{i,j} = \mathbb{P}(f_i^* \overline{\eta_i^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to BF_i$$

есть *обратный образ*

$$H_{i,j} = \mathbb{P}(\overline{\eta_i^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to \mathbb{C}P^i$$

относительно отображения $f_i \colon BF_i \to \mathbb{C}P^i$. В частности, $BR_{0,j} = \mathbb{C}P^{j-1}$. (По определению, $BR_{0,0} = \varnothing$.)

Предложение 7. *Многообразие $BR_{i,j}$ является дуализацией первого класса Черна комплексного линейного расслоения $\overline{\beta_i}\,\overline{\eta'_j}$ над $BF_i \times \mathbb{C}P^j$.*

Многообразие $BR_{i,j}$ – прообраз гиперповерхности Милнора $H_{i,j} \subset \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ при отображении $f_i \times \mathrm{Id}_j : BF_i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$. Следовательно, гиперповерхность $BR_{i,j} \subset BF_i \times \mathbb{C}P^j$ задается уравнением:

$$\sum_{k=0}^{i} z_{i,k} w_k = 0, \tag{3.2}$$

где $[w_0 : \cdots : w_j] \in \mathbb{C}P^j$ суть однородные координаты на $\mathbb{C}P^j$ и $z_{k,l}$ суть координаты на BF_i (см. п. 2.2).

Предложение 8 [4; теорема 9.1.8]. *Имеет место равенство*

$$s_{i+j-1}(BR_{i,j}) = s_{i+j-1}(H_{i,j}).$$

Многообразия $BR_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $i + j = n + 1$, являются мультипликативными порождающими кольца Ω_U^* в градуировке $2n$.

Подобно гиперповерхностям Милнора $H_{i,j}$, многообразия $BR_{i,j}$ являются проективными расслоениями.

Лемма 2. *Для любого $k = 1, \ldots, i$, над BF_i выполнено*

$$f_i^* \eta_k^* \simeq \bigoplus_{q=1}^{k} \beta_q^*.$$

Предложение 9. *Имеем место следующий изоморфизм*

$$BR_{i,j} \simeq \mathbb{P}\left(\bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i} \right) \to BF_i.$$

В отличие от гиперповерхностей Милнора, многообразия Бухштабера–Рэя являются торическими.

Следствие 2 (см. [3]). *$BR_{i,j}$ есть неособое проективное торическое многообразие.*

Замечание 3. Многообразие $BF_i \times \mathbb{C}P^j$, $0 \leqslant i \leqslant j$, является торическим с действием тора, индуцированным стандартным действием тора на комплексных проек-

тивных пространствах и эквивариантным вложением

$$BF_i \subset \prod_{k=1}^{n} \mathbb{C}P^k.$$

Уравнение (3.2) не является инвариантным при данном действии тора (при $i \neq 0$). Следовательно, многообразие $BR_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant j$, не является инвариантным дивизором $BF_i \times \mathbb{C}P^j$. Тем не менее, формула (2.4) позволяет отождествить тривиальное $\mathbb{C}P^j$-расслоение над BF_i с проективизацией

$$\mathbb{P}\left(\overline{\beta_i} \oplus \bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}\right) \to BF_i.$$

Теперь снабдим многообразие $BF_i \times \mathbb{C}P^j$ $(\mathbb{C}^\times)^n$-действием, индуцированным данной структурой проективизации полностью расщепимого расслоения. (Данное многообразие эквивариантно изоморфно предыдущему. Это следует, например, из основного результата [12].) Вложение

$$BR_{i,j} = \mathbb{P}\left(\bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}\right) \subset \mathbb{P}\left(\overline{\beta_i} \oplus \bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}\right) = BF_i \times \mathbb{C}P^j$$

эквивариантно относительно указанного выше действия тора на $BF_i \times \mathbb{C}P^j$.

Как показано ниже, многообразие $BR_{i,j}$ не является, вообще говоря, полностью нормально расщепимым. Напомним,

Определение 3. Гладкое многообразие M^{2n} называется *квазиторическим*, если существует гладкое, локально стандартное действие n-мерного тора T^n на M^{2n}, пространство орбит которого диффеоморфно некоторому простому многограннику как многообразие с углами.

Предложение 10 [4]. *Любое квазиторическое многообразие M^{2n} над n-мерным симплексом Δ^n гомеоморфно $\mathbb{C}P^n$. Естественная стабильно комплексная структура на M^{2n} имеет вид*

$$TM \oplus \underline{\mathbb{R}} \simeq k\eta_n \oplus (n+1-k)\overline{\eta_n}$$

для некоторого $k = 0, \dots, n+1$.

Следующее предложение обобщает результат [13; Theorem 1.5] о нормальной нерасщепимости $\mathbb{C}P^n$, $n > 1$.

Предложение 11. *Любое квазиторическое многообразие M^{2n} над n-мерным симплексом Δ^n при $n > 1$ не является полностью нормально расщепимым.*

Доказательство. Любое комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$ топологически изоморфно η^a, где $a \in \mathbb{Z}$. Положим $x = c_1(\overline{\eta})$. Для любого полностью расщепимого расслоения $\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k} \eta^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, 4-компонента характера Черна равна

$$\mathrm{ch}_2(\alpha) = \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i^2.$$

Следовательно,

$$\langle x^{n-2}\, \mathrm{ch}_2(\alpha), [\mathbb{C}P^n] \rangle \geqslant 0.$$

Для нормального расслоения NM при $n > 1$ по предложению 10 имеем

$$\langle x^{n-2}\,\mathrm{ch}_2(NM), [\mathbb{C}P^n]\rangle = -\frac{n+1}{2} < 0.$$

Отсюда заключаем, что нормальное расслоение NM не является полностью расщепимым.

Замечание 4. Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$, как и любая другая риманова поверхность Σ_g рода g, является ПНР-многообразием. Это следует из (топологического) изоморфизма любого комплексного векторного расслоения над Σ_g сумме Уитни комплексного линейного расслоения и тривиального векторного расслоения.

Любое квазиторическое многообразие можно снабдить естественной стабильно комплексной структурой. Пусть m есть число гиперграней многогранника моментов $P^n \subset \mathbb{R}^n$ квазиторического многообразия M^{2n}. Занумеруем гиперграни многогранника P целыми числами от 1 до m. Обозначим через M_i^{2n-2} инвариантное подмногообразие коразмерности 2 в M, соответствующее i-ой гиперграни многогранника P^n, $i = 1, \dots, m$.

Теорема 4 (см., например, [4; теорема 7.3.15]). *Существует изоморфизм вещественных расслоений*

$$TM \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \simeq \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m \qquad \text{над} \quad M,$$

где $\rho_i \to M$ суть комплексные линейные расслоения, $i = 1, \dots, m$. Нормальное расслоение вложения $M_i^{2n-2} \subset M^{2n}$ ориентированных многообразий равно овеществлению расслоения $\xi_i|_{M_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Предложение 12. *Любое инвариантное подмногоообразие Z квазиторического* ПНР*-многообразия M полностью нормально расщепимо. В частности, M не содержит инвариантных подмногообразий над симплексом Δ^k, $k > 1$. Далее, многогранник моментов многообразия M не содержит треугольных граней.*

Доказательство. Существует максимальная цепочка включений

$$Z = Z_0 \subset \dots \subset Z_k = M$$

некоторых инвариантных подмногообразий M (здесь последовательные включения имеют коразмерность 2). Теперь полная нормальная расщепимость Z вытекает из теоремы 4 и трансверсальности пересечений характеристических подмногообразий M (см. [4; с. 245]). Остальные утверждения предложения следуют из предложений 10, 11.

В [14] Лю и Панов построили другое семейство полиномиальных порождающих Ω_U^* в связи с задачей построения порождающих кольца $\Omega_{SU}/\mathrm{Tors}$. Именно, это проективные торические многообразия $L(i,j) := \mathbb{P}(\eta_i \oplus \underline{\mathbb{C}}^j) \to \mathbb{C}P^i$ комплексной размерности $i + j$.

Следствие 3. *Многообразия $H_{i,j}$, $BR_{i,j}$, $i \leqslant j, 2 < j$, не являются полностью нормально расщепимыми. Многообразие $L(i,j)$, $1 < j$, не является полностью нормально расщепимым.*

4. Конструкции

В настоящем разделе мы приводим две конструкции ПНР-многообразий (вслед за конструкцией расслоения ограниченных флагов над ПНР-многообразием, см. раздел 2): раздутие трансверсального пересечения комплексной коразмерности 2 неособых гиперповерхностей в неособом комплексном проективном ПНР-многообразии, и бриллиантова сумма двух квазиторических ПНР-многообразий. Отметим, что первая конструкция имеет эквивариантный аналог: раздутия неособых комплексных проективных торических ПНР-многообразий вдоль инвариантных подмногообразий комплексной коразмерности 2. Вторая конструкция была введена в [1]. Данные конструкции понадобятся нам в разделе 5 при построении квазиторических ПНР-многообразий, доставляющих порождающие кольца Ω_U^*.

4.1. Раздутия неособых комплексных проективных ПНР-многообразий вдоль трансверсальных пересечений комплексной коразмерности 2 неособых гиперповерхностей. Имеет место следующее

Предложение 13. *Пусть X есть неособое проективное комплексное ПНР-многообразие комплексной размерности n. Пусть $Z \subset X$ есть трансверсальное пересечение $Z = D_1 \cap D_2$ двух гладких гиперповерхностей $D_1, D_2 \subset X$. Тогда $Bl_Z X$ есть ПНР-многообразие.*

Доказательство. По определению (см. [15; § 6.2.1]), $Bl_Z X$ есть гиперповерхность в пространстве проективизации

$$\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2)) \to X,$$

где $L(D_1), L(D_2) \to X$ суть линейные расслоения, отвечающие гиперповерхностям $D_1, D_2 \subset X$, соответственно. Обозначим соответствующий морфизм вложения через ι.

Пусть $\nu \to Bl_Z X$ есть нормальное (линейное) расслоение данного вложения. Пространство $\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))$ является расслоением ограниченных флагов над ПНР-многообразием X. По Предложению 1, $\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))$ является ПНР-многообразием. Это означает, что существует полностью расщепимое комплексное векторное расслоение

$$\xi = \bigoplus_{i=1}^{k} \xi_i \to \mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2)), \qquad \operatorname{rk}_{\mathbb{C}} \xi_i = 1,$$

так что

$$T(\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))) \oplus \xi \simeq \underline{\mathbb{C}}^{n+k+1}.$$

Остается ограничить последнее расслоение на $Bl_Z X$:

$$T(Bl_Z X) \oplus (\nu \oplus \iota^* \xi) \simeq \underline{\mathbb{C}}^{n+k+1}.$$

Отметим, что раздутие неособого проективного торического многообразия X в его инвариантном подмногообразии доставляет неособое проективное торическое многообразие (см., например, [4]).

4.2. Бриллиантова сумма и ориентации квазиторических ПНР-многообразий. Из существования канонической стабильно комплексной структуры на квазиторическом многообразии (см., например, [4; § 7.3]) вытекает, что корректно определен класс комплексного кобордизма квазиторического многообразия. (См. пример различных стабильно комплексных структур на $\mathbb{C}P^n$ выше, предложение 10.)

В работе [2; лемма 3.5] показано, что связная сумма двух стабильно комплексных ПКР/ПНР-многообразий является ПКР/ПНР-многообразием, соответственно. В работе [1] для любых $2n$-мерных омниориентированных квазиторических многообразий M, M' вводится $2n$-мерное омниориентированное квазиторическое многообразие $M\diamondsuit M'$, называемое *бриллиантовой суммой* многообразий M, M' (см., например, [4; § 9.1]). Обозначим через $S(2n)$ $2n$-мерное омниориентированное квазиторическое многообразие $M(I^n, (\mathrm{Id}_n\ \mathrm{Id}_n))$, где I^n есть n-мерный куб.

Лемма 3. *Стабильно комплексное многообразие $S(2n)$ является декартовым произведением n копий рациональных прямых $\widetilde{\mathbb{C}P^1}$, взятых с нестандартной стабильно комплексной структурой*:

$$\widetilde{\mathbb{C}P^1} \oplus \underline{\mathbb{C}} = \overline{\eta_1} \oplus \eta_1 \simeq \underline{\mathbb{C}}^2.$$

$S(2n)$ гомеоморфно многообразию $(\mathbb{C}P^1)^n$. $S(2n)$ является ПНР*-многообразием и имеет тривиальный класс комплексного кобордизма.*

По определению, бриллиантовая сумма $M\diamondsuit M'$ многообразий M, M' ориентированно диффеоморфна связной сумме $M\#M'\#S(2n)$ многообразий M, M', $S(2n)$. Важнейшим свойством бриллиантовой суммы является то, что данный диффеоморфизм согласован с каноническими стабильно комплексными структурами на многообразиях $M\diamondsuit M', M, M', S(2n)$. Следовательно, класс комплексного кобордизма бриллиантовой суммы $M\diamondsuit M'$ равен сумме $[M]+[M']$. Определение бриллиантовой суммы $M\diamondsuit M'$ имеет произвол, состоящий в выборе неподвижных точек многообразий M, M', $S(2n)$. Тем не менее, класс комплексного кобордизма бриллиантовой суммы $M\diamondsuit M'$ не зависит от этого произвола и корректно определен для омниориентированных квазиторических многообразий M, M'. Также отметим, что за счет выбора другой омниориентации стабильно комплексная структура на произвольном омниориентированном квазиторическом многообразии M изменяется на противоположную. Поэтому существует квазиторическое многообразие $\overline{M}$, представляющее класс комплексного кобордизма $-[M]$. Тем самым, доказано

Предложение 14. *Пусть M_1, M_2 суть квазиторические $2n$-мерные многообразия. Тогда существуют квазиторические многообразия $\overline{M_1}$, $M_1\diamondsuit M_2$, представляющие классы комплексного кобордизма $-[M_1]$, $[M_1]+[M_2]$ соответственно. Если M_1 есть* ПНР*-многообразие, то $\overline{M_1}$ есть* ПНР*-многообразие. Если M_1, M_2 оба суть* ПНР*-многообразия, то $M_1\diamondsuit M_2$ есть* ПНР*-многообразие.*

5. Доказательство основной теоремы 3

Этот раздел содержит доказательство теоремы 3. Мы используем введенные в разделах 2, 4 конструкции для построения вспомогательных квазиторических

ПНР-многообразий $X_{i,j}$, $M_{i,j}$, $N_{i,j}$. Технически трудные части доказательства теоремы 3 (нахождение чисел Милнора многообразий $X_{i,j}$, $M_{i,j}$, а также вычеты биномиальных коэффициентов по модулю p и p^2) вынесены в разделы 6, 7 для удобства чтения.

5.1. Многообразия $X_{i,j}$, $M_{i,j}$, $N_{i,j}$.

Определение 4. Для $1 \leqslant i \leqslant j$ положим

$$X_{i,j} = BF(\overline{\beta_i}, \overline{\beta_i^*}, \dots, \overline{\beta_2^*}, \overline{\beta_1^*}, \underline{\mathbb{C}}, \dots, \underline{\mathbb{C}}) \to BF_i, \qquad X_{0,j} = BF_j.$$

Для $i > 0$ обозначим через $Z_{i,j}$ инвариантное подмногообразие $X_{i,j}$ комплексной коразмерности 2, заданное условиями на тавтологические расслоения:

$$\beta_i = \beta_{i-1}, \qquad \zeta_{j+1} = \zeta_j.$$

Предложение 15. *Для $i > 0$ имеем*

$$Z_{i,j} = BF(\underline{\mathbb{C}}, \overline{\beta_{i-1}^*}, \dots, \overline{\beta_2^*}, \overline{\beta_1^*}, \underline{\mathbb{C}}, \dots, \underline{\mathbb{C}}) \to BF_{i-1}.$$

Нормальное расслоение вложения $Z_{i,j} \subset X_{i,j}$ равно $\overline{\zeta_j \beta_{i-1}} \oplus \overline{\beta_{i-1}} \to Z_{i,j}$.

Определение 5. Положим $M_{i,j} := Bl_{Z_{i,j}} X_{i,j}$. Для четного n положим

$$N_{0,n} := \overline{M_{1,n-1}}, \qquad N_{1,n-1} = M_{1,n-1}.$$

Для нечетного n положим

$$N_{0,n} := \overline{M_{1,n-1}} \diamondsuit BF_n \diamondsuit BF_n, \qquad N_{1,n-1} = M_{1,n-1} \diamondsuit BF_n.$$

Для $1 < i \leqslant j$ положим $N_{i,j} := M_{i,j}$.

Предложение 16. *Многообразия $X_{i,j}$, $M_{i,j}$, $N_{i,j}$ являются квазиторическими* ПКР- *и* ПНР-*многообразиями.*

Доказательство. Многообразие BF_i является полностью нормально расщепимым по следствию 1. Стабильно обратные комплексные расслоения к $\overline{\beta_k}$, $\overline{\beta_k^*}$, $k = 1, \dots, i$, полностью расщепимы по формуле (2.4). Следовательно, многообразие $X_{i,j}$ полностью нормально расщепимо по предложению 1. Тогда $M_{i,j}$ полностью нормально расщепимо по предложению 13. Утверждение о многообразии $N_{i,j}$ теперь вытекает из свойства бриллиантовой суммы, см. предложение 14.

Предложение 17. *Имеет место равенство $s_n([N_{0,n}]) = n + 1$. При $0 < i \leqslant j$, $n = i + j$, выполнено*

$$s_n([N_{i,j}]) = (-1)^{n+1} \binom{n}{j} - \sum_{k=j}^{n-1} \binom{k}{j}.$$

Доказательство. Напомним, что число Милнора линейно относительно бриллиантовой суммы и обращения ориентации многообразия. Теперь требуемые формулы вытекают из нахождения чисел Милнора многообразия BF_n (следствие 23) и многообразия $M_{i,j}$ (предложение 25).

5.2. Построение образующих кольца Ω_U^*. Нам потребуются известные факты из теории комплексных кобордизмов. Согласно теореме Милнора–Новикова, кольцо комплексных кобордизмов изоморфно градуированному кольцу полиномов от счетного числа образующих:

$$\Omega_*^U \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots], \qquad \deg(a_i) = 2i$$

(см. [10]).

Теорема 5 (Милнор, Новиков, см. [5], [10]). *Класс кобордизмов стабильно комплексного многообразия X^{2n}, $\dim_{\mathbb{R}} X^{2n} = 2n$, может быть взят в качестве мультипликативной образующей тогда и только тогда, когда*

$$s_n(X^{2n}) = \begin{cases} \pm 1, & n \neq p^k - 1 \text{ ни для какого простого числа } p; \\ \pm p, & n = p^s - 1 \text{ для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

Покажем, что НОД чисел Милнора многообразий BF_n, $N_{i,j}$, $i + j = n$, равен p при $n = p^s - 1$, где p любое простое, $s \in \mathbb{N}$, и равен 1, иначе.

Доказательство следующего вспомогательного предложения содержится в разделе 7.

Предложение 18. *Пусть $s \geqslant 2$. Тогда для любого простого p выполнено*

$$\sum_{k=p^s-p^{s-1}-1}^{p^s-1} \binom{k}{p^s - p^{s-1} - 1} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Введем обозначение

$$a_{i,j} := s_n([N_{i,j}]), \qquad 0 \leqslant i \leqslant j, \quad i + j = n.$$

Предложение 19. *Пусть $n = p^s - 1$ для $s \geqslant 1$ и простого числа p. Тогда имеет место равенство*

$$\text{НОД}\{s_n(BF_n),\, s_n(N_{i,j}) \mid i + j = n,\, 0 \leqslant i \leqslant j\} = p.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи. Если $s = 1$, то $s_n(N_{0,n}) = n + 1 = p$. Иначе, для $p = 2$ имеем $s_n(BF_n) = 2$ (см. формулу (6.4)). Наконец, пусть $s \geqslant 2$, $p > 2$. Тогда $p^{s-1} < p^s - p^{s-1} - 1$. Далее, по предложению 17 имеем $a_{0,n} = p^s$,

$$\begin{aligned} a_{p^{s-1},p^s-p^{s-1}-1} &= -\binom{n}{p^s - p^{s-1} - 1} - \sum_{k=p^s-p^{s-1}-1}^{p^s-2} \binom{k}{p^s - p^{s-1} - 1} \\ &= -\sum_{k=p^s-p^{s-1}-1}^{p^s-1} \binom{k}{p^s - p^{s-1} - 1}. \end{aligned}$$

Следовательно, по предложению 18 имеем $a_{p^{s-1},p^s-p^{s-1}-1} \equiv -p \pmod{p^2}$. Мы получаем, что НОД$(a_{0,n}, a_{p^{s-1},p^s-p^{s-1}-1}) = p$.

Также потребуется факт из теории чисел, полученный Люка́ (см. доказательство в [5]).

Теорема 6 (Люка́). *Пусть p есть простое число. Рассмотрим разложения n и m натуральных чисел по основанию p:*

$$n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{r-1} p^{r-1} + n_r p^r, \tag{5.1}$$

$$m = m_0 + m_1 p + \dots + m_{r-1} p^{r-1} + m_r p^r. \tag{5.2}$$

Тогда выполнено

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_0}{m_0}\binom{n_1}{m_1}\dots\binom{n_r}{m_r} \pmod p.$$

Ниже используется запись

$$n = n_0 + n_1 p + \dots + n_d p^d = [n_d, \dots, n_0]_p$$

числа по основанию p. Количество разрядов в разложении чисел по основанию p всюду ниже опускается.

Предложение 20. *Рассмотрим число n т.ч. $n+1$ не является степенью простого числа. Тогда*

$$\text{НОД}\{s_n(N_{i,j}) \mid i + j = n,\ 0 \leqslant i \leqslant j\} = 1.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно предъявить для любого простого делителя q числа $n+1$ взаимно простое число $a_{i,j}$ с q. Запишем n в виде $[x_{s-1}, x_{s-2}, \dots, x_0]_q$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Имеем

$$n = 2q^{s-1} - 1 = [1, q-1, \dots, q-1]_q.$$

Тогда $n+1 = 2q^{s-1}$ четно, и $q > 2, s > 1$ из условия на n. Положим $j = [1, q-1, \dots, q-1, 0]_q$. Заметим, что $n - j = q - 1 < j$. Из теоремы Люка́ следует

$$a_{n-j,j} \equiv 1 - (q-1) \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod q.$$

2) Имеем

$$n = (x_{s-1}+1)q^{s-1} - 1 = [x_{s-1}, q-1, \dots, q-1]_q, \qquad x_{s-1} > 1.$$

Тогда $1 < x_{s-1} < q-1$, $s > 1$, $q > 3$. Положим

$$j = x_{s-1}q^{s-1} - 1 = [x_{s-1} - 1, q-1, \dots, q-1]_q.$$

Заметим, что $n - j = q^{s-1}$. Так как $1 < x_{s-1}$, получаем $n - j < j$. По теореме Люка́,

$$a_{n-j,j} \equiv \pm x_{s-1} - 1 \not\equiv 0 \pmod q.$$

3) Имеем

$$n = [x_{s-1}, \dots, x_a, \dots, x_b, q-1, \dots, q-1]_q,$$

где $0 < x_a$, $x_b < q-1$, $b < a$, $0 < x_{s-1}$ (q^b есть наибольшая степень q, делящая $n+1$). Положим

$$j = [x_{s-1}, \dots, x_a - 1, q-1, \dots, q-1]_q,$$

где $x_a - 1$ стоит в a-ом разряде. Тогда

$$n - j = [0, \dots, x_{a-1}, \dots, x_b + 1, 0, \dots, 0]_q < j.$$

По теореме Люка́ $\binom{k}{j} \equiv 0 \pmod q$ для $j < k \leqslant n$, и $\binom{j}{j} = 1$. Напомним, что

$$a_{n-j,j} = (-1)^{n+1}\binom{n}{j} - \sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}.$$

Заключаем, что $a_{n-j,j} \equiv -1 \pmod q$.

Итак, все возможные значения n, удовлетворяющие условию, были рассмотрены.

Доказательство теоремы 3. В п. 5.1 мы построили квазиторические ПНР-многообразия BF_n, $N_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$. Их числа Милнора найдены в предложении 17. В предложении 14 было показано, что целочисленные комбинации квазиторических ПНР-многообразий (в смысле бриллиантовой суммы и изменения ориентации) также являются квазиторическими ПНР-многообразиями. НОД чисел Милнора многообразий BF_n, $N_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $i + j = n$, вычислен в предложениях 19, 20. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ можно построить квазиторическое ПНР-многообразие с числом Милнора p при $n = p^s - 1$, где p простое, $s \in \mathbb{N}$, и числом Милнора 1, иначе. По теореме 5, это многообразие представляет образующую кольца Ω_U^* в градуировке $2n$, $n \in \mathbb{N}$. Теорема Милнора–Новикова говорит, что любой элемент кольца Ω_U^* степени > 2 представляется в виде линейной комбинации декартовых произведений построенных нами многообразий, т.е. имеет представителем квазиторическое ПНР-многообразие.

6. Числа Милнора торических многообразий $X_{i,j}$ и $M_{i,j}$

Данный раздел посвящен вычислению чисел Милнора s_n торических многообразий $X_{i,j}$ и их эквивариантных раздутий $M_{i,j}$, определенных в подразделе 5.1. Для обзора используемых вычислительных методов см. [8].

Предложение 21 (см. [8; § 4.5]). *Пусть $Z \subset X$ суть компактные комплексные многообразия размерностей k и n, соответственно Рассмотрим раздутие $\pi\colon Bl_Z X \to X$ вдоль Z. Тогда разность классов многообразий $Bl_Z X$ и X в кольце комплексных кобордизмов равна*

$$[Bl_Z X] - [X] = -[\mathbb{P}(\nu(Z \subset X) \oplus \overline{\mathbb{C}})], \tag{6.1}$$

где $\nu(Z \subset X)$ – нормальное расслоение к Z, и $\mathbb{P}(\nu(Z \subset X) \oplus \overline{\mathbb{C}})$ – проективное расслоение, наделенное нестандартной стабильно комплексной структурой

$$T\mathbb{P}(\nu(Z \subset X) \oplus \overline{\mathbb{C}}) \oplus \underline{\mathbb{C}} \simeq (p^*\nu(Z \subset X) \otimes \gamma) \oplus \gamma^* \oplus p^*TB, \tag{6.2}$$

где $\gamma \to \mathbb{P}(\nu(Z \subset X) \oplus \overline{\mathbb{C}})$ есть соответствующее тавтологическое линейное расслоение.

Кольцо когомологий BF_i легко находится по теореме Лере–Хирша:

Предложение 22 (см. [4; теорема 7.8.2]). *Имеется изоморфизм градуированных колец*

$$H^*(BF_i;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_i]/(t_a^2 - t_a t_{a-1} \mid a = 1,\dots,i),$$

где $t_0 := 0$.

Фундаментальный класс BF_i двойственнен по Пуанкаре элементу $t_i^i = t_i \cdots t_1 \in H^*(BF_i;\mathbb{Z})$. В кольце $H^*(BF_i;\mathbb{Z})$ имеется тождество

$$(1+t_i)\prod_{a=1}^{i}(1-t_a+t_{a-1}) = 1. \tag{6.3}$$

Число Милнора многообразия $X_{i,j}$, определенного в подразделе 5.1, находится при помощи предложения 2.

Предложение 23. *Имеем*

$$s_{i+j}(X_{i,j}) = (1+(-1)^{i+j+1})\binom{i+j}{i}.$$

Следствие 4. *Имеем*

$$s_n(BF_n) = 1 + (-1)^{n+1}. \tag{6.4}$$

Положим $Z_{i+j-2} := Z_{i,j}$ и обозначим "этаж" комплексной размерности k данной башни Ботта через Z_k. По определению $Z_{i-1} = BF_{i-1}$ при $i > 0$. Для $i > 0$ положим

$$Y_{i,j} := \mathbb{P}(\overline{\zeta_j\beta_{i-1}} \oplus \overline{\beta_{i-1}} \oplus \overline{\mathbb{C}}) \to Z_{i,j}.$$

Предложение 24. *Имеем*

$$s_{i+j}(Y_{i,j}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=j}^{i+j}\binom{k}{j}, & i \geqslant 2, \\ j+1+(-1)^{j+1}, & i = 1. \end{cases}$$

Наконец, найдем число Милнора многообразия $M_{i,j}$.

Предложение 25. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant j$; $n := i+j$. *Тогда верна формула*:

$$s_n(M_{i,j}) = \begin{cases} \displaystyle(-1)^{n+1}\binom{n}{j} - \sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}, & \text{для } i \geqslant 2; \\ (-1)^{n+1}(n-1) - 2, & \text{для } i = 1. \end{cases}$$

Доказательство вытекает из предложений 21, 23, 24 и аддитивности числа Милнора.

7. Теоретико-числовые результаты

В этом разделе мы доказываем предложение 18. Напомним, что для любой натуральной степени p^n простого числа p группа обратимых элементов $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ кольца вычетов $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ равна

$$\{k \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \text{НОД}(k,p) = 1\}.$$

Будем далее понимать выражения вида $a/b = ab^{-1}$, $a \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $b \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$, в смысле обращения в этой группе.

Нетрудно показать, что имеют место следующие леммы.

Лемма 4. *Рассмотрим целые неотрицательные числа* $0 \leqslant r < p$ (p *простое*). *Имеет место сравнение*

$$\prod_{k=1}^{p-1}(pr+k) \equiv (p-1)! \pmod{p^2}. \tag{7.1}$$

Лемма 5. *Для натуральных чисел* $0 < a < p$ (p *простое*) *выполнено*

$$\frac{\prod_{k=1}^{a}(p(p-1)+k)}{a!} \equiv 1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k} \pmod{p^2}.$$

Лемма 6. *Для натуральных чисел* $0 < a < p$ (p *простое*) *выполнено*

$$\sum_{a=1}^{p-1}\frac{\prod_{k=1}^{a-1}(p(p-1)+k)}{a!} \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{7.2}$$

Необходим еще один факт из теории чисел. Обозначим через $k!_p$ произведение натуральных чисел от 1 до k, не делящихся на p.

Теорема 7 (см. [7; теорема 1]). *Рассмотрим степень* p^q *простого числа* p *и натуральные числа* $m = n + r$. *Запишем* $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_d p^d$ *по основанию* p. *Для каждого* $j \geqslant 0$, *пусть* N_j *есть число* $[n/p^j]$, *приведенное по модулю* p^q, *т.е.*

$$N_j = n_j + n_{j+1}p + \dots + n_{j+q-1}p^{q-1}.$$

Аналогично определим числа m_j, M_j, r_j, R_j. *Пусть* e_j *есть количество индексов* $i \geqslant j$, *для которых* $n_i < m_i$ (*т.е. число "переносов" при сложении* m *и* r *по основанию* p, *до* j*-го разряда включительно*). *Тогда*

$$\frac{1}{p^{e_0}}\binom{n}{m} \equiv (\pm 1)^{e_{q-1}}\left(\frac{(N_0)!_p}{(M_0)!_p(R_0)!_p}\right)\left(\frac{(N_1)!_p}{(M_1)!_p(R_1)!_p}\right)\cdots\left(\frac{(N_d)!_p}{(M_d)!_p(R_d)!_p}\right) \pmod{p^q},$$

где (± 1) *есть* (-1), *за исключением случая* $p = 2$ *и* $q \geqslant 3$.

Следствие 5 (Куммер; см. [7]). *Для любых натуральных чисел* n, m *и любого простого* p *наибольшая степень* p, *на которую делится биномиальный коэффициент* $\binom{n}{m}$, *равна числу "переносов" при сложении* m *и* $n - m$ *по основанию* p.

Лемма 7 (см. [7; § 2, лемма 1]). *Имеем*

$$(p^2)!_p \equiv -1 \pmod{p^2}. \tag{7.3}$$

При помощи теоремы 6 доказывается

Лемма 8. *Имеем*

$$\binom{p^s-1}{p^s-p^{s-1}-1} \equiv p-1 \pmod{p^2}.$$

Лемма 9. *Имеем*

$$\sum_{k=p^s-p^{s-1}}^{p^s-2} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=p^s-p^{s-1}}^{p^s-2} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{s-2} \sum_{\substack{x_k,\dots,x_{s-2}=0\\ x_k<p-1}}^{p-1} \binom{[p-1,x_{s-2},x_{s-3},\dots,x_k,p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,p-1,\dots,p-1,p-1,\dots,p-1]_p}. \tag{7.4}$$

По теореме Куммера (см. следствие 5), если хотя бы два числа среди $x_k,\dots,x_{s-2}$ отличны от $p-1$, то

$$\binom{[p-1,x_{s-2},x_{s-3},\dots,x_k,p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,p-1,\dots,p-1,p-1,\dots,p-1]_p} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{s-2} \sum_{\substack{x_k,\dots,x_{s-2}=0\\ x_k<p-1}}^{p-1} \binom{[p-1,x_{s-2},x_{s-3},\dots,x_k,p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,p-1,\dots,p-1,p-1,\dots,p-1]_p}$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{s-2} \sum_{x_k=0}^{p-2} \binom{[p-1,p-1,\dots,x_k,p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,\dots,p-1,p-1,\dots,p-1]_p} \pmod{p^2}, \tag{7.5}$$

где x_k находится в k-ом разряде. Пусть $k=s-2$. По теореме 6 и леммам 6, 7 имеем

$$\frac{1}{p}\cdot \sum_{x_{s-2}=0}^{p-2} \binom{[p-1,x_{s-2},p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,p-1,\dots,p-1]_p}$$
$$\equiv \pm \sum_{x_{s-2}=0}^{p-2} (p-1)\frac{(x_{s-2}+p(p-1))!_p}{(p-1+p(p-2))!_p(x_{s-2}+1)!}$$
$$\equiv \pm(p-1)\sum_{a=1}^{p-1} \frac{\prod_{r=1}^{a-1}(p(p-1)+r)}{a!} \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{7.6}$$

Пусть $0\leqslant k<s-2$. Тогда по теореме 6 и леммам 6, 7 имеем

$$\frac{1}{p}\cdot \sum_{x_k=0}^{p-2} \binom{[p-1,p-1,\dots,p-1,x_k,p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,\dots,p-1,p-1,p-1,\dots,p-1]_p}$$
$$\equiv \pm \sum_{x_k=0}^{p-2} (p-1)\frac{(x_k+p(p-1))!_p}{(p-1+p(p-1))!_p(x_k+1+p(p-1))!}$$
$$\equiv \pm(p-1)\sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a-p} \equiv \pm(p-1)\sum_{a=1}^{(p-1)/2} \frac{p}{a(a-p)} \pmod{p^2}. \tag{7.7}$$

Следовательно,

$$\sum_{x_k=0}^{p-2} \binom{[p-1,p-1,\dots,p-1,x_k,p-1,\dots,p-1]_p}{[p-2,p-1,\dots,p-1,p-1,p-1,\dots,p-1]_p} \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{7.8}$$

Требуемое утверждение вытекает теперь из сравнений (7.4), (7.5), (7.6), (7.8).

Доказательство предложения 18 теперь вытекает из лемм 8, 9.

8. Заключительные комментарии

Естественно искать более короткое доказательство теоремы 3. Введем семейство гладких проективных комплексных многообразий.

Определение 6. Обозначим через $R_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$, *гиперповерхность в* $BF_i \times BF_j$, заданную уравнением

$$\sum_{k=0}^{i} z_{i,k} w_{j,k+j-i} = 0. \tag{8.1}$$

Отметим, что, $R_{0,j} = BF_{j-1}$, $R_{0,0} = \varnothing$.

Замечание 5. Порядок w-переменных в (8.1) важен. Например, рассмотрим подмногообразие $R'_{1,2} \subset BF_1 \times BF_2$, заданное уравнением

$$z_{1,0}w_{2,0} + z_{1,1}w_{2,1} = 0.$$

Напомним, что $BF_1 \times BF_2 \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ задано единственным уравнением:

$$w_{2,0}w_{1,1} - w_{2,1}w_{1,0} = 0.$$

Легко видеть, что многообразие $R'_{1,2}$ является особым вдоль подмногообразия

$$\{w_{2,0} = w_{2,1} = 0,\ z_{1,0}w_{1,0} + z_{1,1}w_{1,1} = 0\},$$

изоморфного $\mathbb{C}P^1$.

Данные многообразия заданы явно. Нетрудно доказать

Предложение 26. (1) *Многообразие* $R_{i,j}$ *есть дуализация первого класса Черна комплексного линейного расслоения* $\overline{\beta_i}\,\overline{\beta'_i}$ *в* $BF_i \times BF_j$.

(2) *При* $0 < i \leqslant j$, $s_{i+j-1}(R_{i,j}) = -\binom{i+j}{i}$.

(3) *Многообразия* $N_{0,n}$ *и* $R_{i,j}$ *при* $i + j = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ *доставляют мультипликативные порождающие кольца* Ω^*_U.

(4) *Многообразие* $R_{i,j}$ *есть собственный прообраз* $BR_{i,j}$ *при последовательности раздутий собственных прообразов подмногообразий* $\{w_1 = \dots = w_k = 0\} \subset BF_i \times \mathbb{C}P^j$, *где* k *пробегает* $j-1,\dots,2$.

Подмногообразия $BF_i \times \mathbb{C}P^j$ из предложения 26 при пересечении с $BR_{i,j}$ не являются, вообще говоря, инвариантными при введенном действии тора на $BR_{i,j}$. Однако последнее не запрещает существования эффективного действия тора с плотной орбитой на $R_{i,j}$. Возникает

Вопрос. Является ли $R_{i,j}$ торическим многообразием при $0 \leqslant i \leqslant j$?

Автор признателен В. М. Бухштаберу и Т. Е. Панову за многочисленные полезные обсуждения. Благодаря замечанию Ю. Устиновского исправлена неточность в конструкции раздутия вдоль подмногообразия коразмерности 2. Качество изложения было улучшено после критических замечаний Рецензента, за что ему отдельное спасибо. Являясь победителем конкурса “Молодая математика России”, выражаю благодарность его спонсорам и жюри.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.

[2] N. Ray, “On a construction in bordism theory”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **29**:3 (1986), 413–422.

[3] В. М. Бухштабер, Н. Рэй, “Торические многообразия и комплексные кобордизмы”, *УМН*, **53**:2(320) (1998), 139–140.

[4] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[5] J. Milnor, “On the Stiefel–Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds”, *Topology*, **3**:3 (1965), 223–230.

[6] M. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.

[7] A. Wilfong, “Toric polynomial generators of complex cobordism”, *Algebr. Geom. Topol.*, **16**:3 (2016), 1473–1491.

[8] Г. Д. Соломадин, Ю. М. Устиновский, “Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов”, *Матем. сб.*, **207**:11 (2016), 127–152.

[9] S. Ochanine, “Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques”, *Topology*, **26**:2 (1987), 143–151.

[10] Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, М., 1973.

[11] R. Thom, “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”, *Comment. Math. Helv.*, **28** (1954), 17–86.

[12] B. Florian, “Lifting of morphisms to quotient presentations”, *Manuscripta Math.*, **110**:1 (2003), 33–44.

[13] M. Imaoka, “Extendibility of negative vector bundles over the complex projective space”, *Hiroshima Math. J.*, **36**:1 (2006), 49–60.

[14] Z. Lü, T. Panov, “On toric generators in the unitary and special unitary bordism groups”, *Algebr. Geom. Topol.*, **16**:5 (2016), 2865–2893.

[15] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry. 2. Schemes and Complex Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 2013.

[16] N. J. Fine, “Binomial coefficients modulo a prime”, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 589–592.

[17] N. J. Hitchin, “Harmonic spinors”, *Advances in Math.*, **14** (1974), 1–55.

[18] A. Granville, “Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime powers”, *Organic Mathematics* (Burnaby, BC, 1995), CMS Conf. Proc., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 253–276.

Г. Д. Соломадин
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: grigory.solomadin@gmail.com

Поступило
04.10.2017
Принято к публикации
15.06.2018