С. В. Кисляков, Теорема о короне и интерполяция, *Алгебра и анализ*, 2015, том 27, выпуск 5, 69–80

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №5

ТЕОРЕМА О КОРОНЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

© С. В. КИСЛЯКОВ

Пусть E — банахово идеальное пространство последовательностей, E' — его порядковое сопряженное. По определению, теорема о короне выполнена для E, если для всяких ограниченных аналитических функций f_j в единичном круге $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условию $0 < \delta \leqslant \|\{f_j(z)\}\|_E \leqslant 1$, найдется последовательность $\{g_j\}$ ограниченных аналитических функций такая, что $\sum_j f_j(z)g_j(z) \equiv 1$ и $\|\{g_j(z)\}\|_{E'} \leqslant C(\delta)$, $z \in \mathbb{D}$. Показано, что теорема о короне выполнена для пространств l^p, $1 \leqslant p < \infty$, и для некоторых более общих банаховых решеток.

В этой статье мы будем интересоваться количественными версиями теоремы о короне. Пусть E — банахово пространство последовательностей $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющее условию

$$|y_n| \leqslant x_n, \quad \{x_n\} \in E \Rightarrow \{y_n\} \in E \quad \text{и} \quad \|\{y_n\}\| \leqslant \|\{x_n\}\|.$$

Обозначим через E' порядково сопряженное пространство:

$$E' = \left\{ \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum |y_n||x_n| < \infty \text{ для всех } \{x_n\} \in E \right\}$$

с естественной нормой. Далее, пусть $\{f_j\}$ — последовательность ограниченных аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ комплексной плоскости, удовлетворяющая условию

$$0 < \delta \leqslant \|\{f_j(z)\}_{j\in\mathbb{N}}\|_E \leqslant 1 \tag{1}$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Спрашивается, найдутся ли ограниченные в круге $\mathbb{D}$ аналитические функции $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)g_j(z) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \|\{g_j(z)\}_{j\in\mathbb{N}}\|_{E'} \leqslant C, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2}$$

где константа $C = C_E(\delta)$ зависит только от E и δ?

Ключевые слова: теорема о короне, решетка измеримых функций, BMO-регулярность.

Работа поддержана РФФИ, грант 14-01-00198.

Если ответ на этот вопрос положительный, будем говорить, что для пространства E выполнена теорема о короне. В случае конечномерного пространства E ее впервые доказал Л. Карлесон в конце 50-х годов 20 века. Иное, более простое доказательство, использующее евклидову метрику на (опять конечномерном) пространстве E, предложил Т. Вольф в 1979 г. Вслед за тем М. Розенблюм, А. Толоконников и А. Учияма независимо заметили, что рассуждения Вольфа можно приспособить к бесконечномерному случаю, когда $E = l^2$. См. [1, приложение 3] по поводу библиографических ссылок и иных подробностей, а также по поводу доказательства оценки $C_{l^2}(\delta) = O(\delta^{-2} \log \frac{1}{\delta})$, $\delta \to 0$, методом Вольфа.

Таким образом, теорема о короне выполнена для пространства l^2. Учияма доказал в [2], что она выполнена и для пространства l^∞. Его построения были основаны на идеях из исходного доказательства Карлесона и довольно сложны.

Естественно спросить, для каких еще p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (кроме $p = 2, \infty$), теорема о короне выполнена для пространства l^p? Этот вопрос упоминался, например, в [1]. В работе [3] было показано, что ответ положительный при $p \in (2, +\infty)$, причем это можно вывести из случая $p = 2$ на уровне неравенства Гёльдера.

В настоящей статье мы докажем следующий результат.

Теорема 1. *Теорема о короне выполнена для пространства l^p при $1 \leqslant p < \infty$.*

Самый трудный случай — это $p = 1$. Он получается из случая Вольфа ($p = 2$) с помощью интерполяционных соображений. Случай произвольного $p > 1$ после этого выводится легко (примерно так же, как случай $p \in (2, \infty)$ был выведен из случая $p = 2$ в работе [3]).

Отметим любопытное следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность ограниченных аналитических функций в круге $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию*

$$0 < \delta \leqslant \Big(\sum |f_j(z)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тогда существуют ограниченные аналитические функции $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ в круге такие, что $\sum_j f_j \varphi_j \equiv 1$ и $|\varphi_j| \leqslant C(\delta)|f_j|$ в $\mathbb{D}$.

Доказательство. Применим теорему 1 при $p = 1$ к последовательности $\{f_j^2\}$. Получим последовательность g_j аналитических функций в круге, для которой $\sup\{|g_j(z)| : z \in \mathbb{D}, j \in \mathbb{N}\} \leqslant C(\delta)$ и $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j g_j \equiv 1$. Остается положить $\varphi_j = f_j g_j$, $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Доказательство теоремы 1 можно распространить на более общие идеальные пространства последовательностей. Мы покажем, например, что теорема о короне справедлива для любой p-вогнутой решетки E, удовлетворяющей условию Фату и еще некоторому интерполяционному предположению (определения используемых понятий будут даны ниже). Отметим, что совсем недавно Д. В. Руцкий доказал еще более сильное утверждение, сняв почти все ограничения на решетку E, однако его рассуждение основано на теореме о короне для l^∞ (упомянутый ранее *трудный* результат Учиямы) и довольно сложных теоремах о неподвижной точке. Подчеркнем, что в настоящей работе все результаты выводятся из относительно простого случая $p = 2$ в теореме 1 с помощью интерполяции. Иногда это приводит к лучшим оценкам для константы $C_E(\delta)$, чем можно получить на основе результата Учиямы. Было бы интересно вывести и теорему Учиямы из случая $p = 2$ примерно на том же уровне сложности, но этого пока сделать не удалось.

Мы начнем с доказательства теоремы 1, предварив его минимально необходимой информацией об интерполяции пространств типа Харди. Обобщения на абстрактные решетки последовательностей получаются теми же методами, но требуют больше предварительных сведений о решетках. Эти обобщения будут изложены в заключительной части работы.

1. Интерполяция вещественным методом при широком взгляде на вещи может рассматриваться просто как наука об аккуратном разбиении функции на части, оцениваемые в разных нормах. Как только что было сказано, нам нужны некоторые сведения об интерполяции пространств типа Харди в решетках измеримых функций. Под решеткой измеримых функций понимается любое линейное пространство X измеримых функций на пространстве (S, μ) с σ-конечной (для простоты) мерой μ, снабженное полной квазинормой $\|\cdot\|$ и обладающее следующим свойством: если $g \in X$, функция f измерима и $|f| \leqslant |g|$ п.в., то $f \in X$ и $\|f\| \leqslant \|g\|$. Нам уже встречались решетки измеримых функций на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ со считающей мерой ν. В дальнейшем основным пространством с мерой у нас будет $(\mathbb{T}, m) \times (\mathbb{N}, \nu) = (\mathbb{T} \times \mathbb{N}, m \otimes \nu)$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости, а m — нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Последовательность $\{f_j\}$ функций на $\mathbb{T}$ или в круге $\mathbb{D}$ мы будем рассматривать как функцию на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ или на $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$, при этом мы пишем $f_j(z) = f(z, j)$. Формулу (1) тогда естественно записать в виде $\delta \leqslant \|f(z, \cdot)\|_E \leqslant 1$, а формулы (2) в виде $\langle f(z, \cdot), g(z, \cdot)\rangle = 1$ и $\|g(z, \cdot)\|_{E'} \leqslant C$.

Квазибанахова решетка X измеримых функций на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ называется BMO-регулярной, если для каждой ненулевой функции $f \in X$ найдется такая функция $g \in X$, что $|f| \leqslant g$, $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ и $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|g(\cdot,j)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$, где C не зависит от f и g.

Для любой решетки измеримых функций X на $\mathbb{T}\times\mathbb{N}$, введем ее *аналитическую часть* (или *пространство типа Харди*) X_A, $X_A = \{f \in X : f(\cdot,j) \in N_+, j = 1,2,\dots\}$, где N_+ — (граничный) класс В. И. Смирнова. Нам понадобятся следующие два предложения, которые в значительно более общем виде можно найти в обзоре [4].

Предложение 1. *Если X и Y — BMO-регулярные решетки измеримых функций на $\mathbb{T}\times\mathbb{N}$, то пара (X,Y) обладает следующим свойством. Пусть $f \in (X+Y)_A$ и $f = g+h$, где $g \in X$, $h \in Y$. Тогда существует другое разложение $f = \tilde g + \tilde h$, где $\tilde g \in X_A$, $\tilde h \in Y_A$ и $\|\tilde g\|_X \leqslant d\|g\|_X$, $\|\tilde h\|_Y \leqslant d\|h\|_Y$, а постоянная d зависит лишь от константы в определении BMO-регулярности.*

Предложение 2. *Решетка $L^\infty(l^p)$ BMO-регулярна при $0 < p \leqslant \infty$.*

Свойство, сформулированное в предложении 1, называется (сильной) аналитической K-устойчивостью. Собственно, предложение 1 есть главный результат о вещественной интерполяции, который мы будем использовать. Недавно Д. В. Руцкий доказал, что предложение 1 „почти обратимо“, см. [5]. См. еще статью [6] (в этом выпуске журнала) по поводу уточнения предложения 2.

Пусть (S,μ) — произвольное пространство с мерой, а w — вес, т.е. измеримая функция на S, положительная п.в. Если X — решетка измеримых функций на S, можно ввести весовую решетку $X(w)$,

$$X(w) = \{f : fw^{-1} \in X\}, \quad \|f\|_{X(w)} = \|fw^{-1}\|_X.$$

Вес w на $\mathbb{T}\times\mathbb{N}$ *имеет логарифм, равномерно принадлежащий пространству* BMO, если $\sup_j \|\log w(\cdot,j)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений.

Предложение 3. *Если X — BMO-регулярная решетка измеримых функций на $\mathbb{T}\times\mathbb{N}$, а w — вес такой, что его логарифм равномерно принадлежит пространству BMO, то $X(w)$ — BMO-регулярная решетка.*

Следствие 1. *Решетки $L^\infty(l^\infty,w) = \{f : |f(\zeta,j)| \leqslant Cw(\zeta,j), \zeta \in \mathbb{T}, j = 1,2,\dots\}$ и $L^\infty(l^1,w^{-1}) = \{f : \sum_{j\in\mathbb{N}} |f(\zeta,j)|w(\zeta,j) \leqslant C, \zeta \in \mathbb{T}\}$ BMO-регулярны, если $\log w$ равномерно принадлежит пространству BMO. Следовательно, пара $(L^\infty(l^\infty,w), L^\infty(l^1,w^{-1}))$ сильно аналитически K-устойчива.*

2. Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим главный случай $p = 1$, из которого случай $p \in (1, \infty)$ легко последует. В дальнейшем мы обычно пишем $f(\zeta, \cdot)$, имея в виду граничные значения, и $f(z, \cdot)$, имея в виду значения функции $f(\cdot, \cdot)$ в круге $\mathbb{D}$ при фиксированной второй переменной. Предположим, что функции $f(\cdot, j)$ аналитичны в $\mathbb{D}$ и функция f удовлетворяет условию

$$0 < \delta \leqslant \|f(z, \cdot)\|_{l_1} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Пусть $\alpha(\zeta, j) = |f(\zeta, j)|^{1/2}$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда $\|\alpha\|_{L^\infty(l^2)} \leqslant 1$ и по предложению 2 найдется такая функция $v \in L^\infty(l^2)$, что $v \geqslant \alpha$, $\|v\|_{L^\infty(l^2)} \leqslant C$ и $\sup_j \|\log v(\cdot, j)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$, где C — универсальная постоянная. Пусть ψ — внешняя функция, построенная по v (по первой переменной):

$$\psi(\cdot, j) = \exp[\log v(\cdot, j) + i\mathcal{H}(\log v(\cdot, j))], \quad j \in \mathbb{N},$$

где $\mathcal{H}$ — оператор гармонического сопряжения. Функция $\varphi = f/\psi$ аналитична в круге и $|\varphi(\zeta, \cdot)| \leqslant \alpha(\zeta, \cdot) \leqslant v(\zeta, \cdot)$ п.в. на окружности $\mathbb{T}$. В частности, $\varphi \in L^\infty(l^2)_A$. Далее, при $z \in \mathbb{D}$ из неравенства Коши получаем

$$\begin{aligned} \delta &\leqslant \|f(z, \cdot)\|_{l^1} = \|\varphi(z, \cdot)\psi(z, \cdot)\|_{l^1} \\ &\leqslant \|\psi(z, \cdot)\|_{l^2}\|\psi(z, \cdot)\|_{l^2} \leqslant C\|\varphi(z, \cdot)\|_{l^2} \leqslant C. \end{aligned}$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $p = 2$ с заменой величины δ на $C^{-1}\delta$. Как уже говорилось, при $p = 2$ теорема 1 хорошо известна, так что найдется функция $h \in L^\infty(l^2)_A$ такая, что

$$\langle \varphi(z, \cdot), h(z, \cdot) \rangle \equiv 1 \quad \text{в} \quad \mathbb{D} \quad \text{и} \quad \|h\|_{L^\infty(l^2)} \leqslant C_{l^2}(\delta C^{-1}).$$

Разобьем функцию h на два измеримых слагаемых следующим образом: $h = h\chi_e + h\chi_{e^c}$, где

$$e = \{(\zeta, j) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} : |h(\zeta, j)| \leqslant A|\psi(\zeta, j)| = Av(\zeta, j)\},$$

а через e^c обозначено дополнение множества e до $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$. Постоянная A будет выбрана позже. Ясно, что

$$\begin{aligned} \|h\chi_e\|_{L^\infty(l^\infty, v)} &\leqslant A, \\ \|h\chi_{e^c}\|_{L^\infty(l^1, v^{-1})} &= \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |h(\zeta, j)| v(\zeta, j) \chi_{e^c}(\zeta, j) \\ &\leqslant \frac{1}{A} \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |h(\zeta, j)|^2 \leqslant A^{-1}[C_{l^2}(\delta C^{-1})]^2. \end{aligned}$$

В силу следствия 1 существует разбиение $h = h_1 + h_2$ функции h на слагаемые, аналитические по первой переменной ($h_1 \in L^\infty(l^\infty, v)_A$,

$h_2 \in L^\infty(l^1, v^{-1})_A)$ с теми же оценками:

$$\|h_1\|_{L^\infty(l^\infty, v)} \leqslant DA, \ \|h_2\|_{L^\infty(l^1, v^{-1})} \leqslant DA^{-1}C_{l^2}(\delta C^{-1})^2, \tag{3}$$

где D — универсальная постоянная. При $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$1 = \big\langle \varphi(z,\cdot), h(z,\cdot)\big\rangle = \left\langle f(z,\cdot), \frac{h_1(z,\cdot)}{\psi(z,\cdot)}\right\rangle + \big\langle \varphi(z,\cdot), h_2(z,\cdot)\big\rangle. \tag{4}$$

В первом слагаемом в последнем выражении аналитическая по первой переменной функция h_1/ψ ограничена по модулю величиной DA. Мы покажем, что второе слагаемое по модулю меньше $1/2$ при всех $z \in \mathbb{D}$, если A достаточно велико. Если это сделано, то пусть $U(z) = 1 - \langle \varphi(z,\cdot), h_2(z,\cdot)\rangle$, тогда функция $1/U$ аналитична в круге и не превосходит двух по модулю. Поэтому

$$1 = \left\langle f(z,\cdot), \frac{h_1(z,\cdot)}{U(z)\psi(z,\cdot)}\right\rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом $\left\|\frac{h_1(z,\cdot)}{U(z)\psi(z,\cdot)}\right\|_{l^\infty} \leqslant 2DA$, как и требуется в теореме 1 при $p = 1$.

Итак, осталось оценить сверху второе слагаемое в последнем выражении в (4), причем достаточно проделать это на единичной окружности. Но $|\varphi| \leqslant v$, поэтому

$$|\langle \varphi(z,\cdot), h_2(z,\cdot)\rangle| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |h_2(\cdot, j)| v(z,j) \leqslant DA^{-1}C_{l^2}(\delta C^{-1})^2$$

в силу (3). Таким образом, достаточно взять $A = 2DC_{l^2}(\delta C^{-1})^2$.

Замечание. Попутно получилась оценка $C_{l^1}(\delta) \leqslant C' C_{l^2}(\delta/C)^2$.

Теперь выведем случай произвольного конечного p в теореме 1 из случая $p = 1$. Рассуждения будут похожи на рассуждения из [3, §3].

Обозначим через q показатель, сопряженный с $p \in (1, \infty)$. Пусть f — функция из $L^\infty(l^p)_A$, удовлетворяющая условию

$$0 < \delta \leqslant \|f(z,\cdot)\|_{l^p} \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Рассмотрим каноническую факторизацию $f = \theta F$ (то есть $f(\cdot, j) = \theta(\cdot, j)F(\cdot, j)$), где $F(\cdot, j)$ — внешние, а $\theta(\cdot, j)$ — внутренние функции. Ясно, что на окружности $\|F(\zeta,\cdot)\|_{l^p} = \|f(\xi,\cdot)\|_{l^p} \leqslant 1$, поэтому $\|F(z,\cdot)\|_{l^p} \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{D}$.

Далее, положим $\varphi = \theta F^p$. Функция φ аналитична по первой переменной, причем из неравенств

$$\delta^p \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z,j)|^p |\theta(z,j)|^p \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z,j)|^p |\theta(z,j)| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z,j)|^p \leqslant 1$$

вытекает, что
$$\delta^p \leqslant \|\varphi(z,\cdot)\|_{l^1} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{D}.$$
По уже доказанному, существует функция $h \in L^\infty(l^\infty)_A$ такая, что
$$\|h\|_{L^\infty(l^\infty)} \leqslant C_{l^1}(\delta^p) \quad \text{и} \quad \langle \varphi(z,\cdot), h(z,\cdot)\rangle = 1,\ z \in \mathbb{D}.$$
Второе соотношение можно переписать в виде $\langle f(z,\cdot), H(z,\cdot)\rangle$, где $H = F^{p-1}h$. Легко видеть, что функция H лежит в $L^\infty(l^q)_A$: аналитичность очевидна, а, с другой стороны,
$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} |H(\zeta,j)|^q &\leqslant C_{l^1}(\delta^p)^q \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(\zeta,j)|^{(p-1)\cdot q}\\ &= C_{l^1}(\delta^p)^q \|F(\zeta,\cdot)\|_{l^p} \leqslant C_{l^1}(\delta^p)^q\end{aligned}$$
при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Таким образом, нужное нам утверждение доказано с оценкой $C_{l^p}(\delta) \leqslant C_{l^1}(\delta^p)$. □

3. Некоторые обобщения. Нам потребуются стандартные операции над решетками измеримых функций. Пусть X и Y — две такие решетки на произвольном пространстве с мерой (S,μ) и пусть $\alpha > 0$. Положим
$$XY = \{h = fg : f \in X, g \in Y\}, \quad \|h\|_{XY} = \inf \|f\|_X \|g\|_Y,$$
где нижняя грань берется по всем представлениям $h = fg$. Кроме того, пусть
$$X^\alpha = \{g : |g|^{1/\alpha} \in X\}, \quad \|g\|_{X^\alpha} = \||g|^{1/\alpha}\|_X^\alpha.$$
Вообще говоря, решетки XY и Y^α лишь квазинормированные, однако иногда они могут оказаться банаховыми. Например, банаховой будет решетка $X^{1-\gamma}Y^\gamma$ при $0 < \gamma < 1$, если решетки X и Y — банаховы. В частности, банаховой будет и решетка $Y^\gamma = L^\infty(\mu)^{1-\gamma}Y^\gamma$ в случае банаховой решетки Y. Если решетка $Y^{1/\gamma}$ банахова (т.е. допускает норму, эквивалентную ее квазинорме), то сама решетка Y называется p-выпуклой, $p = 1/\gamma$. Подробности см. в [7].

Для банаховой решетки X измеримых функций порядково сопряженная с ней решетка X' состоит из тех функций g, что
$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{ \int |fg| : f \in X, \|f\| \leqslant 1 \right\} < +\infty.$$
Мы будем молчаливо предполагать, что все встречающиеся в статье решетки измеримых функций удовлетворяют условию $X'' = X$. Это условие эквивалентно так называемому *свойству Фату* (см. [8]), точное определение которого нам не понадобится. Если E — решетка последовательностей (т.е. измеримых функций на пространстве $(\mathbb{N},\nu)$; напомним, что

условие $E = E''$ предполагается без особых упоминаний), определим решетку $L^\infty(E)$ на пространстве $(\mathbb{T}\times\mathbb{N}, m\times\nu)$ следующим образом:

$$f \in L^\infty(E) \Longleftrightarrow \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\mathbb{T}} \sup_{N\in\mathbb{N}} \|f(\zeta,\cdot)\chi_{\mathbb{T}\times\{1,\ldots,N\}}(\zeta,\cdot)\|_E.$$

Полезно заметить, что $L^\infty(E)$ может не совпадать с пространством сильно измеримых существенно ограниченных E-значных функций (достаточно рассмотреть случай $E = l^\infty$).

Обещанное обобщение теоремы 1 удобно сформулировать в виде двух отдельных утверждений.

Теорема 2. *Пусть E и F — банаховы решетки последовательностей такие, что произведение EF тоже банахово и $E = XF^a$ для еще одной банаховой решетки X и некоторого $a > 0$. Если теорема о короне выполнена для E, а решетка $L^\infty(F)$* BMO*-регулярна, то теорема о короне выполнена для EF.*

Теорема 3. *Если теорема о короне выполнена для банаховой решетки последовательностей E, то она выполнена и для E^α при $0 < \alpha < 1$.*

Взяв в теореме 2 $E = F = l^2$ (и $X = l^\infty$, $a = 1$), мы приходим к случаю $p = 1$ в теореме 1. Теорема 3 формализует переход от случая $p = 1$ к случаю $p > 1$ в теореме 1.

3.1. Подготовка и одно следствие. По поводу доказательства следующих двух предложений см., например, [9].

Предложение 4 (факторизация Лозановского). *Для всякой банаховой решетки X измеримых функций на пространстве (S,μ) справедливо равенство $XX' = L^1(\mu)$.*

Предложение 5. *Пусть X и Y — банаховы решетки измеримых функций на пространстве (S,μ). Если $0 < \alpha < 1$, то $(X^{1-\alpha}Y^\alpha)' = (X')^{1-\alpha}(Y')^\alpha$.*

Напомним, что условия $X'' = X$ и $Y'' = Y$ молчаливо предполагаются в этих двух предложениях. Из предложения 5, в частности, получаем

$$(Y^\alpha)' = \big((L^\infty)^{1-\alpha}Y^\alpha\big)' = (L^1)^{1-\alpha}(Y')^\alpha.$$

Лемма 1. *Предположим, что все три решетки X, Y и XY банаховы и пусть $V = (XY)'$. Тогда $VX = Y'$ и $VY = X'$.*

Доказательство. Проверим лишь второе равенство (первое проверяется аналогично). В силу факторизации Лозановского

$$(XY)V = L^1(\mu) = XX'. \tag{5}$$

Положим $E = (YV)^{1/2} = Y^{1/2}V^{1/2}$, $F = (X')^{1/2}$, тогда из (5) следует, что $ZE = ZF$, где $Z = X^{1/2}$. Дело свелось к слеющему утверждению. *Если Z, E и F — произвольные банаховы решетки измеримых функций и $ZE = ZF$, то $E = F$.*

Докажем его. Умножая на Z', получаем $L^1E = L^1F$, откуда

$$(L^1)^{1/2}E^{1/2} = (L^1)^{1/2}F^{1/2}.$$

Переходя к порядково сопряженным решеткам, получим $(E')^{1/2} = (F')^{1/2}$, т.е. $E' = F'$, а тогда $E = (E')' = (F')' = F$. □

Условие BMO-регулярности решетки $L^\infty(F)$ в теореме 2 эквивалентно тому, что оператор гармонического сопряжения (по первой переменной) действует в пространстве $L^p((F')^\beta)$ при некоторых $p \in (1, \infty)$ и $\beta \in (0, 1)$. Обычно именно в такой форме его и проверяют. См. [4, 6] и имеющиеся там ссылки.

Отметим одно следствие теоремы 2.

Следствие 2. *Если U — банахова решетка последовательностей такая, что решетка U' p-выпукла при некотором $p > 1$, а решетка $L^\infty(U)$* BMO-*регулярна, то теорема о короне выполняется для U.*

Решетки U с p-выпуклой сопряженной решеткой называются q-вогнутыми ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Это свойство легко описать в терминах самой решетки U, см. [7].

Доказательство следствия. По условию $U' = Z^{1/p}$ для некоторой банаховой решетки Z, а тогда $U = (l^1)^{1/q}(Z')^{1/q} = l^qF$, где $F = (Z')^{1/q}$. Поскольку пространства $L^\infty(U)$ и $L^\infty(l^q)$ BMO-регулярны и $L^\infty(U) = L^\infty(l^q)L^\infty(F)$, заключаем, что и пространство $L^\infty(F)$ BMO-регулярно (см. [10]; это утверждение о „делимости“ довольно трудно). Для того, чтобы применить теорему 2 к $E = l^q$ и определенному выше пространству F, достаточно теперь заметить, что $E = (l^1)^{1/q} = (F')^{1/q}F^{1/q}$ (так что условия теоремы 2 выполнены с $X = (F')^{1/q}$, $a = 1/q$). □

3.2. Доказательство теорем 2 и 3. Сначала установим теорему 2. Пусть функция f из $L^\infty(EF)$ удовлетворяет условию

$$0 < \delta \leqslant \|f(z, \cdot)\|_{EF} \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что $EF = XF^{a+1}$. Для граничных значений функции f имеется поэтому представление $|f(\zeta, \cdot)| = \sigma(\zeta, \cdot)\rho(\zeta, \cdot)^{a+1}$, где σ и ρ — неотрицательные измеримые функции на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, $\|\sigma(\zeta, \cdot)\|_X \leqslant 1$, $\|\rho(\zeta, \cdot)\|_F \leqslant 2$ при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Из BMO-регулярности пространства $L^\infty(F)$ следует существование такой функции $v \in L^\infty(F)$, что $v \geqslant \rho$, $\|v\|_{L^\infty(F)} \leqslant C$ и

$\sup_j \|\log v(\cdot,j)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$. Пусть ψ — внешняя функция, построенная по v (по первой переменной). Функция $\varphi = f/\psi^{a+1}$ аналитична в круге и $|\varphi(\zeta,\cdot)| \leqslant \sigma(\zeta,\cdot)$, так что $\|\varphi(\zeta,\cdot)\psi^a(\zeta,\cdot)\|_E \leqslant \|\sigma(\zeta,\cdot)\|_X \|\psi^a(\zeta,\cdot)\|_{E^a} \leqslant C^a$.

Далее, при $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\delta \leqslant \|f(z,\cdot)\|_{EF} \leqslant \|\varphi(z,\cdot)\psi^a(z,\cdot)\|_E \|\psi(z,\cdot)\|_F \leqslant C\|\varphi(z,\cdot)\psi^a(z,\cdot)\|_E.$$

Поскольку теорема о короне верна для решетки E, найдется функция $h \in L^\infty(E')_A$ такая, что

$$\langle \varphi(z,\cdot)\psi^a(z,\cdot), h(z,\cdot)\rangle \equiv 1 \quad \text{и} \quad \|h\|_{L^\infty(E')} \leqslant d_1 C_E(d_2\delta).$$

Применив лемму 1 и использованный выше прием с внешними функциями, мы можем найти факторизацию $h = \alpha\cdot\beta$, где $\alpha \in L^\infty((EF)')_A$ $\beta \in L^\infty(F)_A$ и $\|\alpha\|_{L^\infty((EF)')} \leqslant d_1\ C_E(d_2\delta)$, $\|\beta\|_{L^\infty(F)} \leqslant 2$. Разобьем функцию β на два измеримых слагаемых: $\beta = \beta\chi_e + \beta\chi_{e^c}$, где

$$e = \{(\zeta,j) \in \mathbb{T}\times\mathbb{N} : |\beta(\zeta,j)| \leqslant A|\psi(\zeta,j)| = Av(\zeta,j)\}.$$

Постоянная A будет выбрана позже. Ясно, что

$$\|\beta\chi_e\|_{L^\infty(l^\infty,v)} \leqslant A,$$
$$\|\beta\chi_{e^c}\|_{L^\infty(F^{a+1},v^{-a})} = \|\beta v^a\chi_{e^c}\|_{L^\infty(F^{a+1})} \leqslant \frac{1}{A^a}\||\beta|^{a+1}\|_{L^\infty(F^{a+1})} \leqslant \frac{d_3}{A^a}.$$

Из определений видно, что оба пространства $L^\infty(l^\infty,v)$ и $L^\infty(F^{a+1},v^{-a})$ BMO-регулярны, поэтому существует разбиение $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где $\beta_1 \in L^\infty(l^\infty,v)_A$, $\beta_2 \in L^\infty(F^{a+1},v^{-a})_A$ и выполнены аналогичные оценки:

$$\|\beta_1\|_{L^\infty(l^\infty,v)} \leqslant DA, \quad \|\beta_2\|_{L^\infty(F^{a+1},v^{-a})} \leqslant \frac{D}{A^a}.$$

Далее, при $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \big\langle \varphi(z,\cdot)\psi^a(z,\cdot), \alpha(z,\cdot)\beta(z,\cdot)\big\rangle \\ &= \left\langle f(z,\cdot), \frac{\alpha(z,\cdot)\beta_1(z,\cdot)}{\psi(z,\cdot)}\right\rangle + \big\langle \varphi(z,\cdot)\psi^a(z,\cdot), \alpha(z,\cdot)\beta_2(z,\cdot)\big\rangle. \end{aligned}$$

В первом слагаемом функция $\alpha\beta\psi^{-1}$ аналитична по первой переменной и не превосходит по модулю $DA|\alpha|$, откуда

$$\|(\alpha\beta\psi^{-1})(z,\cdot)\|_{(EF)'} \leqslant d_4 C_E(d_2\delta).$$

Оценим сверху второе слагаемое (достаточно проделать это на границе):

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\mathbb{T}}|\langle\varphi(\zeta,\cdot)\psi^a(\zeta,\cdot),\alpha(\zeta,\cdot)\beta_2(\zeta,\cdot)\rangle| \leqslant \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')}\|\varphi\psi^a\beta_2\|_{L^\infty(EF)}$$
$$= \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')}\|\varphi\psi^a\beta_2\|_{L^\infty(XF^{a+1})} \leqslant \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')}\|\varphi\|_{L^\infty(X)}\|\psi^a\beta_2\|_{L^\infty(F^{a+1})}$$
$$= \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')}\|\varphi\|_{L^\infty(X)}\|\beta_2\|_{L^\infty(F^{a+1},v^{-a})} \leqslant \frac{d_5}{A^a}C_E(d_2\delta).$$

Последнее выражение меньше $1/2$ при достаточно большом A, и рассуждение завершается так же, как и доказательство случая $p=1$ в теореме 1.

Теперь установим теорему 2. Предположим, что

$$0<\delta\leqslant\|f(z,\cdot)\|_{E^\alpha}\leqslant 1,\quad z\in\mathbb{D},$$

при некотором $\alpha\in(0,1)$. Рассмотрим внешне-внутреннюю факторизацию $f=\theta F$ (функции $F(\cdot,j)$ внешние, а $\theta(\cdot,j)$ — внутренние) и положим $\varphi=\theta F^p$, где $p=\frac{1}{\alpha}$. Тогда

$$\delta^p\leqslant\|\varphi(z,\cdot)\|_E\leqslant 1,\quad z\in\mathbb{D}.$$

Так как теорема о короне справедлива для E, найдется такая функция $h\in L^\infty(E')_A$, что $\langle\varphi(z,\cdot),h(z,\cdot)\rangle=1$ и $\|h(z,\cdot)\|_{E'}\leqslant C_E(\delta^p)$. Тогда, разумеется, $\langle f(z,\cdot),(F^{p-1}h)(z,\cdot)\rangle\equiv 1$, так что осталось доказать, что $F^{p-1}h\in L^\infty((E^\alpha)')$ (аналитичность этой функции по первой переменной очевидна). Но в равенстве $E=E^\alpha E^{1-\alpha}$ все решетки банаховы, так что $E'E^{1-\alpha}=(E^\alpha)'$ по лемме 1. Осталось заметить, что $(F(\zeta,\cdot))^{p-1}=(F(\zeta,\cdot)^{\frac{1}{\alpha}})^{1-\alpha}\in E^{1-\alpha}$ с равномерной по $\zeta\in\mathbb{T}$ оценкой соответствующей нормы.

Список литературы

[1] Nikol′skii N. K., *Treatise on the shift operator. Spectral function theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 273, Springer-Verlag, Berlin etc., 1986.

[2] Uchiyama A., *Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions*, Preprint, UCLA, 1980.

[3] Кисляков С. В., Руцкий Д. В., *Несколько замечаний к теореме о короне*, Алгебра и анализ **24** (2012), №2, 171–191.

[4] Kisliakov S. V., *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments*, Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.

[5] Rutsky D. V., *On K-closedness,* BMO*-regularity, and real interpolation of Hardy-type spaces*, `arXiv: 1409.3871, 14 Nov. 2014.`

[6] Руцкий Д. В., *Замечания об A_p-регулярных решетках измеримых функций*, Алгебра и анализ **27** (2015), №5.

[7] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces* I *and* II, Springer-Verlag, Berlin etc., 1996.

[8] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, БХВ-Петербург, СПб., 2004.

[9] Лозановский Г. Я., *О некоторых банаховых структурах*, Сиб. мат. ж. **10** (1969), №3, 584–599.

[10] Руцкий Д. В., BMO-*регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа*, Алгебра и анализ **23** (2011), №2, 248–295.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия

Поступило 30 июня 2015 г.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Старый Петергоф, Библиотечная пл., 1
Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru