М. Л. Гольдман, Описание следов для некоторых функциональных пространств,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 99–127

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

М. Л. ГОЛЬДМАН

ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрены функциональные пространства, представляющие собой обобщения известных классов H_p^r С. М. Никольского, $B_{p,\theta}^r$ О. В. Бесова, а также классов L_p^r Лиувилля, как изотропных, так и анизотропных. Теории классов H_p^r, $B_{p,\theta}^r$, L_p^r посвящена книга С. М. Никольского [1], другой подход развит в книге Стейна [2]. Изучая описание этих классов с точки зрения преобразования Фурье, П. И. Лизоркин ввел в рассмотрение классы $\Lambda_{p,q}^r$, обобщающие классы Лиувилля и построенные с помощью пространства $\Lambda_{p,q}$, более общего, чем L_p (см., например, [3,4]). В работе [3] для изучения указанных классов использован метод разбиения евклидова пространства R_n и соответствующего «рассечения» функции. Этот метод широко применяется и в работах Г. Трибеля, например [5, 6], в которых систематически изучаются различные свойства классов $B_{p,\theta}^r$ и $\Lambda_{p,q}^r$ ($F_{p,q}^r$ в обозначении Трибеля), а также более общих. Метод разбиения будет играть существенную роль и в данной работе.

Основное содержание работы состоит в получении для рассмотренных здесь общих классов точных условий существования следов на подпространствах меньшего числа измерений и описании пространства следов. Для классов $B_{p,\theta}^r$, L_p^r подобные результаты хорошо известны (см. [1]), для $\Lambda_{p,q}^r$ таких результатов не было до последнего времени. Если два варианта определения этих классов: с помощью разбиения R_n на «пачки» — классы $L_{p,q}^r$, и на «коридоры» — классы $\mathscr{L}_{p,q}^r$ (см. [3], а также § 1 данной работы). Как показано ниже, в § 2, результаты о следах для этих вариантов существенно различны. При разбиении на «коридоры» пространство следов не зависит от q и совпадает с соответствующим классом типа Бесова. Близкий результат в последнее время получен также Г. А. Калябиным [7]. Для случая разбиения на «пачки» пространство следов уже зависит от q и для его описания приходится вводить новые классы (§ 1, 2). В данной работе рассмотрены оба варианта. Получены также теоремы вложения для классов $B_{p,q,\theta}^{(\Delta)}$, возникающих в качестве пространства следов в случае разбиения на «пачки».

В § 1 даны определения рассмотренных в работе функциональных пространств.

В § 2 изучается проблема следов для введенных классов. Так сформулированы теоремы, дающие необходимое и достаточное условие существования следа на подпространстве R_m и дано описание пространства следов. Конечно, эти же результаты справедливы для следов не только на подпространстве R_m, но и на любой m-мерной плоскости вида (u, y_0), $u \in R_m$, y_0 — фиксировано.

В § 3 приведены вспомогательные утверждения, которые нужны для доказательства теорем § 2. Они имеют и самостоятельный интерес, в частности приведены новые неравенства для целых функций экспоненциального типа.

§ 4 содержит доказательство теорем о следах, в § 5 доказаны соответствующие теоремы о продолжении.

Наконец, в § 6 указаны возможные обобщения и проведено сопоставление схемы § 1 и результатов § 2 с известными классами $B^r_{p,\theta}$, L^r_p, $\Lambda^r_{p,q}$, их обобщениями [8—12], а также классами $F^{g(x)}_{pq}$ Г. Трибеля [5].

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ $B^{(\Delta)}_{p,\theta}$, $B_{p,q,\theta}$, $L^{(\Delta)}_{p,q}$, $\mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}$

1°. Разбиение пространства R_n

Пусть R_n — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$. На j-й координатной оси в R_n $(j = 1, \ldots, n)$ рассмотрим множество $\Delta_j(s)$ $(s = 0, 1, \ldots)$ со следующими свойствами:

1) каждое множество $\Delta_j(s)$ составлено из конечного числа двоичных отрезков вида $\eta_k 2^{k-1} \leqslant (\pm t) < 2^k$ $(k = 0, 1, \ldots, \eta_0 = 0;\ \eta_k = 1\ (k \neq 0))$;

2) $\Delta_j(s) \subset \Delta_j(s+1)$ $(s = 0, 1, \ldots)$; $\bigcup\limits_{s=0}^{\infty} \Delta_j(s) = R_1$.

Между двоичными отрезками, входящими в $\Delta_j(s)$, возможны пропуски. Обозначим теперь

$$P_n(s) = \Delta_1(s) \times \ldots \times \Delta_n(s) \quad (s = 0, 1, \ldots); \quad (\Delta) = \{P_n(s)\}_{s=0}^{\infty}. \tag{1}$$

Система (Δ) образована множествами $P_n(s)$, лежащими в R_n и обладающими свойствами:

$$P_n(s) \subset P_n(s+1); \qquad \bigcup_{s=0}^{\infty} P_n(s) = R_n. \tag{2}$$

Рассмотрим еще величины

$$\lambda_j(s) = \sup\{|t| : t \in \Delta_j(s)\} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Они характеризуют размер множества $P_n(s)$ по соответствующему координатному направлению. В силу свойств 1) — 2) $\{\lambda_j(s)\}$ — последовательность двоичных чисел, удовлетворяющая условиям

$$0 < 2\lambda_j(s) \leqslant \lambda_j(s+1) \qquad (s = 0, 1, \ldots); \qquad \lim_{s\to\infty} \lambda_j(s) = \infty. \tag{4}$$

Всюду в дальнейшем мы используем обозначения

$$\Gamma_n(0) = P_n(0);\ \Gamma_n(s) = P_n(s) \setminus P_n(s-1) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Это система обобщенных «коридоров». Ясно, что

$$\Gamma_n(i) \cap \Gamma_n(s) = \varnothing \qquad (i \neq s); \qquad \bigcup_{s=0}^{\infty} \Gamma_n(s) = R_n. \tag{6}$$

Рассмотрим еще двоичные прямоугольные параллелепипеды

$$\Delta_{k\varepsilon} = \{\xi \in R_n : \eta_{k_j} 2^{k_j - 1} \leqslant \varepsilon_j \xi_j < 2^{k_j}, \quad j = 1, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Здесь $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_j = 0, 1, \ldots$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_j = \pm 1$; $\eta_0 = 0$, $\eta_l = 1$ $(l \neq 0)$. Параллелепипеды (7) не пересекаются при различных парах (k, ε) и образуют разбиение пространства R_n

$$\bigcup_{(k, \varepsilon) \in J} \Delta_{k\varepsilon} = R_n, \tag{8}$$

сумма в (8) берется по множеству J всевозможных пар (k, ε). Отметим, что в силу условий 1) — 2) на множества $\Delta_j(s)$ и определений (1) и (5), множества $P_n(s)$ и $\Gamma_n(s)$ составлены из конечного числа параллелепипедов $\Delta_{k\varepsilon}$. В связи с этим обозначим

$$\begin{aligned} p_n(s) &= \{(k,\varepsilon) : \Delta_{k\varepsilon} \subset P_n(s)\}, \\ \gamma_n(s) &= \{(k,\varepsilon) : \Delta_{k\varepsilon} \subset \Gamma_n(s)\}, \end{aligned} \quad s = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Для дальнейшего существенно, что в силу (6) каждый параллелепипед $\Delta_{k\varepsilon}$ содержится в некотором «коридоре» $\Gamma_n(s)$ и притом только в одном, т. е.

$$\gamma_n(i) \cap \gamma_n(s) = \varnothing \quad (i \neq s); \qquad \bigcup_{s=0}^{\infty} \gamma_n(s) = J. \tag{10}$$

2°. Пространство $L_{pq}(R_n)$. Определение класса $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$

Напомним сначала определение класса $L_{p,q}$, введенное П. И. Лизоркиным [3]. Рассмотрим параллелепипед $\Delta_{k\varepsilon}$ и для функции $f(x)$, принадлежащей пространству основных функций Л. Шварца $S(R_n)$ (см., например, [1]), определим «пачку»

$$\delta_{k\varepsilon}(f, x) = \overline{\chi_{\Delta_{k\varepsilon}}(\xi) \tilde{f}^n(\xi)}^n(x), \tag{11}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — двойственные переменные, $\chi_{\Delta_{k\varepsilon}}(\xi)$ — характеристическая функция множества $\Delta_{k\varepsilon}$, $\tilde{g}^n$, $\overline{g}^n$ — преобразование Фурье в R_n, соответственно прямое и обратное. Например, для интегрируемой функции $g(x)$ имеем

$$\tilde{g}^n(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R_n} e^{-i(x, \xi)} g(x)\, dx; \quad (x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j.$$

Операцию (11) можно распространить на обобщенные функции $f \in S'_p(R_n)$, т. е. на пространство обобщенных функций, регулярных в смысле $L_p(R_n)$ (см. п. 1.5.10 в книге [1]).

Теперь определим на множестве целых функций экспоненциального типа, принадлежащих $S(R_n)$ норму

$$|F, L_{p,q}| = \left| \left\{ \sum_{(k, \varepsilon) \in J} |\delta_{k\varepsilon}(F)|^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \ L_p(R_n) \right|, \tag{12}$$

где $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$, символ $|F, \Lambda|$ означает норму F в пространстве Λ. Эти величины конечны. Пополнение указанного множества по норме (12) образует банахово пространство $L_{p,q}(R_n)$. Оно расширяется с ростом q. В силу теоремы типа Литтлвуда — Пэли при $q = 2$ $L_{p,q} = L_p$ с эквивалентностью норм (см. [3]).

Пусть система $(\Delta) = \{P_n(s)\}$ определена соотношением (1).

Фиксируем число $a > 1$ и свяжем с этим числом и системой (Δ) анизотропный класс типа О. В. Бесова — С. М. Никольского.

Определение 1. *Класс* $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant \theta,\ q \leqslant \infty)$ *определяется как совокупность функций* $F(x) \in L_{p,q}(R_n)$, *для которых возможно представление в виде ряда*

$$(Q):\ F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x); \qquad \operatorname{supp} \widetilde{Q}^n_s \subset P_n(s), \tag{13}$$

ряд сходится в $L_{p,q}$ *и конечна величина*

$$|F|_{(Q)} = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (a^s |Q_s, L_{p,q}(R_n)|)^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \qquad (1 \leqslant \theta < \infty);$$

$$|F|_{(Q)} = \sup_{s \geqslant 0} (a^s |Q_s, L_{p,q}(R_n)|) \qquad (\theta = \infty).$$

Норма в $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$ *определяется соотношением*

$$|F,\ B| = \inf_Q |F|_{(Q)}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что выражение (14) обладает всеми свойствами нормы. Конечность $|F|_{(Q)}$ влечет абсолютную сходимость ряда (13) в норме $L_{p,q}$, при этом

$$|F,\ L_{p,q}| \leqslant c\,|F,\ B|. \tag{15}$$

Можно показать, что $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ — банахово пространство, являющееся подпространством в $L_{p,q}$, и что S всюду плотно в $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ при $\theta < \infty$.

Определение 2. *Класс* $B^{(\Delta)}_{p,\theta}(R_n)$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant \theta \leqslant \infty)$ *определяется соотношением*

$$B^{(\Delta)}_{p,\theta}(R_n) = B^{(\Delta)}_{p,2,\theta}(R_n).$$

Поскольку при $q = 2$ $L_{p,q} = L_p$ $(1 < p < \infty)$, то развернутое определение класса $B^{(\Delta)}_{p,\theta}$ получится, если в определении 1 заменить $L_{p,q}$ на L_p.

Отметим еще, что в силу (3) члены ряда (13) являются целыми функциями экспоненциального типа $\lambda_j(s)$ по x_j $(j = 1, \ldots, n)$ и из $L_{p,q}(R_n)$, на не любыми, а с дополнительным условием на носитель спектра.

Класс $B^{(\Delta)}_{p,\theta}$ был рассмотрен в работе автора [10] при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и несколько более общих условиях на (Δ). Классы $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$, насколько нам известно, ранее не рассматривались.

3°. Определение пространств $L^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)$ и $\mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)$

Пусть множества $\Delta_j(s)$ удовлетворяют условиям 1) — 2) п. 1° и сохранены обозначения (1) — (10). Фиксируем число $a > 1$ и свяжем с этим числом и системой (Δ) анизотропные классы типа П. И. Лизоркина.

Определение 3. *Пространство* $L^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty)$ *определяется как пополнение множества целых функций экспоненциального* *типа, принадлежащих* $S(R_n)$, *по норме*

$$|F, L^{(\Delta)}_{p,q}| = \left| \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a^{sq} \sum_{(k,\varepsilon)\in\gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F)|^q \right\}^{\frac{1}{q}},\ L_p(R_n) \right| \qquad (1 \leqslant q < \infty),$$
$$|F, L^{(\Delta)}_{p,\infty}| = |\sup_{s\geqslant 0} (a^s \max_{(k,\varepsilon)\in\gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F)|),\ L_p(R_n)|. \tag{16}$$

Это определение соответствует разбиению R_n на «пачки».

Обозначим (см. (9), (11))

$$q_s(F, x) = \overline{\chi_{\Gamma_n(s)}(\xi)\tilde{F}^n(\xi)}^n(x) = \sum_{(k,\varepsilon)\in\gamma_n(s)} \delta_{k\varepsilon}(F, x), \tag{17}$$

что соответствует разбиению R_n на «коридоры» $\Gamma_n(s)$.

Определение 4. *Пространство* $\mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty)$ *определяется как пополнение множества целых функций экспоненциального типа, принадлежащих* $S(R_n)$, *по норме*

$$\left.\begin{aligned} |F, \mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}| &= \left| \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a^{sq} |q_s(F)|^q \right\}^{\frac{1}{q}},\ L_p(R_n) \right| \qquad (1 \leqslant q < \infty); \\ |F, \mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,\infty}| &= |\sup_{s\geqslant 0} (a^s |q_s(F)|),\ L_p(R_n)|. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Для целой функции экспоненциального типа суммы, входящие в (16) и (18), конечны, так что для них указанные нормы имеют смысл. В результате пополнения получим банаховы пространства. Очевидно, что с увеличением числа q классы $L^{(\Delta)}_{p,q}$ и $\mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}$ расширяются. Отметим, что при $q = 2$ $L^{(\Delta)}_{p,2} = L^{(\Delta)}_p$, где справа указан класс типа Лиувилля, рассмотренный в работе [10].

Отметим еще совпадение классов

$$B^{(\Delta)}_{p,p} = \mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,p}, \qquad B^{(\Delta)}_{p,p,p} = L^{(\Delta)}_{p,p} \qquad (1 < p < \infty),$$

которое следует из определений (16) и (18) и утверждения леммы 4, примененного в случае класса $B^{(\Delta)}_{p,p}$ при $q = 2$, $\theta = p$, а в случае класса $B^{(\Delta)}_{p,p,p}$ при $q = \theta = p$. Мы видим, что, используя в классах типа L и $\mathscr{L}$ значения $q \neq 2$, удается включить в рассмотрение также классы типа B.

§ 2. ТЕОРЕМЫ О СЛЕДАХ И ПРОДОЛЖЕНИИ

1°. Обозначения

Пусть $1 \leqslant m < n$ — целые числа. По аналогии с п. 1° (§ 1) мы обозначаем $P_m(s) = \Delta_1(s) \times \ldots \times \Delta_m(s)$ $(s = 0, 1, \ldots)$; $\Gamma_m(0) = P_m(0)$, $\Gamma_m(s) = P_m(s) \setminus P_m(s-1)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $\{s(i)\}$ — некоторая подпоследовательность чисел $s = 0, 1, \ldots$, выбор которой будет диктоваться условием теоремы; $s(i+1) \geqslant s(i) + 1$. Тогда

$$P'_m(i) = P_m(s(i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots); \qquad (\Delta') = \{P'_m(i)\}_{i=0}^{\infty}. \tag{19}$$

Обозначим (см. (3))

$$\alpha_s = a^s \prod_{j=m+1}^{n} \lambda_j(s)^{-\frac{1}{p}}. \tag{20}$$

Пусть θ' сопряжено с $\theta : 1/\theta + 1/\theta' = 1$ ($\theta' = \infty$ при $\theta = 1$, $\theta' = 1$ при $\theta = \infty$). Для $k = 0, 1, \ldots$ обозначим

$$\beta_{p,\theta}(k) = \left\{ \sum_{s=k}^{\infty} \alpha_s^{-\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \ (\theta > 1); \qquad \beta_{p,1}(k) = \sup_{s \geqslant k} \alpha_s^{-1} \tag{21}$$

2°. Описание следов для класса $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant m < n$ — целые числа; $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q$, $\theta \leqslant \infty$ число $a > 1$ и система (Δ) таковы, что*

$$\beta_{p,\theta}(0) < \infty \ (\theta > 1); \qquad \beta_{p,1}(k) \to 0 \quad (k \to \infty, \ \theta = 1). \tag{22}$$

Пусть подпоследовательность $\{s(i)\}$ чисел $s = 0, 1, \ldots$ определена соотношением

$$s(i) = \min \{k : \beta_{p,\theta}(k) \leqslant a^{-i}\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \tag{23}$$

а система (Δ') определена в (19). Тогда справедливы вложения

$$B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n) \rightleftarrows B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m). \tag{24}$$

Замечание 1. Класс $B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)$ связан с числом $a > 1$ и системой (Δ') в соответствии с определением 1 § 1, при этом для $s(i)$ выполнено неравенство $s(i+1) \geqslant s(i) + 1$. При $q = 2$ в теореме 1 содержатся соответствующие результаты для класса $B^{(\Delta)}_{p,\theta}$ (см. определение 2). Для этого класса результаты справедливы также и при $p = 1, \infty$ (см. [10]).

Замечание 2. Вложение (24) показывает, что для класса $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$ пространство следов на R_m в точности совпадает с $B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)$. При этом соответствующий оператор продолжения *линеен и непрерывен.*

Замечание 3. Условие $\beta_{p,\theta}(0) < \infty$ $(1 \leqslant \theta \leqslant \infty)$ является при любом $q : 1 \leqslant q \leqslant \infty$ *необходимым условием* непрерывности оператора следа P даже в слабом смысле:

$$P : B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n) \to (C_0^\infty)'(R_m).$$

Замечание 4. В случае $\theta = 1$ в условии теоремы 1 имеется требование $\alpha_s \to \infty$ $(s \to \infty)$ (см. (22) и (20)). Оно сильнее необходимого условия существования следа $\beta_{p1}(0) < \infty$. Но если его снять, то соотношение (24) теряет силу. В этом предельном случае справедливы следующие результаты.

Пусть $0 < \varliminf_{s \to \infty} \alpha_s < \infty$. Тогда пространство следов на R_m для класса $B^{(\Delta)}_{p,q,1}(R_n)$ совпадает с $L_{p,q}(R_m)$. При этом оператор продолжения

$$T : L_{p,q}(R_m) \to B^{(\Delta)}_{p,q,1}(R_n)$$

ограничен, но нелинеен; линейное продолжение невозможно.

Мы не будем доказывать здесь эти предельные результаты. Отметим, что в случае классов $B^r_{p,1}$, как изотропных, так и анизотропных, этот результат содержится в работах [8] и [13].

3°. Описание следов для классов $L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$ и $\mathscr{L}_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant m < n$ — *целые числа*; $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *число* $a > 1$ *и система* (Δ) *таковы, что* $\beta_{p,p}(0) < \infty$ (*см.* (20) — (21)).

Пусть подпоследовательность $\{s(i)\}$ *чисел* $s = 0, 1, \ldots$ *определена условием* (23) *при* $\theta = p$, *система* (Δ') *такая, как в теореме 1. Тогда справедливы вложения*

$$L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n) \rightleftarrows B_{p,q,p}^{(\Delta')}(R_m), \tag{25}$$

$$\mathscr{L}_{p,q}^{(\Delta)}(R_n) \rightleftarrows B_{p,p}^{(\Delta')}(R_m). \tag{26}$$

Замечание 1. Классы $B_{p,q,p}^{(\Delta')}(R_m)$ и $B_{p,p}^{(\Delta')}(R_m)$ связаны с числом $a > 1$ и системой (Δ') в соответствии с определениями 1 и 2. При $q = 2$ вложение (25) дает соответствующий результат для классов типа Лиувилля

$$L_p^{(\Delta)}(R_n) \rightleftarrows B_{p,p}^{(\Delta')}(R_m),$$

полученный в работе [10].

Замечание 2. Вложения (25) и (26) дают точное описание пространства следов, причем соответствующие операторы продолжения *линейны и непрерывны.*

Замечание 3. Условие $\beta_{p,p}(0) < \infty$ при любом $q: 1 \leqslant q \leqslant \infty$ является *необходимым* для непрерывности оператора следа P в (25) и (26) даже в слабом смысле.

Замечание 4. Условия теорем 1 и 2 носят транзитивный характер. Именно, пусть $1 \leqslant m_1 < m_2 < n$. Тогда условия перехода от R_n к R_{m_2} и от R_{m_2} к R_{m_1} в совокупности эквивалентны условиям перехода от R_n к R_{m_1}. Мы не будем пользоваться здесь этим фактом и оставим его без доказательства.

Замечание 5. Из доказательства в п. 3° § 4 прямого вложения (25) видно, что справедливо более сильное утверждение о следах. Именно, если рассмотреть вместо $L_{p,q}^{(\Delta)}$ (16) более широкий класс $L_{p,q,\infty}^{(\Delta)}$ с нормой

$$|F, L_{p,q,\infty}^{(\Delta)}| = \left| \sup_{s \geqslant 0} \left[a^s \Bigl(\sum_{(k,\varepsilon) \in \gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F)|^q \Bigr)^{\frac{1}{q}} \right], \ L_p(R_n) \right|,$$

которая совпадает с нормой в $L_{p,q}^{(\Delta)}$ только при $q = \infty$, то в условиях теоремы 2 справедливо вложение

$$P: L_{p,q,\infty}^{(\Delta)}(R_n) \to B_{p,q,p}^{(\Delta')}(R_m).$$

Замечание 6. Из доказательства в п. 3° § 5 обратного вложения (25) видно, что справедливо более сильное утверждение о продолжении. Именно, если рассмотреть вместо $L_{p,q}^{(\Delta)}$ более узкий класс $L_{p,q,1}^{(\Delta)}$ с нормой

$$|F, L_{p,q,1}^{(\Delta)}| = \left| \sum_{s=0}^{\infty} a^s \Bigl(\sum_{(k,\varepsilon) \in \gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F)|^q \Bigr)^{\frac{1}{q}}, \ L_p(R_n) \right|,$$

которая совпадает с нормой в $L_{p,q}^{(\Delta)}$ только при $q = 1$, то в условиях теоремы 2 существует линейный ограниченный оператор продолжения

$$T: B_{p,q,p}^{(\Delta')}(R_m) \to L_{p,q,1}^{(\Delta)}(R_n).$$

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть α, y, λ, μ — вещественные числа, $0 < \lambda < \mu$, $G(y)$ — целая функция экспоненциального типа λ, для которой*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)^{\alpha} |G(y)|\, dy < \infty.$$

Пусть ядро $K_\mu(y)$ измеримо, удовлетворяет неравенствам

$$|K_\mu(y)| \leqslant c_\mu (1+|y|)^{\alpha},$$

а его преобразование Фурье $\beta_\mu(\xi) = \tilde{K}_\mu(\xi)$, понимаемое, вообще говоря, в смысл $S'(R_1)$, равно единице на $(-\mu, \mu)$. Тогда для любого $a \in R_1$

$$G(a) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} K_\mu(a-y)\, G(y)\, dy. \tag{27}$$

Доказательство. Если $G(y)$, кроме условия леммы, еще из $S(R_1)$, то $e^{ia\xi}\tilde{G}(\xi) \in C_0^\infty(R_1)$ и $\operatorname{supp}[e^{ia\xi}\tilde{G}(\xi)] \subseteq [-\lambda, \lambda] \subset (-\mu, \mu)$. Поэтому (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} G(a) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{ia\xi}\tilde{G}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-1/2} \langle \beta_\mu(\xi), e^{ia\xi}\tilde{G}(\xi) \rangle = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \langle K_\mu(y), \overline{e^{ia\xi}\tilde{G}(\xi)}'(y) \rangle = (2\pi)^{-1/2} \langle K_\mu(y), G(a-y) \rangle = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} K_\mu(y)\, G(a-y)\, dy. \end{aligned}$$

Первое равенство — формула обращения, второе — определение функционала, равного единице на $(-\mu, \mu)$, где сосредоточен носитель основной функции. Далее применено определение преобразования Фурье $\beta_\mu(\xi) = \tilde{K}_\mu(\xi)$ для элементов из $S'(R_1)$, затем — известная формула для преобразования Фурье. Последнее равенство следует из того, что $K_\mu(y)$ — обычная, локально интегрируемая функция. Это и есть (27).

В общем случае справедливость (27) можно получить предельным переходом, приближая $G(y)$ целыми функциями из $S(R_1)$, как это делается в лемме 8.5.2 [1].

Замечание 1. Ядро $K_\mu(y)$ можно выбрать многими способами. Например, можно брать ядро Дирихле, ядро Валле—Пуссена (см. [1, 8.6]) и т. д. Для нас удобно использовать ядра следующего вида. Пусть $\beta_1(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция, $\xi \in R_1$; $\beta_1(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \leqslant 1$; $\beta_1(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \geqslant 2$ и $0 \leqslant \beta_1(\xi) \leqslant 1$ для остальных ξ. Определим при $y \in R_1$

$$K_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \beta_1(\xi)\, d\xi = \frac{(-iy)^{-r}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \beta_1^{(r)}(\xi)\, d\xi$$

(второе равенство получено интегрированием по частям r раз). Из определения ядра, ограниченности функций $\beta_1(\xi)$ и $\beta_1^{(r)}(\xi)$, конечности их носителей, сразу следуют оценки

$$|K_1(y)| \leqslant c_0, \qquad |K_1(y)| \leqslant c_r |y|^{-r}.$$

Теперь рассмотрим при $\mu > 0$ ядро

$$K_\mu(y) = \mu K_1(\mu y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \beta_1(\xi/\mu)\, d\xi. \tag{28}$$

При этом $\beta_\mu(\xi) \equiv \tilde{K}_\mu(\xi) = \beta_1(\xi/\mu) = 1$ при $|\xi| < \mu$, а само ядро допускает оценки ($r \geqslant 1$ — любое наперед заданное число)

$$|K_\mu(y)| \leqslant c_0 \mu, \qquad |K_\mu(y)| \leqslant c_r \mu^{1-r} |y|^{-r}, \tag{29}$$

следующие из оценок ядра K_1.

Очевидно, что лемму 1 можно получить и в многомерном варианте, как изотропном, так и анизотропном, но нам это не потребуется.

Следующий результат важен для рассмотрения классов $\mathscr{L}_{p,q}^{(\Delta)}$.

Следствие. *Пусть* $x = (u, y) \in R_n$, $u = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R_{n-1}$, $y = x_n \in R_1$, $G(u, y)$ — *непрерывная функция, являющаяся при каждом* u *целой функцией по* y *экспоненциального типа* $\lambda > 0$; $g(u) = G(u, o)$. *Тогда справедливы неравенства* ($r \geqslant 1$ — *целое число*)

$$|g(u)| \leqslant c_r \left\{ \lambda \int_{|y|<1/\lambda} |G(u, y)|\, dy + \lambda^{1-r} \int_{|y|>1/\lambda} |G(u, y)| \frac{dy}{|y|^r} \right\}, \tag{30}$$

$$|g, L_p(R_{n-1})| \leqslant c_r \left\{ \lambda \int_{|y|<1/\lambda} |G(\cdot, y), L_p(R_{n-1})|\, dy + \right.$$

$$\left. + \lambda^{1-r} \int_{|y|>1/\lambda} |G(\cdot, y), L_p(R_{n-1})| \frac{dy}{|y|^r} \right\}. \tag{31}$$

Доказательство. Считая, что правая часть (30) конечна (иначе нечего доказывать), применим к функции $G(u, y)$ по $y \in R_1$ лемму 1. Ядро $K_\mu(y)$ выберем из (28) при $\lambda < \mu \leqslant 2\lambda$.
Тогда

$$g(u) = G(u, 0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} K_\mu(-y)\, G(u, y)\, dy.$$

Применив теперь при $|y| < 1/\lambda$ первую, а при $|y| > 1/\lambda$ вторую оценку (29), мы из интегрального представления получим оценку (30) (у нас $\lambda < \mu \leqslant 2\lambda$). Неравенство (31) следует из (30) взятием нормы $L_p(R_{n-1})$ по u с учетом неравенства для нормы интеграла, считая при этом, что правая часть (31) конечна.

Замечание 2. Из интегрального представления (27) и неравенства (31) легко следуют известные неравенства для целых функций (разных измерений, разных метрик, типа Бернштейна). Например, при $r \geqslant 2$, применив к интегралам в правой части (31) неравенство Гёльдера, получим оценку

$$|g, L_p(R_{n-1})| \leqslant c\lambda^{\frac{1}{p}} \left\{ \int |G(\cdot, y), L_p(R_{n-1})|^p\, dy \right\}^{\frac{1}{p}} = c\lambda^{\frac{1}{p}} |G, L_p(R_n)|,$$

а из нее и общее неравенство разных измерений [1, 3.4.2] (подобное рассуждение подробнее см. ниже (44) — (45)).

Для получения неравенства разных метрик следует использовать оценку ($\lambda < \mu \leqslant 2\lambda$)

$$|K_\mu, L_\rho| \leqslant c\lambda^{1-1/\rho} \qquad (1 \leqslant \rho \leqslant \infty), \tag{32}$$

вытекающую из (28) — (29), и неравенство Юнга ($1/\rho = 1-1/p+1/q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$), примененное к (27):

$$|G, L_q| \leqslant |K_\mu, L_\rho|\ |G, L_p| \leqslant c\lambda^{1/p-1/q}|G, L_p|.$$

Многомерный вариант получается столь же просто из многомерного варианта леммы 1. Столь же просто, дифференцируя (27) по a, можно получить неравенство типа Бернштейна:

$$|G', L_p| \leqslant c\lambda\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|K'_\mu(y)|\,dy\Big)|G, L_p|.$$

Следующая лемма используется при рассмотрении классов $L_{p,q}^{(\Delta)}$, но мы дадим ее в более общей формулировке. Введем некоторые обозначения. Пусть $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_t)$ — некоторый мультииндекс. На множестве числовых последовательностей $\{a_{(\rho)}\}$ введем норму $|\{a_{(\rho)}\}, \Lambda_1|$, удовлетворяющую условию

$$\forall\rho \quad |a_{(\rho)}| \leqslant b_{(\rho)} \Rightarrow |\{a_{(\rho)}\}, \Lambda_1| \leqslant c\,|\{b_{(\rho)}\}, \Lambda_1|. \tag{33}$$

Рассмотрим еще «двойные» последовательности $\{b_{(\rho, l)}\}$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$ На множестве таких последовательностей введем норму Λ_2, подчинив ее условию типа (33) и неравенству

$$\sup_l |b_{(\rho, l)}\}, \Lambda_1| \leqslant c\,|\{b_{(\rho, l)}\}, \Lambda_2|. \tag{34}$$

Лемма 2. *Пусть $x = (u, y) \in R_n$, $u \in R_{n-1}$, $y \in R_1$, индексы ρ, l такие, как описано выше, и нормы Λ_1, Λ_2 удовлетворяют условиям* (33), (34). *Пусть $\{\delta_{(\rho, l)}(u, y)\}$ — последовательность непрерывных функций (можно считать ее конечной), являющихся целыми функциями по y степеней 2^l (при заданном l и произвольных ρ),*

$$\lambda = \max_l 2^l, \qquad \delta_{(\rho)}(u) = \sum_l \delta_{(\rho, l)}(u, 0). \tag{35}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\big|\,|\{\delta_{(\rho)}\}, \Lambda_1|, L_p(R_{n-1})\big| \leqslant c\left\{\lambda \int\limits_{|y|<1/\lambda} \varphi(y)\,dy + \int\limits_{|y|>1/\lambda} \varphi(y)\frac{dy}{|y|}\right\}, \tag{36}$$

где

$$\varphi(y) = \big|\,|\{\delta_{(\rho, l)}(\cdot, y)\}, \Lambda_2|, L_p(R_{n-1})\big|.$$

Доказательство. Прежде всего, отметим неравенство

$$|\delta_{(\rho)}(u)| \leqslant c\sum_l\left\{2^l \int\limits_{|y|<2^{-l}} |\delta_{(\rho, l)}(u, y)|\,dy + 2^{l(1-r)} \int\limits_{|y|>2^{-l}} |\delta_{(\rho, l)}(u, y)|\frac{dy}{|y|^r}\right\},$$

вытекающее из (35) и оценки (30). Возьмем от обеих его частей норму Λ_1 по ρ и, воспользовавшись условием (33) и неравенствами для нормы суммы и нормы интеграла, внесем норму Λ_1 внутрь интегралов по y. Затем аналогично поступим с нормой в $L_\rho(R_{n-1})$ по u и получим

$$\big|\,|\{\delta_{(\rho)}\}, \Lambda_1|, L_p(R_{n-1})\big| \leqslant c\sum_l\left\{2^l \int\limits_{|y|<2^{-l}} \psi_l(y)\,dy + 2^{l(1-r)} \int\limits_{|y|>2^{-l}} \psi_l(y)\frac{dy}{|y|^r}\right\}, \tag{37}$$

где $\psi_l(y) = \|\{\delta_{(\rho, l)}(\cdot, y)\}, \Lambda_1|, L_p(R_{n-1})|$.

Неравенство (37), по-видимому, имеет и самостоятельный интерес. Отметим, что с учетом условия (34) справедливо неравенство (см. (36))

$$\sup_l \psi_l(y) \leqslant |(\sup_l |\{\delta_{(\rho,l)}(\cdot, y)\}, \Lambda_{\mathrm{I}}|), L_p(R_{n-1})| \leqslant \varphi(y),$$

подставив которое в (37), получим

$$||\{\delta_{(\rho)}\}, \Lambda_{\mathrm{I}}|, L_p(R_{n-1})| \leqslant c \sum_l \Big\{2^l \int\limits_{|y|<2^{-l}} \varphi\, dy + 2^{l(1-r)} \int\limits_{|y|>2^{-l}} \varphi \frac{dy}{|y|^r}\Big\}. \qquad (38)$$

Осталось преобразовать правую часть (38) к виду (36). Проделаем это для первой части суммы (пояснения ниже):

$$\sum_l 2^l \int\limits_{|y|<2^{-l}} \varphi\, dy = \sum_{2^l \leqslant \lambda} 2^l \sum_{k=l}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k} \varphi\, dy \leqslant c \Big\{ \sum_{2^k<\lambda} \int\limits_{\Delta_k} \frac{\varphi\, dy}{|y|} +$$

$$+ \lambda \sum_{2^k \geqslant \lambda} \int\limits_{\Delta_k} \varphi\, dy \leqslant c \Big\{ \int\limits_{1/\lambda \leqslant y < 1} \varphi \frac{dy}{|y|} + \lambda \int\limits_{|y|<1/\lambda} \varphi\, dy \Big\}.$$

Сначала мы записали интеграл по $|y| < 2^{-l}$ в виде суммы интегралов по $\Delta_k = \{y : 2^{-(k+1)} < |y| \leqslant 2^{-k}\}$, затем поменяли порядок суммирования по l и k и учли оценки возникших при этом сумм $\sum\limits_{l \leqslant k} 2^l \leqslant 2 \cdot 2^k$, $\sum\limits_{2^l \leqslant \lambda} 2^l \leqslant 2\lambda$ и неравенство $2^k \leqslant 1/|y|$ при $y \in \Delta_k$. В конце собраны суммы интегралов по Δ_k.

Аналогично можно оценить вторую часть суммы в правой стороне неравенства (38), она не больше

$$c_r \Big\{ \int\limits_{1/\lambda \leqslant |y| < 1} \varphi(y) |y|^{-1} dy + \int\limits_{|y|>1} \varphi(y) |y|^{-r} dy \Big\}.$$

Из этих оценок следует неравенство даже более сильное, чем в (36). При рассмотрении классов $L_{p,q}^{(\Delta)}$ нам понадобятся такие оценки.

Следствие 1. *Пусть $G(u, y)$ непрерывная функция, целая по $y \in R_1$, экспоненциального типа $\lambda \geqslant 1$, $g(u) = G(u, 0)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$|g, L_{p,q}(R_{n-1})| \leqslant c \Big\{ \lambda \int\limits_{|y|<1/\lambda} \psi\, dy + \int\limits_{|y|>1/\lambda} \psi \frac{dy}{|y|} \Big\}, \qquad (39)$$

где

$$\psi(y) = ||\{\delta_{k\varepsilon}(G, (\cdot, y))\}, l_q|, L_p(R_{n-1})|.$$

Отметим, что неравенство (39) является аналогом неравенства (31) для L_{pq}-норм. Для доказательства будем сначала считать, что $G(u, y)$ — целая функция по всем переменным и из $S(R_n)$, тогда (см. (11)) $G(u, y) = \sum\limits_{(k,\varepsilon)} \delta_{k\varepsilon}(G, (u, y))$, сумма справа конечная. Здесь $k = (k_1, \ldots, k_n) = (k', l)$, где $k' = (k_1, \ldots, k_{n-1})$, $l = k_n$, $k_j = 0, 1, \ldots$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon', \varepsilon_n)$, где $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, $\varepsilon_j = \pm 1$. Чтобы применить лемму 2, обозначим через ρ мультииндекс $\rho = (k', \varepsilon')$. Тогда можно разбить последовательность $\{\delta_{k\varepsilon}\}$ на две подпоследовательности $\{\delta^+_{(\rho,l)}\}$, $\{\delta^-_{(\rho,l)}\}$, где $\delta^+_{(\rho,l)} = \delta_{k,\varepsilon}$ при $\varepsilon_n = +1$, $\delta^-_{(\rho,l)} = \delta_{k\varepsilon}$ при $\varepsilon_n = -1$. При этом

$$G(u, y) = \sum_\rho \sum_l \delta^+_{(\rho,l)}(u, y) + \sum_\rho \sum_l \delta^-_{(\rho,l)}(u, y).$$

Обозначим теперь

$$\delta^{\pm}_{(\rho)}(u)=\sum_{l}\delta^{\pm}_{(\rho,\,l)}(u,0),\qquad \delta_{(\rho)}(u)=\delta^{+}_{(\rho)}(u)+\delta^{-}_{\rho}(u). \tag{40}$$

Тогда

$$g(u)=G(u,0)=\sum_{\rho}\delta_{(\rho)}(u)=\sum_{\rho}\delta^{+}_{(\rho)}(u)+\sum_{\rho}\delta^{-}_{(\rho)}(u). \tag{41}$$

Применим лемму 2 отдельно к $\{\delta^{+}_{(\rho,l)}(u,\ y)\}$ и $\{\delta^{-}_{(\rho,l)}(u,\ y)\}$. Члены этих последовательностей являются целыми функциями степени 2^l по y.

В качестве нормы Λ_1 и Λ_2 возьмем l_q-нормы. Условия (33), (34) выполнены. Тогда

$$||\{\delta^{\pm}_{(\rho)}\},l_q|,L_p(R_{n-1})|\leqslant c\left\{\lambda\int\limits_{|y|<1/\lambda}\psi^{\pm}(y)\,dy+\int\limits_{|y|>1/\lambda}\psi^{\pm}(y)\frac{dy}{|y|}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\lambda\int\limits_{|y|<1/\lambda}\psi(y)\,dy+\int\limits_{|y|>1/\lambda}\psi(y)\frac{dy}{|y|}\right\},$$

где $\psi^{\pm}(y)=||\{\delta^{\pm}_{(\rho,l)}(\cdot,\ y)\},\ l_q|,\ L_p(R_{n-1}),\ \psi(y)$ определено в (39).

Последнее неравенство следует из того, что каждая из последовательностей $\{\delta^{\pm}_{(\rho,l)}\}$ является подпоследовательностью $\{\delta_{k\varepsilon}\}$. В силу (40) из этой оценки следует, что

$$||\{\delta_{(\rho)}\},l_q|,L_p(R_{n-1})|\leqslant 2c\left\{\lambda\int\limits_{|y|<1/\lambda}\psi\,dy+\int\limits_{|y|>1/\lambda}\psi\frac{dy}{|y|}\right\}. \tag{42}$$

Осталось убедиться, что левая часть (42) совпадает с $|\ g,\ L_{p,q}(R_{n-1})\ |$. Для этого в силу определений (11) — (12), примененных в R_{n-1}, и равенства (41) нужно проверить, что

$$\delta_{k'\varepsilon'}(g,\ \ u)=\delta_{(\rho)}(u)\ \text{ при }\ \rho=(k',\ \varepsilon'). \tag{43}$$

Так как $\operatorname{supp}\tilde{\delta}^{n}_{k\varepsilon}\subset\Delta_{k\varepsilon}$, то носитель преобразования Фурье в R_{n-1} функции $\delta^{\pm}_{(\rho,l)}(u,\ 0)$ при любом $l\geqslant 0$ лежит в параллелепипеде $\Delta_{k',\varepsilon'}$. Это означает (см. (40)), что $\operatorname{supp}\tilde{\delta}^{n-1}_{(\rho)}\subset\Delta_{k'\varepsilon'}$ при $\rho=(k',\ \varepsilon')$, в частности носители $\tilde{\delta}^{n-1}_{(\rho)}(\xi')$ не пересекаются при различных ρ. Но тогда из (41) следует (43).

Неравенство (39) доказано для целой функции $G(u,\ y)\in S(R_n)$. В общем случае его можно получить замыканием в нормах, стоящих в (39).

При рассмотрении классов $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ нам потребуется неравенство разных измерений для $L_{p,q}$-норм, приведенное ниже.

Следствие 2. *В условиях следствия 1 справедливо неравенство*

$$|g,L_{p,\,q}(R_{n-1})|\leqslant c\lambda^{\frac{1}{p}}\,|G,L_{p,\,q}(R_n)|. \tag{44}$$

Чтобы доказать его, применим неравенство Гёльдера для интегралов в правой части (39), что дает

$$|g,L_{p,\,q}(R_{n-1})|\leqslant c\lambda^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(y)|^p\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}=c\lambda^{\frac{1}{p}}\,|G,L_{p,\,q}(R_n)|.$$

Если $1\leqslant m<n$, $x=(u,\ y)\in R_n$, $u\in R_m$, $y=(x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)$, $G(u,\ y)$ — *целая функция экспоненциального типа* λ_j *по* x_j $(j=m+1,\ \ldots,\ n)$, $g(u)=G(u,\ 0)$, *то*

$$|g,L_{p,q}(R_m)|\leqslant c\prod_{j=m+1}^{n}\lambda_j^{\frac{1}{p}}\,|G,L_{p,q}(R_n)|. \tag{45}$$

Это неравенство получается последовательным применением неравенства (44) по $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{m+1}$.

В выкладках будут использованы следующие неравенства.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda_s > 0$, $\lambda_{s+1}/\lambda_s \geqslant \lambda > 1$ $(s = 0, 1, \ldots)$. *Тогда для любой последовательности чисел* $\rho_s \geqslant 0$ *и любых* $\alpha > 0$, $p \geqslant 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha} \Big(\sum_{s=0}^{k} \rho_s \Big)^p \leqslant c \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^p \lambda_s^{-\alpha}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\alpha} \Big(\sum_{s=k}^{\infty} \rho_s \Big)^p \leqslant c \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^p \lambda_s^{\alpha}.$$

Постоянная c *зависит только от* λ, α, p.

Эту лемму можно считать известной. Для случая $\lambda_s = a^s$ $(a > 1)$ подобные неравенства получены в [1, с. 260—261], причем приведенное там доказательство использует, на самом деле, лишь неравенство $\lambda_{s+1}/\lambda_s \geqslant \lambda > 1$ $(s = 0, 1, \ldots)$.

Лемма, приведенная ниже, важна для доказательства линейности операторов продолжения в теоремах 1 и 2.

Лемма 4. *Класс* $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q, \theta \leqslant \infty)$ *совпадает с совокупностью всех функций* $F(x) \in L_{p,q}(R_n)$, *для которых справедливо разложение*

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(F, x) \tag{46}$$

(*см.* (17)), *сходящееся к* $F(x)$ *в* $L_{p,q}$, *с конечной нормой*

$$|F\, B|_{(1)} = \Big\{ \sum_{s=0}^{\infty} (a^s \,|\, q_s(F), L_{p,q}(R_n) |)^\theta \Big\}^{1/\theta} \tag{47}$$

(*при* $\theta = \infty$ *сумма заменяется на* sup *величины в круглых скобках*). *Норма* $|F, B|_{(1)}$ *эквивалентна норме* $|F, B|$ (14).

Замечание. Существенно, что разложение (46) определяется *единым набором линейных операторов* (17) для всех $F \in B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ и поэтому *линейно* зависит от F.

Доказательство. Ясно, что совокупность функций F с условиями (46) — 47) входит в $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ и $|F, B| \leqslant |F, B|_{(1)}$. Покажем обратное. Пусть $F \in B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$, рассмотрим разложение

$$(Q):\ F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(x), \qquad |F|_{(Q)} \leqslant 2\,|F, B|. \tag{48}$$

Отметим, что при $s \geqslant 1$ $q_s(Q_i, x) \equiv 0$ при $i \leqslant s - 1$, так как supp $\widetilde{Q}_i^n \subset P_n(i)$, а в q_s (17) входят «пачки», отвечающие «коридору» $\Gamma_n(s) = P_n(s) \setminus P_n(s-1)$. Следовательно (дальнейшие пояснения ниже),

$$|q_s(F), L_{p,q}| \leqslant \sum_{i=s}^{\infty} |q_s(Q_i), L_{p,q}| \leqslant \sum_{i=s}^{\infty} |Q_i, L_{p,q}|. \tag{49}$$

Мы использовали разложение (Q), неравенство «норма суммы не больше суммы норм» и учли сказанное выше. Второе неравенство следует из определения q_s (17) и вида нормы в $L_{p,q}$ (12). Теперь мы можем оценить $|F, B|_{(1)}$ для $1 \leqslant \theta < \infty$ (пояснения ниже):

$$|F, B|_{(1)} \leqslant \Big\{ \sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta} \Big(\sum_{i=s}^{\infty} |Q_i, L_{p,q}| \Big)^\theta \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c \Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} a^{i\theta} |Q_i, L_{p,q}|^\theta \Big\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Первое неравенство следует из оценки (49), второе — результат применения леммы 3. Справа стоит $|F|_{(Q)}$, что дает в силу (48) нужную оценку.

При $\theta = \infty$ оценка проводится иначе. Из (49) следует

$$|q_s(F), L_{p,q}| \leqslant |F, B| \sum_{i=s}^{\infty} a^{-i} \leqslant ca^{-s} |F, B|,$$

откуда следует нужная оценка нормы $|F, B|_{(1)}$ в (47). Из конечности $|F, B|_{(1)}$ следует абсолютная сходимость ряда (46) по норме $L_{p,q}$. То, что ряд (46) сходится именно к разлагаемой функции, доказывается точно так же, как в работе П. И. Лизоркина [3, § 2], и мы не будем на этом останавливаться.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О СЛЕДАХ

Здесь собраны доказательства прямых утверждений о непрерывности оператора следа P, входящих в состав теорем 1 и 2. Это удобно, поскольку оценки следов имеют много общего для рассмотренных в работе классов. Всюду ниже $x = (u, y) \in R_n$, $u = (x_1, \ldots, x_m) \in R_m$ $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и сохранены все обозначения § 2.

1°. Доказательство теоремы о следах для класса $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ (прямое вложение в теореме 1)

Докажем линейность и непрерывность оператора следа

$$P: B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n) \to B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)$$

в условиях теоремы 1. Пусть $F(u, y) \in S(R_n)$ и является целой функцией экспоненциального типа. Это предположение не ограничивает общности, во всяком случае, при $\theta < \infty$, так как множество функций такого вида всюду плотно в $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$. Положим $(PF)(u) = F(u, 0)$, линейность оператора следа очевидна. Покажем ограниченность P на указанном множестве. Доказательство проведем в два этапа. Первый специфичен для B-классов, второй будет использован в теоремах для других классов.

1-й этап. *Для следа $f(u) = F(u, 0)$ справедливо разложение*

$$f(u) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(u), \qquad \operatorname{supp} \tilde{g}_s^m \subset P_m(s), \tag{50}$$

удовлетворяющее условию

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\alpha_s |g_s, L_{p,q}(R_m)|)^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c|F, \Lambda|, \tag{51}$$

где α_s определено формулой (20) *и (в данном случае)*

$$\Lambda = B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n).$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим разложение

$$F(u, y) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(u, y), \qquad \operatorname{supp} \widetilde{Q}_s^n \subset P_n(s),$$

такое что

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty} (a^s |Q_s, L_{p,q}(R_n)|)^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant 2|F, B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)| \tag{52}$$

(см. определение 1 § 1). Тогда для следа $f(u) = F(u, 0)$ получим разложение (50), где $g_s(u) = Q_s(u, 0)$ и, поскольку $\operatorname{supp} \widetilde{Q}_s^n \subset P_n(s) = P_m(s) \times P_{n-m}(s)$, легко видеть, что $\operatorname{supp} \tilde{g}_s^m \subset P_m(s)$.

Учитывая, что $Q_s(u, y)$ является целой функцией по x_j степени $\lambda_j(s)$ $(m + 1 \leqslant j \leqslant n)$, по неравенству (45) получим

$$|g_s, L_{p,q}(R_m)| \leqslant c \prod_{j=m+1}^{n} \lambda_j(s)^{\frac{1}{p}} |Q_s, L_{p,q}(R_n)|,$$

откуда с учетом обозначения (20) и оценки (52) следует (51).

2-й этап. *Покажем, что из соотношений* (50) — (51) *при условии* (22) *следует неравенство*

$$|f, B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)| \leqslant c|F, \Lambda|. \tag{53}$$

Для этого выберем подпоследовательность $\{s(i)\}_{i=0}^{\infty}$ чисел $s = 0, 1, \ldots$, как указано в теореме 1, дополним ее для удобства числом $s(-1) = -1$ и обозначим

$$q_{(i)}(u) = \sum_{s=s(i-1)+1}^{s(i)} g_s(u) \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Тогда в силу (50) $\operatorname{supp} \tilde{q}_{(i)}^m \subset P_m(s(i)) = P'_m(i)$, а разбивая ряд в (50) на «пачки», получим разложение

$$(q):\ f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=s(i-1)+1}^{s(i)} g_s(u) = \sum_{i=0}^{\infty} q_{(i)}(u).$$

Используя неравенство Гёльдера для сумм, обозначение (20) и условие (23) теоремы 1, получим

$$|q_{(i)}, L_{p,q}|^{\theta} \leqslant \Big(\sum_{s=s(i-1)+1}^{s(i)} |g_s, L_{p,q}|\Big)^{\theta} \leqslant \Big\{\sum_{s=s(i-1)+1}^{s(i)} \alpha_s^{-\theta'}\Big\}^{\frac{\theta}{\theta'}} \times$$
$$\times \sum_{s=s(i-1)+1}^{s(i)} (\alpha_s |g_s, L_{p,q}|)^{\theta} \leqslant c a^{-i\theta} \sum_{s=s(i-1)+1}^{s(i)} (\alpha_s |g_s, L_{p,q}|)^{\theta}.$$

Из полученной оценки и (51) следует, что

$$|f|_{(q)} = \Big\{\sum_{i=0}^{\infty} a^{i\theta} |q_{(i)}, L_{p,q}|^{\theta}\Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c \Big\{\sum_{s=0}^{\infty} (\alpha_s |g_s, L_{p,q}|)^{\theta}\Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c|F, \Lambda|.$$

Норма слева в (53) есть $\inf\limits_{q} |f|_{(q)}$, что завершает доказательство неравенства (53).

В данном случае $\Lambda = B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$. Значит, оператор следа P линеен и ограничен на всюду плотном множестве в $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n)$. Его можно распространить по непрерывности на все пространство.

При $\theta = \infty$ в доказательстве потребуются небольшие изменения. Не будем останавливаться на этом (см. аналог в [1, с. 458—460]).

З а м е ч а н и е. Рассуждения, проведенные здесь, дают при $q = 2$ соответствующий результат для класса $B^{(\Delta)}_{p,\theta}$.

2°. Доказательство теоремы о следах для класса $L_{pq}^{(\Delta)}(R_n)$ (прямое вложение в теореме 2)

Докажем непрерывность оператора следа

$$P:\ L_{p,\,q}^{(\Delta)}(R_n) \to B_{p,\,q,\,p}^{(\Delta')}(R_m). \tag{54}$$

Пусть $F(u,\ y)$ — целая функция экспоненциального типа и из $S(R_n)$. Множество таких функций всюду плотно в $L_{p,\,q}^{(\Delta)}(R_n)$. Тогда положим $(PF)(u) \rightleftharpoons F(u,\ 0)$, линейность следа очевидна. Обозначим $f(u) \rightleftharpoons F(u,\ 0)$. Справедливо разложение (см. обозначения (17) и (11)).

$$F(u,y) = \sum_{(k,\,\varepsilon)} \delta_{k\varepsilon}(F,(u,y)) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(F,(u,y))$$

(суммы справа, на самом деле, конечные), причем $\operatorname{supp}\,\tilde{q}_s^n(F) \subset \Gamma_n(s)$. Для следа получим разложение (50), где

$$g_s(u) \rightleftharpoons q_s(F,\ (u,\ 0)),\ \operatorname{supp}\tilde{g}_s^m \subset P_m(s) \tag{55}$$

(см. пояснения после оценки (52)).

Сначала будем считать, что $m \rightleftharpoons n-1$, т. е. $u \in R_{n-1}$, $y \in R_1$. Тогда наша ближайшая цель состоит в получении оценки

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty}(a^s\lambda_n(s)^{-\frac{1}{p}}\,|\,g_s, L_{p,\,q}(R_{n-1})\,|\,)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c\,|\,F, L_{p,\,q}^{(\Delta)}(R_n)\,|\,. \tag{56}$$

Для этого применим следствие 1 из леммы 2. Из неравенства (39)

$$|\,g_s, L_{p,\,q}(R_{n-1})\,| \leqslant c\left\{\lambda_n(s)\int\limits_{|y|<1/\lambda_n(s)}\psi_s\,dy + \int\limits_{|y|>1/\lambda_n(s)}\psi_s\frac{dy}{|\,y\,|}\right\}, \tag{57}$$

где

$$\psi_s(y) = \|\ \{\delta_{k\varepsilon}(q_s(F),\ (\cdot,\ y))\},\ l_q\,|,\ L_p(R_{n-1})\,|. \tag{58}$$

Обозначим

$$\psi(u,y) = \sup_{s\geqslant 0}\left\{a^s\Big[\sum_{(k,\,\varepsilon)\in\gamma_n(s)}|\,\delta_{k\varepsilon}(F,(u,y))\,|^q\Big]^{\frac{1}{q}}\right\}, \tag{59}$$

$$\varphi(y) = |\,\psi(\cdot,y), L_p(R_{n-1})\,|\,. \tag{60}$$

Из определения нормы в $L_{p,q}^{(\Delta)}$ (16) и оценки $|\,\{a_s\}, l_\infty\,| \leqslant |\,\{a_s\}, l_q\,|$ следует неравенство

$$|\,\psi,\ L_p(R_n)\,| \leqslant |\,F,\ L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)\,|. \tag{61}$$

Но

$$|\,\{\delta_{k\varepsilon}(q_s(F),(u,y))\}, l_q\,| = \left\{\sum_{(k,\,\varepsilon)\in\gamma_n(s)}|\,\delta_{k\varepsilon}(F,\,(u,y))\,|^q\right\}^{\frac{1}{q}},$$

откуда, с учетом (57), получим

$$\left(\frac{a^s}{\lambda_n(s)^{1/p}}\,|\,g_s, L_{p,\,q}(R_{n-1})\,|\right)^p \leqslant c\left\{\lambda_n(s)^{p-1}\Big(\int\limits_{|y|<1/\lambda_n(s)}\varphi\,dy\Big)^p + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda_n(s)}\Big(\int\limits_{|y|>1/\lambda_n(s)}\varphi\frac{dy}{|\,y\,|}\Big)^p\right\}. \tag{62}$$

Оценим вклад в (56) первого слагаемого в правой части (62). Обозначим $\Delta_k \rightleftharpoons \{y \in R_1: \lambda_n(k+1)^{-1} \leqslant |y| < \lambda_n(k)^{-1}\}$. Имеем (см. пояснения ниже)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n(s)^{p-1}\Big(\int\limits_{|y|<1/\lambda_n(s)} \varphi\, dy\Big)^p = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n(s)^{p-1}\Big(\sum_{k=s}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k} \varphi\, dy\Big)^p \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n(k)^{p-1}\Big(\int\limits_{\Delta_k} \varphi\, dy\Big)^p \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)^p\, dy = |\psi, L_p(R_n)|^p.$$

Первое равенство следует из аддитивности интеграла, следующее неравенство получено применением леммы 3 с учетом условий $\lambda_n(s+1)/\lambda_n(s) \geqslant 2 > 1$, $p > 1$. Далее мы применили к интегралу по Δ_k неравенство Гёльдера $(1/p + 1/p' \rightleftharpoons 1)$ и воспользовались аддитивностью интеграла. Осталось вспомнить определение $\varphi(y)$ (60), теорему Фубини и неравенство (61). Итак, вклад первого слагаемого из (62) в оценку (56) не больше, чем ее правая часть. Для второго слагаемого из (62) аналогично получим (см. пояснения ниже)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n(s)^{-1}\Big(\int\limits_{|y|>1/\lambda_n(s)} \varphi \frac{dy}{|y|}\Big)^p \leqslant c\Big(\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n(s)^{-1}\Big)\Big(\int\limits_{|y|>1/\lambda_n(0)} \varphi \frac{dy}{|y|}\Big)^p +$$

$$+ c\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n(s)^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{s-1}\int\limits_{\Delta_k} \varphi \frac{dy}{|y|}\Big)^p \leqslant c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)^p\, dy + c_2\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n(k+1)^{-1}\Big(\int\limits_{\Delta_k} \varphi \frac{dy}{|y|}\Big)^p \leqslant$$

$$\leqslant c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)^p\, dy + c_3\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k} \varphi(y)^p\, dy \leqslant (c_1 + c_3)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)^p\, dy.$$

Сначала мы выделили интеграл по $|y| > 1/\lambda_n(0)$, а оставшийся интеграл по $\lambda_n(s)^{-1} \leqslant |y| < \lambda_n(0)^{-1}$ расписали в виде суммы интегралов по Δ_k. Затем к интегралу по $|y| > 1/\lambda_n(0)$ применили неравенство Гёльдера $(1 < p < \infty)$ и интеграл от $\varphi(y)^p$ распространили на всю ось; ко второй сумме применена лемма 3 с учетом условия $\lambda_n(s+1)/\lambda_n(s) \geqslant 2 > 1$. Наконец, по неравенству Гёльдера $(1<p<\infty)$ $\Big(\int\limits_{\Delta_k} \varphi(y)|y|^{-1}\, dy\Big)^p \leqslant c\lambda_n(k+1)\int\limits_{\Delta_k} \varphi(y)^p\, dy$, откуда следует предпоследнее неравенство. Последнее очевидно. Мы оценили вклад второго слагаемого из (62) в (56), доказав тем самым это неравенство (см. (60), (61)).

Допустим теперь, что $1 \leqslant m < n-1$, $x \rightleftharpoons (u, y) \rightleftharpoons (v, x_n)$, где $u \in R_m$, $y \in R_{n-m}$, $v \in R_{n-1}$, $v \rightleftharpoons (u, z)$, $z \in R_{n-m-1}$. Тогда мы обозначим

$$G_s(v) = G_s(u, z) \rightleftharpoons q_s(F, (v, 0)), \operatorname{supp} \widetilde{G}_s^{n-1} \subset P_{n-1}(s), \tag{63}$$

и по доказанному выше верна оценка (56), имеющая сейчас вид

$$\Big\{\sum_{s=0}^{\infty} (a^s\lambda_n(s)^{-\frac{1}{p}}\,|G_s, L_{p,q}(R_{n-1})|)^p\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c\,|F, L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)|. \tag{56'}$$

Но $G_s(u, z)$ — целая функция экспоненциального типа $\lambda_j(s)$ по x_j $(m + 1 \leqslant j \leqslant n-1)$ и $g_s(u) \rightleftharpoons G_s(u, 0)$ (см. (56) и (63)). Следовательно, по неравенству разных измерений для $L_{p,q}$-норм (45)

$$|g_s, L_{p,q}(R_m)| \leqslant c\prod_{j=m+1}^{n-1} \lambda_j(s)^{\frac{1}{p}}\,|G_s, L_{p,q}(R_{n-1})|.$$

Отсюда и из (56′) следует неравенство

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty}(\alpha_s\,|\,g_s, L_{p,q}(R_m)\,|\,)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant c\,|\,F, L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)\,|\,.$$

Оно совпадает с (51) при $\theta = p$; $\Lambda = L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$. Условие (22) также выполнено при $\theta = p$ (см. условия теоремы 2). Следовательно, из утверждения 2-го этапа п. 1° § 4 вытекает неравенство (53) при $\theta = p$, $\Lambda = L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$. Оно доказывает ограниченность оператора следа (54) на всюду плотном множестве в $L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$, а значит, возможность распространить его по непрерывности на все $L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$.

З а м е ч а н и е. Проведенное выше доказательство показывает справедливость замечания 5 к теореме 2, поскольку в правой части (56) на самом деле стоит величина $|\,\psi, L_p(R_n)\,| = |\,F, L_{p,q,\infty}^{(\Delta)}(R_n)\,|$ (см. обозначение (59)).

3°. Доказательство теоремы о следах для класса $\mathscr{L}_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$ (прямое вложение в теореме 2)

В силу расширения класса $\mathscr{L}_{p,q}^{(\Delta)}$ с ростом q для доказательства прямого вложения (26) достаточно установить ограниченность оператора следа

$$P:\mathscr{L}_{p,\infty}^{(\Delta)}(R_n)\to B_{p,p}^{(\Delta')}(R_m). \tag{64}$$

Рассуждения точно такие же, как в п. 2°, поэтому будем кратки. Имеет место разложение (50), (55). Вместо оценки (56) надо получить неравенство

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty}(a^s\lambda_n(s)^{-\frac{1}{p}}\,|\,g_s, L_p(R_{n-1})\,|\,)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant c\,|\,F, \mathscr{L}_{p,\infty}^{(\Delta)}(R_n)\,|\,. \tag{65}$$

Применив неравенство (31) при $r = 1$, получим (57), где теперь $\psi_s(y) = |\,q_s(F,(\cdot\,,y)), L_p(R_{n-1})\,|$. Роль $\psi(u,y)$ будет играть

$$\psi(u,y)=\sup_{s\geqslant 0}a^s\,|\,q_s(F,(u,y))\,|\,;\qquad |\,\psi, L_p(R_n)\,| = |\,F, \mathscr{L}_{p,\infty}(R_n)\,|\,.$$

Используя обозначение (60), получим (62) с $q = 2$, а из него, точно так же как и при выводе (56), получим (65). Переход от случая $m = n-1$ к $m < n-1$ осуществляется тем же рассуждением, что в п. 2° после (63), с использованием неравенства (65) и неравенства разных измерений, теперь уже в L_p-нормах. В результате получим неравенство

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty}(\alpha_s\,|\,g_s, L_p(R_m)\,|\,)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant c\,|\,F, \mathscr{L}_{p,\infty}^{(\Delta)}(R_n)\,|\,,$$

совпадающее с (51) при $\theta = p$, $q = 2$, $\Lambda = \mathscr{L}_{p,\infty}^{(\Delta)}(R_n)$. Из него ссылкой на 2-й этап п. 1° § 4 получим неравенство (53) при тех же параметрах θ, q, Λ, т. е. неравенство

$$|\,f, B_{p,p}^{(\Delta')}(R_m)\,|\leqslant c\,|\,F, \mathscr{L}_{p,\infty}^{(\Delta)}(R_n)\,|$$

(см. определение 2). Тем самым ограниченность оператора (64) доказана.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О ПРОДОЛЖЕНИИ

Здесь проведено построение оператора продолжения T, обеспечивающего обратные вложения в теоремах 1 и 2. Построение этого оператора проводится единым образом для всех рассмотренных классов. Поэтому мы сначала опишем конструкцию оператора продолжения, а затем рассмотрим вопрос об ограниченности этого оператора в каждом из указанных классов.

1°. Конструкция оператора продолжения

Мы используем здесь обозначения § 2. Рассмотрим класс $B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)$, считая, что выполнены условия (22) и что подпоследовательность $\{s(i)\}$ чисел $s = 0, 1, \ldots$ определена условием (23).

Пусть $f(u) \in B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)$ и является целой функцией экспоненциального типа из $S(R_m)$. Это предположение не ограничивает общности при $\theta < \infty$, так как указанное множество плотно в этом классе. Из леммы 4 следует, что справедливо разложение (все суммы ниже, на самом деле, конечные)

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} q_{(i)}(f, u) \tag{66}$$

где $\operatorname{supp} \tilde{q}^{m}_{(i)} \subset P'_m(i) = P_m(s(i))$, и, что существенно, члены ряда зависят от f *линейно*, такое, что

$$A_\theta \equiv \left\{\sum_{i=0}^{\infty} (a^i \,|\, q_{(i)}(f), L_{p,q}(R_m)\,|)^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c\,|\, f, B^{(\Delta')}_{p,q,\theta}(R_m)\,|, \tag{67}$$

c — не зависит от f.

Построение проведем в два этапа.

1-й этап. *По разложению* (66) *построим разложение*

$$f(u) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(f, u), \qquad \operatorname{supp} \tilde{g}^m_s(f) \subset P_m(s), \tag{68}$$

члены которого линейно зависят от f, *причем* (*см.* (20))

$$B_\theta \equiv \left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\alpha_s \,|\, g_s(f), L_{p,q}(R_m)\,|)^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c A_\theta. \tag{69}$$

Отметим, что конструкция разложения (68) строится в зависимости от θ. Пусть пока $1 < \theta \leqslant \infty$. Фиксируем $i \geqslant 0$ и для $s(i) \leqslant s \leqslant s(i+2) - 1$ рассмотрим функции $(1/\theta + 1/\theta' = 1)$

$$q_{(s,i)}(f, u) = \alpha_s^{-\theta'} \mu_i^{-1} q_{(i)}(f, u), \tag{70}$$

где (пояснения ниже) нормирующий множитель

$$\mu_i = \sum_{s=s(i)}^{s(i+2)-1} \alpha_s^{-\theta'} = \sum_{s=s(i)}^{\infty} - \sum_{s=s(i+2)}^{\infty} \geqslant \sum_{s=s(i+1)-1}^{\infty} - \sum_{s=s(i+2)}^{\infty} >$$
$$> a^{-(i+1)\theta'} - a^{-(i+2)\theta'} \geqslant c a^{-i\theta'}. \tag{71}$$

Мы учли условие (22), затем условие $s(i+1) \geqslant s(i) + 1$, потом определение (23), последнее неравенство очевидно. Из определений

$$\sum_{s=s(i)}^{s(i+2)-1} q_{s,i}(f, u) = q_{(i)}(f, u),$$

откуда (пояснения ниже)

$$f(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{s=s(i)}^{s(i+2)-1} q_{s,\,i}(f,u)=\sum_{s=s(0)}^{\infty} g_s(f,u);$$

$$g_s(f,\ u)=q_{s,0}(f,\ u),\qquad s(0)\leqslant s\leqslant s(1)-1;$$

$$g_s(f,\ u)=q_{s,i}(f,\ u)+q_{s,i-1}(f,u),\quad s(i)\leqslant s\leqslant s(i+1)-1,$$

$$i=1,2,\ldots \tag{72}$$

Первое равенство использует разложение (66), затем сменен порядок суммирования по s и i, при этом для фиксированного s: $s(0)\leqslant s\leqslant s(1)-1$, в сумму по i входит только член с $i=0$, а при фиксированном s: $s(k)\leqslant s\leqslant s(k+1)-1$, $k=1,2,\ldots$, в сумму по i входят два члена: с $i=k$ и $i=k-1$. Это и учтено в обозначениях $g_s(f,u)$ (72). Если $s(0)\geqslant 1$, то положим еще $g_s(f,\ u)=0$ при $0\leqslant s\leqslant s(0)-1$. Это и будет требуемое разложение (68). Его члены зависят от f линейно (в силу линейности разложения (66)), кроме того, $\operatorname{supp}\tilde g_s^m\subset P_m(s(i))\subset P_m(s)$ (см. (72), (70), (66)). Наконец, из (70) и (71)

$$\sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1}(\alpha_s\,|\,q_{s,\,i}(f),L_{p,\,q}\,|)^{\theta}\leqslant \mu_i^{-\theta}\,|\,q_{(i)}(f),L_{p,\,q}\,|^{\theta}\sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1}\alpha_s^{-\theta'}\leqslant ca^{i\theta}\,|\,q_{(i)}(f),L_{p,\,q}\,|^{\theta}.$$

Из этого неравенства и определения $g_s(f,\ u)$ (72) следует нужная оценка «пачки» ряда в левой части (69) по $s(i)\leqslant s\leqslant s(i+1)-1$, а значит, и всего ряда.

При $\theta=1$ построение иное. Обозначим через $s'(i)$ номер, для которого $\alpha_{s'(i)}^{-1}=\beta_{p1}(s(i))=\sup\limits_{s\geqslant s(i)}\alpha_s^{-1}$. Так как $\alpha_s^{-1}\to 0\,(s\to\infty)$, такой номер существует и, более того, в силу выбора $s(i)$ в (23), справедливо неравенство $s(i)\leqslant s'(i)\leqslant s(i+1)-1$. Положим теперь при $s(i)\leqslant s\leqslant s(i+1)-1$, $i=0,1,\ldots$

$$g_s(f,u)=\begin{cases} q_{(i)}(f,u), & s=s'(i);\\ 0 & s\neq s'(i).\end{cases}$$

Если $s(0)\geqslant 1$, то будем еще считать $g_s(f,\ u)=0$ при $0\leqslant s\leqslant s(0)-1$. Тогда равенство (68) совпадает с (66), линейность $g_s(f,\ u)$ по f очевидна и $\operatorname{supp}\tilde g_s^m(f)\subset P_m(s(i))\subset P_m(s)$. Наконец, при $s=s'(i)$

$$\alpha_{s'(i)}^{-1}\geqslant \beta_{p,\,1}(s(i+1)-1)>a^{-(i+1)},$$

откуда

$$\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s\,|\,g_s(f),L_{p,\,q}\,|=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{s'(i)}^{-1}\,|\,q_{(i)}(f),L_{p,\,q}\,|\leqslant cA_1$$

(см. (67)). Выполнены условия (68) — (69) и тем самым завершено построение 1-го этапа.

2-й этап. *Построим по разложению* (68) *функцию* $F(u,\ y)$, *продолжающую функцию* $f(u)$ *с* R_m *на* R_n $(1\leqslant m<n,\ x=(u,\ y)\in R_n,\ u=(x_1,\ldots,x_m)\in R_m,\ y=(x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)$.

Для этого рассмотрим неотрицательную функцию $\mu(\lambda)\in C_0^{\infty}(R_1)$, такую что $\operatorname{supp}\ \mu(\lambda)\subset({}^1/_2,\ 1)$;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\lambda)\,d\lambda=1.$$

Обозначим $g_\pm(t) = \overline{\mu(\pm\lambda)}^{(1)}(t)$ (обратное преобразование Фурье в R_1). Тогда, $g_\pm(t)$ — целая функция степени 1,

$$g_\pm(t) \in L_p(R_1)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty),\ |g_\pm(t)| \leqslant g_\pm(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\lambda)\,d\lambda = 1.$$

В силу условий 1) — 2) на $\Delta_j(s)$ и обозначения (3) (см. § 1), при $m+1 \leqslant j \leqslant n$ для каждого $s = 1, 2 \ldots$ либо $(\lambda_j(s)/2, \lambda_j(s)) \subset \Delta_j(s) \setminus \Delta_j(s-1)$ — такие индексы j образуют множество J_s^+, либо $(-\lambda_j(s), -\lambda_j(s)/2) \subset \Delta_j(s) \setminus \Delta_j(s-1)$ — такие индексы j образуют множество J_s^-, либо выполнены оба условия — такие индексы j отнесем к J_s^+ (при $s = 0$ в этих условиях справа стоит $\Delta_j(0)$). Тогда $J_s^+ \cap J_s^- = \phi$; $J_s^+ \cup J_s^- = \{j : m+1 \leqslant j \leqslant n\}$. Обозначим теперь

$$\psi_s(y) = \prod_{j \in J_s^+} g_+(\lambda_j(s)\,x_j) \prod_{j \in J_s^-} g_-(\lambda_j(s)\,x_j). \tag{73}$$

Ясно, что

$$\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_s^{n-m} \subset \Gamma_{n-m}(s), \qquad |\psi_s(y)| \leqslant \psi_s(0) = 1; \tag{74}$$

$$|\psi_s, L_p(R_{n-m})| = c \prod_{j=m+1}^{n} \lambda_j(s)^{-\frac{1}{p}} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Пусть $f(u)$ задана разложением (68). Рассмотрим функцию $F(u, y)$, заданную разложением

$$(Q):\ F(u, y) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(f, u)\,\psi_s(y) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(f, (u, y)). \tag{75}$$

Имеем $F(u, 0) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} g_s(f, u) = f(u)$, т. е. $F(u, y)$ является продолжением функции $f(u)$ с R_m на R_n. Члены ряда (75) зависят от f линейно, что показывает линейность оператора продолжения

$$(Tf)(u, y) = F(u, y).$$

Рассмотрим функции (см. обозначения (5) — (11))

$$\delta_{k\varepsilon}(Q_s(f)\ \ (u, y)) = \delta_{k'\varepsilon'}(g_s(f), u)\ \delta_{k''\varepsilon''}(\psi_s, y). \tag{76}$$

Здесь $k = (k', k'')$, $\varepsilon = (\varepsilon', \varepsilon'')$, где $k' = (k_1, \ldots, k_m)$, $k'' = (k_{m+1} \ldots, k_n)$, $k_j = 0, 1, \ldots$; $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon'' = (\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \pm 1$. В силу свойств $g_s(f, u)$ и $\psi_s(y)$ (68) и (74),

$$\operatorname{supp}\widetilde{Q}_s^n(f) \subset \Gamma_n(s),$$

откуда

$$\delta_{k\varepsilon}(Q_s(f)\ \ (u, y)) \equiv 0 \text{ при } (k, \varepsilon) \notin \gamma_n(s). \tag{77}$$

Отсюда следует, что (см. обозначение (17))

$$q_s(F, (u, y)) = Q_s(f, (u, y)) = \psi_s(y)\,g_s(f, u). \tag{78}$$

При этом, если $(k, \varepsilon) \in \gamma_n(s)$, то при одном (k'', ε''), удовлетворяющем условиям $2^{k_j} = \lambda_j(s)$ $(j = m+1, \ldots, n)$ и $\varepsilon_j = 1$ для $j \in J_s^+$; $\varepsilon_j = -1$ для $j \in J_s^-$, имеем из (76)

$$\delta_{k\varepsilon}(F, (u, y)) = \delta_{k'\varepsilon}(g_s(f), u)\ \psi_s(y),$$

а для всех остальных (k'', ε'') $\delta_{k\varepsilon}(F, (u, y)) \equiv 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\left\{\sum_{(k,\,\varepsilon)\in\gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F,(u,y))|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant |\psi_s(y)| \left\{\sum_{(k',\,\varepsilon')} |\delta_{k',\,\varepsilon'}(g_s(f),u)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (79)$$

Дальнейшие рассмотрения связаны с доказательством ограниченности T как оператора из $B_{p,q,\theta}^{(\Delta')}(R_m)$ в то или иное пространство и проводятся отдельно для каждого из них.

2°. Доказательство теоремы продолжения для класса $B_{p,\,q,\,\theta}^{(\Delta)}(R_n)$

В п. 1° было построено продолжение $F(u, y)$ (75) функции $f(u) \in B_{p,q,\theta}^{(\Delta')}(R_m)$. Докажем оценку

$$|F, B_{p,\,q,\,\theta}^{(\Delta)}(R_n)| \leqslant c\,|f, B_{p,\,q,\,\theta}^{(\Delta')}(R_m)|,$$

где c не зависит от f. Для этого возьмем норму в $L_p(R_n)$ от обеих частей неравенства (79). Используя определение нормы, теорему Фубини и свойство $\psi_s(y)$ (74), получим

$$|q_s(F), L_{p,\,q}(R_n)| \leqslant c \prod_{j=m+1}^{n} \lambda_j(s)^{-1/p}\,|g_s(f), L_{p,\,q}(R_m)|.$$

Домножая на a^s и суммируя по s, получим из (69), (67)

$$|F|_{(Q)} \leqslant cB_\theta \leqslant c_1\,|f, B_{p,\,q,\,\theta}^{(\Delta')}(R_m)|,$$

т. е. в силу определения 1 § 1 нужную оценку. Теорема продолжения доказана полностью при $\theta < \infty$. При $\theta = \infty$ проведенные выше рассуждения требуют некоторых дополнительных обоснований (сходимость рядов и т. д.). Не будем на этом останавливаться.

Замечание. При $q = 2$ проведенные выше рассуждения дают теорему продолжения для классов $B_{p,\theta}^{(\Delta)}$.

3°. Доказательство теоремы продолжения для класса $L_{p,q}^{(\Delta)}(R_n)$

В п. 1° при $\theta = p$ было построено продолжение $F(u, y)$ (75) функции $f(u) \in B_{p,q,p}^{(\Delta')}(R_m)$. Докажем оценку

$$|F, L_{p,\,q}^{(\Delta)}(R_n)| \leqslant c\,|f, B_{p,\,q,\,p}^{(\Delta')}(R_m)|. \qquad (80)$$

Пусть $x = (u,\ y) = (v,\ x_n)$, $u \in R_m$, $y \in R_{n-m}$, $v \in R_{n-1}$. Обозначим

$$\psi(x) = \psi(v, x_n) = \sum_{s=0}^{\infty} a^s \left(\sum_{(k,\,\varepsilon)\in\gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F,(v,x_n))|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (81)$$

Умножим обе части (79) на a^s, просуммируем по s, а затем возьмем норму в $L_p(R_{n-1})$, используя в правой части неравенство «норма суммы не больше суммы норм». Получим для функции $\varphi(x_n) \equiv |\psi(\cdot\,, x_n), L_p(R_{n-1})|$ оценку (дальнейшие пояснения см. ниже)

$$\varphi(x_n) \leqslant c \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \lambda_n(s)^{\frac{1}{p}}\,|g_\pm(\lambda_n(s)\,x_n)|\,|g_s(f), L_{p,\,q}(R_m)|. \qquad (82)$$

При вычислении нормы в правой части мы использовали теорему Фубини, определение $L_{pq}(R_m)$, определение чисел α_s (20), определение $\psi_s(y)$ (73) и, если $m < n - 1$, то еще соотношение, вытекающее из (73):

$$|\psi_s(\cdot, x_n), L_p(R_{n-m-1})| = c \prod_{j=m+1}^{n-1} \lambda_j(s)^{-\frac{1}{p}} |g_\pm(\lambda_n(s) x_n)|.$$

Отметим теперь, что (аналогично оценкам ядер K_μ в (29), (32)), справедливы неравенства

$$|g_\pm(\lambda_n(s)t)| \leqslant 1, \quad |g_\pm(\lambda_n(s)t)| \leqslant c\lambda_n(s)^{-1}|t|^{-1},$$

$$\lambda_n(s) \int_{-\infty}^{\infty} |g_\pm(\lambda_n(s)t)|\,dt \leqslant c.$$

Из этих оценок и неравенства (82) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)^p\,dt \leqslant c \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha_s |g_s(f), L_{p,q}(R_m)|)^p$$

(см. [1, с. 428—431], где это утверждение получено для случая $\lambda_n(s) = b^s$ $(b > 1)$, но в доказательстве используется лишь условие $\lambda_n(s+1)/\lambda_n(s) \geqslant \lambda > 1$ $(s = 0, 1, \ldots)$, выполненное здесь с $\lambda = 2$). Последнее неравенство в силу обозначения $\varphi(t)$, неравенства (69) и (67) при $\theta = p$ дает

$$|\psi, L_p(R_n)| \leqslant cB_p \leqslant c_1 |f, B^{(\Delta')}_{p,q,p}(R_m)|. \tag{83}$$

Но согласно обозначению ψ (81) и определению 2 $|F, L^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)| \leqslant |\psi, L_p(R_n)|$, что и дает (80).

Замечание. Неравенство (83) показывает справедливость замечания 6 к теореме 2, поскольку $|F, L^{(\Delta)}_{p,q,1}(R_n)| = |\psi, L_p(R_n)|$ (см. (81)).

4°. Доказательство теоремы продолжения для класса $\mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)$

В силу расширения класса $\mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}$ с ростом q для доказательства обратного вложения (26) достаточно установить неравенство

$$|F, \mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,1}(R_n)| \leqslant c |f, B^{(\Delta')}_{p,p}(R_m)|.$$

Обозначим теперь

$$\psi(v, x_n) = \sum_{s=0}^{\infty} a^s |q_s(F, (v, x_n))|, \qquad \varphi(x_n) = |\psi(\cdot, x_n), L_p(R_{n-1})|.$$

Так же как было получено неравенство (82) из (79), мы из (78) получим

$$\varphi(x_n) \leqslant c \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \lambda_n(s)^{\frac{1}{p}} |g_\pm(\lambda_n(s) x_n)|\ |g_s(f), L_p(R_m)|,$$

а отсюда, как и выше, следует, что

$$|F, \mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,1}(R_n)| = |\psi, L_p(R_n)| \leqslant c \left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\alpha_s |g_s(f), L_p(R_m)|)^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

т. е. согласно (69) и (67) при $\theta = p$ и $q = 2$ нужное неравенство.

Осталось доказать необходимость условия $\beta_{p,\theta}(0) < \infty$ в теоремах 1 и 2.

5°. Необходимость условия $\beta_{p,\theta}(0) < \infty$ для существования следа

Доказательство проведем в два этапа.

1-й этап. *Пусть* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1/\theta + 1/\theta' = 1$, $\alpha_s > 0$, $\{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{-\theta'}\}^{1/\theta'} = \infty$. *Тогда существует последовательность целых функций* $\{f_\nu(u)\}_{\nu=1}^{\infty}$ *вида*

$$f_\nu(u) = \sum_{s=0}^{s_\nu} g_s(f_\nu, u), \qquad \operatorname{supp} \tilde{g}_s^m(f_\nu) \subset P_m(s), \tag{84}$$

для которой

$$B_\theta(\nu) = \left\{\sum_{s=0}^{s_\nu} (\alpha_s | g_s(f_\nu), L_{p,q}(R_m)|)^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \to 0 \quad (\nu \to \infty), \tag{85}$$

но которая не является слабо сходящейся (в смысле $(C_0^\infty)'(R_m) = D'(R_m)$*).*

Пусть сначала $\theta' < \infty$. Искомая последовательность

$$f_\nu(u) = \left(\sum_{s=0}^{\nu} \alpha_s^{-\theta'}\right)^{1/\theta' - \varepsilon} Q(u) \qquad (0 < \varepsilon < 1/\theta'),$$

где $Q(u)$ — целая функция, $\operatorname{supp} \tilde{Q}^m \subset P_m(0)$, $Q(u) > 0$ в некоторой окрестности точки $u = 0$. Выберем функцию $\varphi(u) \in C_0^\infty(R_m)$ такую, что

$$c_0 = \int\limits_{R_m} \varphi(u) Q(u)\, du > 0.$$

Тогда

$$\langle f_\nu, \varphi\rangle = c_0 \left(\sum_{s=0}^{\nu} \alpha_s^{-\theta'}\right)^{1/\theta' - \varepsilon} \to \infty \qquad (\nu \to \infty)$$

в силу расходимости ряда, что доказывает отсутствие слабой сходимости. В то же время можно записать $f_\nu(u)$ в виде (84), где $s_\nu = \nu$:

$$g_s(f_\nu, u) = \gamma_\nu \alpha_s^{-\theta'} Q(u), \qquad \gamma_\nu = \left(\sum_{s=0}^{\nu} \alpha_s^{-\theta'}\right)^{-(1/\theta + \varepsilon)}.$$

Тогда

$$\tilde{q}_s^m(f_\nu) \subset P_m(0) \subset P_m(s) \qquad (s = 0, 1, \ldots),$$
$$|g_s(f_\nu), L_{p,q}(R_m)| = \gamma_\nu \alpha_s^{-\theta'} |Q, L_{p,q}(R_m)| = c\gamma_\nu \alpha_s^{-\theta'},$$

откуда (см. (85))

$$B_\theta(\nu) = c\left(\sum_{s=0}^{\nu} \alpha_s^{-\theta'}\right)^{-\varepsilon} \to 0 \qquad (\nu \to \infty).$$

Пусть теперь $\theta = 1$, $\sup\limits_{s \geqslant 0} \alpha_s^{-1} = \infty$. Тогда рассмотрим последовательность номеров $s(\nu) \to \infty$ такую, что $\alpha_{s(\nu)}^{-1} \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ и положим

$$f_\nu(u) = \alpha_{s(\nu)}^{-1+\varepsilon} Q(u) \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

где $Q(u)$ та же, что выше.

Аналогично выбрав $\varphi(u) \in C_0^\infty(R_m)$, получим $\langle f_\nu, \varphi\rangle = c_0 \alpha_{s(\nu)}^{-1+\varepsilon} \to \infty$ $(\nu \to \infty)$. Считая, однако, что

$$g_s(f_\nu, u) = \begin{cases} f_\nu(u) & \text{при} \quad s = s(\nu), \\ 0 & \text{при} \quad s \neq s(\nu), \end{cases}$$

получим

$$B_1(\nu) = \alpha_{s(\nu)}^{\varepsilon} |Q, L_{p,q}(R_m)| \to 0 \qquad (\nu \to \infty).$$

2-й этап. *Построим теперь продолжение $F_\nu(u, y)$ функции $f_\nu(u)$ с R_m на R_n в соответствии с п. 1° (2-й этап).* Для продолженной функции в п. 2°—4° получены оценки $|F_\nu \Lambda| \leqslant cB_\theta(\nu)$, где в качестве Λ фигурируют классы $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n), L^{(\Delta)}_{p,q}(R_n), \mathscr{L}^{(\Delta)}_{p,q}(R_n)$ (два последних при $\theta = p$). Следовательно, $|F_\nu, \Lambda| \to 0$ $(\nu \to \infty)$, но следы $f_\nu(u) = F_\nu(u, 0)$ не являются сходящимися даже в $D'(R_m)$.

Этим доказаны замечание 3 к теореме 1 и к теореме 2.

§ 6. ДОПОЛНЕНИЯ

1°. О некоторых обобщениях результатов § 1 — 2

1.1. Условия на множества $\Delta_j(s)$ п. 1° § 1 можно ослабить. Именно, в условии 1) вместо двоичных отрезков можно использовать отрезки вида $\delta_j(k) = [\gamma_j(k), \gamma_j(k+1))$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где последовательность $\{\gamma_j(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ обладает следующими свойствами

$$\gamma_j(-1) < \gamma_j(0) = 0 < \gamma_j(1); \quad \gamma_j(\pm(k+1))/\gamma_j(\pm k) \geqslant \gamma_j > 1 \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{86}$$

(в (86) знаки должны быть одинаковы). Условия 2) оставим в силе.

Все дальнейшие построения и результаты остаются справедливыми, если только понимать в них всюду параллелепипеды $\Delta_{k\varepsilon}$ (см. (7)) в виде $\Delta_{k\varepsilon} = \delta_1(\varepsilon_1 k_1) \times \ldots \times \delta_n(\varepsilon_n k_n)$ (в частности, в определении $L_{p,q}$). Все доказательства проводятся точно так же, как в § 3—5. Если брать $\gamma_j(\pm k) = \pm 2^k$, получим рассмотренный случай.

Можно еще ослабить требования на разбиение (Δ), если отметить, что условия (86) используются лишь при $m + 1 \leqslant j \leqslant n$. По остальным направлениям j, $1 \leqslant j \leqslant m$ можно потребовать только, чтобы $\gamma_j(k) < \gamma_j(k+1)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, $\gamma_j(0) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_j(\pm k) = \pm\infty$, сохранив в силе условие 2). Результаты, относящиеся к классам $B^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ и $L^{(\Delta)}_{p,q}$, остаются справедливы. Надо помнить, однако, что соотношение $L_{p,2} = L_p$ может нарушиться, так как для него существенно выполнение условия (86) (см. [2, с. 129]).

1.2. В определениях функциональных пространств 1—4 § 1 мы исходили из геометрической прогрессии $\{a^s\}$ $(a > 1)$, стремясь добиться общности за счет свободы в построении разбиения (Δ). Как будет видно из п. 2°, эта схема позволяет включить в рассмотрение многие известные классы. Можно, однако, заменить геометрическую прогрессию на более общую последовательность $\{a_s\}_{s=0}^{\infty}(a_s > 0)$ и, определив числа α_s (см. (20)) теперь соотношением

$$\alpha_s = a_s \prod_{j=m+1}^{n} \lambda_j(s)^{-1/p}$$

потребовать выполнение условий

$$1)\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{-\theta'} < \infty,$$

$$2)\ \alpha_{s+1} \leqslant \gamma \alpha_s \quad (s = 0, 1, \ldots; \gamma > 1). \tag{87}$$

При этом пространство следов будет таким же, как в теоремах 1 и 2.

Второе требование (87) обеспечивает возможность выбрать последовательность $\{s(i)\}$, $s(i+1) \geqslant s(i) + 1$ с условием (23) при достаточно большом $a = a(\gamma) > 1$ (ср. с замечанием 1 к теоремам 1 и 2), а только это и требуется, чтобы провести доказательство, как в § 3—5.

Можно отказаться от геометрической прогрессии и в пространстве следов (такой подход развит в работе [12]), используя для описания следов разложения вида (50) и норму, определенную как inf по таким разложениям величины

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\alpha_s \,|\, g_s,\ L_{p,q}(R_m)\,|\,)^{\theta}\right\}^{1/\theta}.$$

При этом доказательство даже короче — отпадает 2-й этап п. 1° § 4 и 1-й этап п. 1° § 5. На числа α_s надо наложить первое требование (87), так как без него пространство следов даже не вложено в $D'(R_m)$ (см. 1-й этап п. 5° § 5), а также условия, обеспечивающие линейность продолжений (справедливость утверждения типа леммы 4). Мы можем указать следующие условия такого рода. Можно потребовать, чтобы $\alpha_{s+1}/\alpha_s \geqslant \gamma_0 > 1$ $(s = 0, 1, \ldots)$, тогда лемма 4 останется справедливой при $n = m$ и замене a^s на α_s. Можно, наоборот, потребовать выполнения второго условия (87), тогда все сведется к ситуации, описанной выше.

1.3. Лемма 2 открывает путь к обобщениям, связанным с введением в пространства B и L более общих норм (см. условия (33), (34)), чем использованные в наших построениях l_q-нормы. Не будем здесь останавливаться на подобных обобщениях.

Более интересным нам представляется введение классов $L^{(\Delta)}_{p,q,\theta}$ с нормой

$$|F,\ L^{(\Delta)}_{p,q,\theta}| = \left|\left\{\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta}\left(\sum_{(k,\varepsilon)\in\gamma_n(s)} |\delta_{k\varepsilon}(F)|^q\right)^{\frac{\theta}{q}}\right\}^{\frac{1}{\theta}},\ L_p(R_n)\right|.$$

Тогда $L^{(\Delta)}_{p,q} = L^{(\Delta)}_{p,q,q}$; $B^{(\Delta)}_{p,q,p} = L^{(\Delta)}_{p,q,p}$.

В силу замечаний 5 и 6 к теореме 2 справедливы вложения

$$L^{(\Delta)}_{p,q,\theta}(R_n) \rightleftarrows B^{(\Delta')}_{p,q,p}(R_m) \quad (1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q,\ \theta \leqslant \infty).$$

2°. Применение результатов § 1 — 2 к известным классам

Здесь описано, по необходимости кратко, использование результатов данной работы при рассмотрении известных классов (см. [3, 5, 8, 10, 11, 12]).

2.1. Классы типа С. М. Никольского и О. В. Бесова. Пусть $\Phi = \{\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t)\}$, $\Phi_j(t) > 0$ определены для $t \geqslant 1$, убывая, стремятся к нулю при $t \to \infty$, но $\Phi_j(t)\, t^{\beta_j}$ почти возрастает, т. е. $\Phi_j(t_1)\, t_1^{\beta_j} \leqslant d_j \Phi_j(t_2)\, t_2^{\beta_j}$ при любых $t_1 \leqslant t_2$. Здесь $\beta_j > 0$, $d_j \geqslant 1$ — некоторые постоянные.

По определению $f(x) \in B^{\Phi}_{p,\theta}(R_n)$ $(1 \leqslant p,\ \theta \leqslant \infty)$, если конечна норма

$$|f, B| = |f, L_p| + \sum_{j=1}^{n} \left\{\int_1^{\infty} \left[\frac{\omega_{k_j}(f, t^{-1})_p}{\Phi_j(t)}\right]^{\theta} \frac{d(-\Phi_j(t))}{\Phi_j(t)}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{88}$$

где $\omega_{k_j}(f, \delta)_p$ — модуль непрерывности порядка $k_j \geqslant 1$ по x_j функции $f(x)$ в норме $L_p(R_n)$ с шагом δ, $0 < \delta \leqslant 1$. При $\theta = \infty$ интеграл заменяется на sup выражения, стоящего в квадратных скобках. В случае, когда $\Phi_j(t) = t^{-r_j}$, $0 < r_j < k_j$, норма (88) совпадает с нормой анизотропного класса $B^r_{p,\theta}(R_n)$ $r = (r_1, \ldots, r_n)$ О. В. Бесова $(1 \leqslant \theta < \infty)$ и С. М. Никольского $(\theta = \infty$, см. [1]). Общий случай в изотропном варианте рассмотрен в работе [8], в анизотропном в [10]. Можно показать методами теории приближений, что при $\beta_j < k_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ эквивалентное описание класса (88) состоит в определении 2, где система (Δ) образована параллелепипедами

$$P_n(s) = \{\xi \in R_n: -\lambda_j(s) \leqslant \xi_j \leqslant \lambda_j(s) \quad (j = 1, \ldots, n)\}, \tag{89}$$

а последовательность $\{\lambda_j(s)\}$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_j(0) = 1; \quad \lambda_j(s+1)/\lambda_j(s) \geqslant \lambda_j > 1; \quad 0 < \delta \leqslant \Phi_j(\lambda_j(s+1))/$$
$$/\Phi_j(\lambda_j(s)) \leqslant \Delta < 1.$$

Например, для классов $B^r_{p,\theta}$ $\lambda_j(s) = a^{s/r_j}$, $a > 1$ (см. [1, 5.6.1]).

Случай, когда система (Δ) определена условиями (89), рассмотрен независимо Г. А. Калябиным [12]. Использование результатов § 2 дает в этом случае вложение

$$B^{\Phi}_{p,\theta}(R_n) \rightleftarrows B^{\psi}_{p,\theta}(R_m), \qquad \psi = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)), \tag{90}$$

$$\psi_j(t) = \left\{ \int\limits_0^{\Phi_j(t)} \prod_{\rho=m+1}^{n} \Phi_\rho^{-1}(v)^{\frac{\theta'}{p}} v^{\theta'-1} dv \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \qquad (\theta > 1, \ j = 1, \ldots, m), \tag{91}$$

$$\psi_j(t) = \sup_{0 < v \leqslant \Phi_j(t)} \left[v \prod_{\rho=m+1}^{n} \Phi_\rho^{-1}(v)^{\frac{1}{p}} \right] \qquad (\theta = 1, \ j = 1, \ldots, m),$$

где $t = \Phi_\rho^{-1}(v)$ — функция, обратная к $v = \Phi_\rho(t)$; $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

В изотропном варианте классы в (90) характеризуются скалярными функциями $\Phi(t)$ и $\psi(t)$, где

$$\psi(t) = \left\{ \int\limits_t^\infty [\Phi(u) u^{\frac{n-m}{p}}]^{\theta'} u^{-1} du \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \qquad (1 < \theta \leqslant \infty),$$

$$\psi(t) = \sup_{u \geqslant t} [\Phi(u) u^{(n-m)/p}] \qquad (\theta = 1).$$

В случае степенных функций Φ и ψ отсюда получатся результаты для классов $B^r_{p,\theta}$ (см. [1] гл. 6).

2.2. Классы типа Лиувилля и П. И. Лизоркина. Пусть $\Phi = (\Phi_1(t), \ldots$ $\ldots, \Phi_n(t))$, где $t \in R_1$, $\Phi_j(t) > 0$; $\Phi_j(t) \to 0$ $(|t| \to \infty)$ и существуют постоянные $0 < \alpha_j < \beta_j$, $c_j > 0$ такие, что $\alpha_j \leqslant \Phi_j(t_1)/\Phi_j(t_2) \leqslant \beta_j$ при t_1, $t_2 \in \delta(k)$, $\underset{\delta(k)}{V} \Phi_j(\pm t) \leqslant c_j \Phi_j(\pm 2^k)$, где $k = 0, 1, \ldots$, $\delta(k)$ — двоичные отрезки из условия 1) на $\Delta_j(s)$ п. 1° § 1, $\underset{\delta(k)}{V} \varphi(t)$ — вариация функции $\varphi(t)$ на отрезке $\delta(k)$.

Норму в классе типа Лиувилля $L^{\Phi}_p(R_n)$ определим величиной (см. [10])

$$|f, L^{\Phi}_p| = \sum_{j=1}^{n} \left| \overline{\Phi_j(\xi_j)^{-1} \tilde{f}^n(\xi)}^n, L_p(R_n) \right| \qquad (1 < p < \infty). \tag{92}$$

При $\Phi_j(t) = (1 + t^2)^{-r_j/2}$ $(r_j > 0)$ класс L^{Φ}_p совпадает с анизотропным классом Лиувилля L^r_p, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ([1, 9.2]). Класс L^{Φ}_p при более жестких условиях на $\Phi_j(t)$ (четность, монотонность) рассмотрен независимо Г. А. Калябиным [12].

Введем систему (Δ) следующим образом. Фиксируем $a > 1$ и отнесем к $\Delta_j(s)$ те отрезки $\delta(k)$, для которых $\Phi_j(2^k) \geqslant a^{-s}$ или, соответственно,

$\Phi_j(-2^k) \geqslant a^{-s}$. Если $a > 1$ достаточно велико, условия 1) —2) на $\Delta_j(s)$ § 1 выполняются. Систему (Δ) определим условием (1). Можно показать, используя теорию мультипликаторов, что норма (92) эквивалентна (16) при $q = 2$ и, следовательно, $L_p^{\Phi} = L_{p,2}^{(\Delta)}$. Из § 2 получим теорему о следах для L_p^{Φ}. Отметим отдельно случай, когда $\Phi_j(t)$ удовлетворяют дополнительно условию четности и убывания при $t \geqslant 0$. Тогда пространство следов $B_{p,2,p}^{(\Delta)}(R_m) = B_{p,p}^{\psi}(R_m)$ (см. п.2.1), где $\psi_j(t)$ — четные функции, определяемые при $t \geqslant 0$ условием (91) при $\theta = p$. Для степенных функций $\Phi_j(t)$ отсюда получаются результаты о следах классов $L_p^r(R_n)$ (см. [1, 9.5]).

Рассмотрим еще анизотропный вариант классов П. И. Лизоркина $\overset{+}{L}{}_{p,q}^{r}(R_n)$ и $\overset{+}{\mathscr{L}}{}_{p,q}^{r}(R_n)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_j > 0$ (см. [3]). Их определения могут быть даны в виде (16) и (18), если система (Δ) определена условиями (89), где $\lambda_j(s) = a^{s/r_j}$. Применение результатов § 2 приводит к теоремам

$$\overset{+}{L}{}_{p,q}^{r}(R_n) \rightleftarrows B_{p,q,p}^{\rho}(R_m), \quad \overset{+}{\mathscr{L}}{}_{p,q}^{r}(R_n) \rightleftarrows B_{p,p}^{\rho}(R_m), \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m).$$

Здесь $\rho_j = r_j\Big(1 - \frac{1}{p}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{r_k}\Big) > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$; $B_{p,p}^{\rho}$ — анизотропный класс Бесова, $B_{p,q,p}^{\rho} = B_{p,q,p}^{(\Delta')}$, где разбиение (Δ') образовано системой параллелепипедов

$$P_m'(i) = \{\xi' \in R_m, \; -a^{i/\rho_j} \leqslant \xi_j \leqslant a^{i/\rho_j} \; (j = 1, \ldots, m)\} \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

2.3. Классы Трибеля $F_{p,q}^{g(\xi)}(R_n)$. Эти классы рассмотрены Трибелем [5] и представляют собой обобщение классов П. И. Лизоркина. Норма в них при $1 < p, q < \infty$ может быть определена соотношением (см. (11))

$$|f, F_{p,q}^{g(\xi)}| = \Big|\Big\{\sum_{(k,\varepsilon)} |g_{k\varepsilon}\delta_{k\varepsilon}(f, x)|^q\Big\}^{\frac{1}{q}}, L_p(R_n)\Big|. \tag{93}$$

Здесь числа $g_{k\varepsilon} = g(\xi^{k\varepsilon})$, где $g(\xi) > 0$,— весовая функция, $\xi \in R_n$; $\xi^{k\varepsilon}$ — центр параллелепипеда $\Delta_{k\varepsilon}$; $\delta_{k\varepsilon}$ — см. (11). При этом из свойств $g(\xi)$ [5] следует, что существуют постоянные $0 < c_1 < c_2 < \infty$ такие, что $c_1 \leqslant g_{k\varepsilon}/g_{\rho\eta} \leqslant c_2$, если параллелепипеды $\Delta_{k\varepsilon}$ и $\Delta_{\rho\eta}$ граничат друг с другом. В интересующем нас случае $g(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$.

Фиксируем $a > 1$ и обозначим $p_n(s) = \{(k, \varepsilon): g_{k\varepsilon} \leqslant ca^s\}$, $\gamma_n(0) = p_n(0)$, $\gamma_n(s) = p_n(s) \setminus p_n(s-1)$ $(s = 1, 2, \ldots)$. При достаточно большом $a = a(c_1, c_2) > 1$, $c > 1$ все $\gamma_n(s)$ непусты $(s = 0, 1, \ldots)$. Тогда, объединяя пары $(k, \varepsilon) \in \gamma_n(s)$, мы придем к норме вида (16), эквивалентной (93). Если для множеств $P_n(s) = \bigcup_{(k,\varepsilon)\in p_n(s)} \Delta_{k\varepsilon}$ окажутся справедливы требования п. 1° § 1, то мы можем включить класс $F_{p,q}^{g(\xi)}(R_n)$ в схему § 1—2.

В частности, если $g(\xi) = \sum_{j=1}^{n} g_j(\xi_j)$, где $g_j(t) \in M$,— функции рассмотренного в работе [5] типа, то всегда можно считать, что $P_n(s)$ удовлетворяют требованиям п. 1° § 1 (см. рассуждение п. 2.2. § 6).

В заключение автор выражает глубокую признательность П. И. Лизоркину за внимание к этой работе.

Статья была подготовлена в печать, когда Г. Трибель любезно сообщил автору о том, что Б. Йеверт [15] независимо получил описание следов для изотропного класса типа П. И. Лизоркина $\mathscr{L}^{+r}_{p,q}$ (для сравнения см. п. 2.2 § 6). Нам стала известна также работа Г. Трибеля [14], в которой, в частности, содержатся результаты, близкие лемме 1 § 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
3. *Лизоркин П. И.* Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p,\theta}$.— Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 158—181.
4. *Лизоркин П. И.* О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 231—248.
5. *Triebel H.* General function spaces, III (The spaces $B^{g(x)}_{p,q}$ and $F^{g(x)}_{p,q}$; the case $1<p<\infty$: Basis properties). Preprint. Jena, 1976.
6. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. VEB. Deutscher Verl., Wissenschaften, Berlin, 1976.
7. *Калябин Г. А.* Описание следов для анизотропных классов типа Трибеля—Лизоркина.— Наст. сб., с. 160—173.
8. *Гольдман М. Л.* Описание пространства следов для функций обобщенного гёльдерова класса.— ДАН СССР, 1976, 231, № 3, с. 525—528.
9. *Гольдман М. Л.* О следах функций из обобщенного класса Лиувилля.— Сиб. матем. журн. 1976, 18, № 6, с. 1236—1255.
10. *Гольдман М. Л.* Описание следов анизотропного обобщенного класса Лиувилля.— ДАН СССР, 1977, 233, № 3, с. 17—20.
11. *Гольдман М. Л.* О вложении обобщенных гёльдеровых классов.— Мат. заметки, 1972, 12, № 3, с. 325—336.
12. *Калябин Г. А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля.— ДАН СССР, 1977, 232, № 6, с. 1245—1248.
13. *Буренков В. И., Гольдман М. Л.* О продолжении функций из L_p.— Наст. сб., с. 31—51.
14. *Triebel H.* General function spaces, II.— J. Approxim. Theory, 1977, 19, N 2.
15. *Jawert B.* Some observation on Besov and Lizorkin — Triebel spaces. — Math. Scand., 1977, N 40, p. 94—104.