



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Окулов, Численное моделирование когерентных и турбулентных структур излучения методом нелинейных интегральных отображений, *Компьютерные исследования и моделирование*, 2020, том 12, выпуск 5, 979–992

DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-979-992

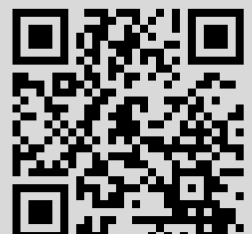
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

23 марта 2025 г., 07:23:20



УДК: 519.63, 519.64, 535.14

## Численное моделирование когерентных и турбулентных структур излучения методом нелинейных интегральных отображений

А. Ю. Окулов

Российская академия наук,  
Россия, 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 32

E-mail: alexey.okulov@gmail.com

*Получено 22.05.2020, после доработки — 06.07.2020.*

*Принято к публикации 05.08.2020.*

Распространение устойчивых когерентных образований электромагнитного поля в нелинейных средах с меняющимися в пространстве параметрами может быть описано в рамках итераций нелинейных интегральных преобразований. Показано что для ряда актуальных геометрий задач нелинейной оптики численное моделирование путем сведения к динамическим системам с дискретным временем и непрерывными пространственными переменными, основанное на итерациях локальных нелинейных отображений Фейгенбаума и Икеды, а также нелокальных диффузионно-дисперсионных линейных интегральных преобразований, эквивалентно в довольно широком диапазоне параметров дифференциальным уравнениям в частных производных типа Гинзбурга–Ландау. Такие нелокальные отображения, представляющие собой при численной реализации произведения матричных операторов, оказываются устойчивыми численно-разностными схемами, обеспечивают быструю сходимость и адекватную аппроксимацию решений. Реалистичность данного подхода позволяет учитывать влияние шумов на нелинейную динамику путем наложения на расчетный массив чисел при каждой итерации пространственного шума, задаваемого в виде многомодового случайного процесса, и производить отбор устойчивых волновых конфигураций. Нелинейные волновые образования, описываемые данным методом, включают оптические фазовые сингулярности, пространственные солитоны и турбулентные состояния с быстрым затуханием корреляций. Определенный интерес представляют полученные данным численным методом периодические конфигурации электромагнитного поля, возникающие в результате фазовой синхронизации, такие как оптические решетки и самоорганизованные вихревые кластеры.

Ключевые слова: дискретные отображения, интегральные преобразования, солитоны, вихри, фронты переключения, вихревые решетки, хаос, турбулентность

UDC: 519.63, 519.64, 535.14

## Numerical investigation of coherent and turbulent structures of light via nonlinear integral mappings

A. Yu. Okulov

Russian Academy of Sciences,  
32 Leninsky prosp., Moscow, 119991, Russia  
E-mail: alexey.okulov@gmail.com

*Received 22.05.2020, after completion — 06.07.2020.  
Accepted for publication 05.08.2020.*

The propagation of stable coherent entities of an electromagnetic field in nonlinear media with parameters varying in space can be described in the framework of iterations of nonlinear integral transformations. It is shown that for a set of geometries relevant to typical problems of nonlinear optics, numerical modeling by reducing to dynamical systems with discrete time and continuous spatial variables to iterates of local nonlinear Feigenbaum and Ikeda mappings and nonlocal diffusion-dispersion linear integral transforms is equivalent to partial differential equations of the Ginzburg–Landau type in a fairly wide range of parameters. Such nonlocal mappings, which are the products of matrix operators in the numerical implementation, turn out to be stable numerical-difference schemes, provide fast convergence and an adequate approximation of solutions. The realism of this approach allows one to take into account the effect of noise on nonlinear dynamics by superimposing a spatial noise specified in the form of a multimode random process at each iteration and selecting the stable wave configurations. The nonlinear wave formations described by this method include optical phase singularities, spatial solitons, and turbulent states with fast decay of correlations. The particular interest is in the periodic configurations of the electromagnetic field obtained by this numerical method that arise as a result of phase synchronization, such as optical lattices and self-organized vortex clusters.

Keywords: discrete maps, integral transforms, solitons, vortices, switching waves, vortex lattices, chaos, turbulence

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 979–992 (Russian).

## 1. Введение

Спонтанное образование сложных пространственно-временных структур в распределенных нелинейных системах в присутствии шумов представляет интерес с точки зрения физики конденсированного состояния [Cross, Hohenberg 1993], нелинейной оптики и лазерной физики. Сверхпроводники II рода во внешнем магнитном поле демонстрируют образование гексагональных решеток незатухающих токов вокруг силовых линий магнитной индукции, проникающей в сверхпроводник [Абрикосов, 1957]. Тонкий слой оптического материала с кубической нелинейностью показателя преломления и зеркалом обратной связи формирует треугольные решетки интенсивности [Firth, D'Alessandro, 1991]. Широкоапертурный твердотельный лазер излучает сфазированные решетки оптических вихрей прямоугольной симметрии [Chen, Lan, 2001; Staliunas, Weiss, 1995; Okulov, 2008]. Подобные самоорганизующиеся структуры аккуратно описываются в рамках уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Области устойчивости структур определяются путем расчета инкрементов неустойчивости (показателей Ляпунова) [Окулов, 2000]. При численном моделировании необходимо обеспечить сходимость к решению, аппроксимирующему реальную ситуацию, и проверить это решение на устойчивость [Федоренко, 1994]. Наиболее распространенные численные методы включают в себя неявные схемы Кранка–Николсона [Mihalache et al., 2007], метод расщепления по дисперсии (дифракции) и нелинейности с использованием быстрого преобразования Фурье [Sziklas, Siegman, 1975], метод конечных элементов [Lee et al., 2004]. Во всех случаях ключевым моментом является идентификация численных артефактов, которые могут генерироваться самой разностной схемой как устойчивые пространственно-временные образования, но не иметь при этом никакого отношения ни к решаемому нелинейному волновому уравнению, ни тем более к реальной физической ситуации, описываемой этим уравнением. В данной работе предлагается физически мотивированный подход к численному моделированию сложных нелинейных систем, использующий произведения интегральных операторов диффузионного типа и точечных нелинейных преобразований, хорошо исследованных в теории динамического хаоса. Этот подход сочетает физическую наглядность математических структур и возможность универсальным образом описывать базовые нелинейные волновые образования в присутствии шумов.

## 2. Моделирование стационарных режимов генерации

В ряде практически интересных случаев геометрия решаемой задачи позволяет существенно упростить численное моделирование и повысить уровень достоверности получаемых результатов. Одна из типичных геометрий в лазерной физике адекватно моделируется итерационным методом интегрального уравнения Фокса–Ли [Siegman, 1986], где комплексные массивы эмулируют распределение амплитуды и фазы световой волны на зеркалах, а распространение излучения рассчитывается в рамках классической теории дифракции [Борн, Вольф, 1973]. Данный метод естественным образом включает в разностную схему граничные условия, позволяет учесть количественно нелинейность усиливающей среды [Окулов, 1994] и обладает высокой степенью устойчивости. В достаточно общей форме итерационный метод Фокса–Ли записывается как

$$E_{n+1}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{r} - \vec{r}') f[E_n(\vec{r}')] d\vec{r}', \quad (1)$$

где  $K(\vec{r} - \vec{r}')$  — функция Грина линейного волнового уравнения;  $E_{n+1}(\vec{r})$  — распределение комплексной амплитуды световой волны (электрическое поле в уравнениях Максвелла), записываемое в расчетной схеме как комплексный массив  $E_{n,m}$ ;  $f[E_n(\vec{r})]$  — нелинейная передаточная функция усиливающей среды, являющаяся решением уравнений Максвелла–Блоха в усиливающем элементе без учета дифракции [Окулов, Ораевский, 1988]. Собственные функ-

ции и собственные значения интегрального уравнения (1) дают стационарные нелинейные моды  $\tilde{E}(\vec{r})$ , собственные частоты  $\text{Im}\Gamma$  и декременты затухания  $\text{Re}\Gamma$ . Следующим последовательным приближением к реальной нелинейной динамике, наблюдаемой экспериментально, является учет релаксации активной среды [Okulov, 2019], описываемой временем жизни атомов на верхнем уровне  $T_1$  (продольной релаксации):

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = + \frac{N_0 - N_n}{T_1} - \frac{\sigma N_n \varepsilon_0 c |E_n|^2}{\hbar \omega}, \quad (2)$$

где  $N_n$  — число возбужденных атомов в единице объема,  $N_0 / T_1$  — скорость накачки атомов (скорость перевода атомов на верхний уровень),  $\sigma$  — сечение вынужденного излучения. Вместе с передаточной функцией усиливающей среды (на примере двухуровневого лазерного усилителя [Okulov, 2008; Окулов, 2000]) —

$$E_{n+1} = f[E_n(\vec{r})] = RE_n \cdot \exp[ikn_0 L_c + ikn_2 |E_n|^2 L_{\text{amp}}] \cdot \exp[\sigma N_n L_{\text{amp}}] \quad (3)$$

— комбинации из уравнений вида (1)–(3) дают полное описание пространственно-временной нелинейной динамики лазеров на диэлектрических кристаллах и полупроводниковых лазеров с так называемым вертикальным резонатором, где  $k = 2\pi / \lambda$ ,  $R$  — коэффициент отражения выходного зеркала,  $n_0$  — линейный показатель преломления,  $n_2$  — нелинейный показатель преломления,  $L_c$  — длина резонатора,  $L_{\text{amp}}$  — толщина усиливающего элемента.

Другой типичной нелинейностью является квадратичная восприимчивость  $\chi_2$ , используемая для генерации оптических гармоник и параметрического преобразования частоты излучения. В простейшем случае, когда при условии фазового синхронизма гармоник происходит эффективное преобразование частоты, есть возможность включить в интегральное уравнение Фокса–Ли в качестве нелинейной передаточной функции одномерное отображение следующего вида [Окулов, Ораевский, 1984]:

$$E_{n+1} = f[E_n(\vec{r})] = g(E_n) [1 - \tanh(g(E_n))]. \quad (4)$$

Физическим образом отображения (4) является внутриврезонаторная генерация второй оптической гармоники в кольцевом лазере (рис. 1). Циклические проходы излучения через усиливающую среду  $g(E_n)$  чередуются с преобразованием излучения в нелинейном кристалле с квадратичной восприимчивостью  $\chi_2$  [Okulov, Oraevsky, 1986]. Итерации отображений с квадратичным максимумом в виде простейшей логистической параболы  $E_{n+1} = G E_n [1 - E_n^2]$  и (4)  $E_{n+1} = G E_n [1 - \tanh(E_n)]$  подчиняются универсальным закономерностям Фейгенбаума [Feigenbaum, 1978]. Бифуркационные диаграммы таких отображений имеют универсальную структуру (рис. 1). Значения бифуркаций критического параметра (в данном случае это ненасыщенный коэффициент усиления  $G$ ) сгущаются вблизи точек перехода к хаосу асимптотически как геометрическая прогрессия:

$$\delta_F = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_M - G_{M-1}}{G_{M-1} - G_{M-2}} = 4.6692... \quad (5)$$

В точках перехода в хаосу, например при значении коэффициента усиления  $G_{\text{chaos}} = 9.4$  для отображения (4), итерации поля  $E_n$  дают хаотический набор чисел, статистика которого в точности описывается  $\beta$ -распределением. Примечательно, что в точности аналогичное  $\beta$ -распределение вероятности —

$$P(I) = \frac{1}{\pi I \sqrt{1-I}}, \quad I \approx I_0 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (\varphi_1 - \varphi_2) \subset (0, \pi), \quad (6)$$

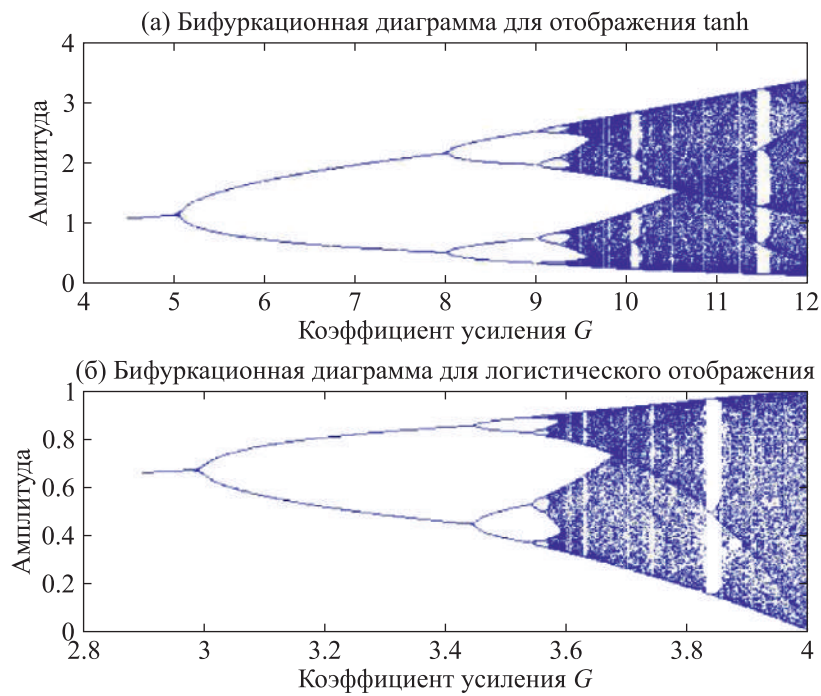


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы (а) отображения (4) и (б) логистического отображения демонстрируют скейлинг с универсальными числами  $\delta_F = 4.66$  и  $\alpha_F = 2.502$  вблизи точек перехода к хаосу  $G_{\text{chaos}} \cong 9.4$  (а) и  $G_{\text{chaos}} \cong 3.99\dots$  (б)

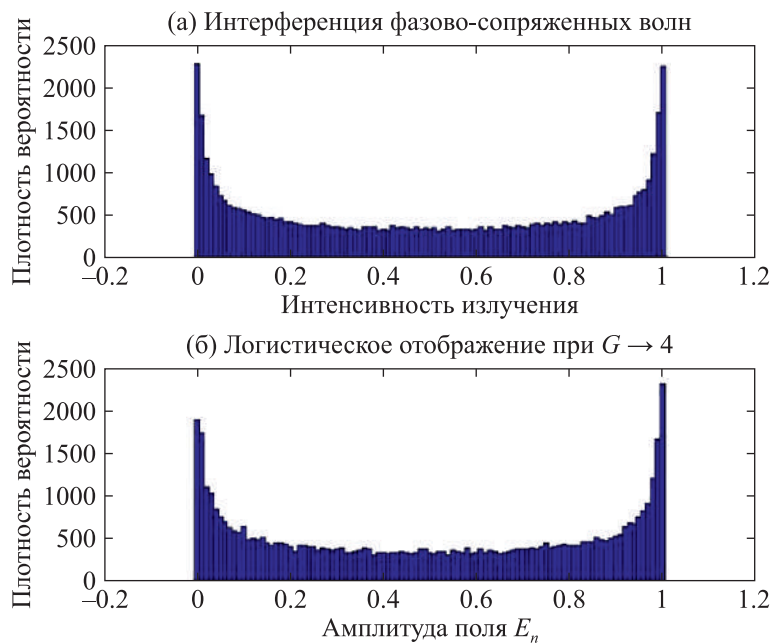


Рис. 2. (а) Гистограмма интерференции двух фазово-сопряженных волн со случайными фазами [Зубарев и др., 1983]; (б) гистограмма в точке перехода к хаосу  $G_{\text{chaos}} = 3.99$  логистического отображения

— получается и при интерференции двух волн со случайными фазами [Зубарев и др., 1983], где  $I$  — интенсивность интерферирующих волн с разностью фаз  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , равномерно распределенной в интервале  $(0, \pi)$ .

Итерационный метод Фокса–Ли с такой стационарной моделью усиливающей среды на основе уравнений (2) и (3) продемонстрировал сходимость к решениям в виде гауссовых пучков и периодических решеток с самовоспроизведением полей за счет эффекта Тальбота и позволил проверить эти решения на устойчивость [Okulov, 1993]. Неожиданным оказалось то обстоятельство, что геометрия оптического резонатора с тонким слоем усиливающей среды, накачиваемым вдоль оси генерации излучением лазера накачки, выбранная из соображений максимальной простоты математической модели (1), оказалась чрезвычайно интересной для экспериментаторов [Вадимова и др., 2013], поскольку лазер с активной средой в виде тонкого диска имеет ряд существенных преимуществ с точки зрения контроля тепловых режимов и управления расходимостью излучения.

### 3. Моделирование нестационарных режимов генерации

Реальная динамика твердотельных и полупроводниковых лазеров характеризуется релаксационными колебаниями, которые возникают вследствие существенного количественного различия скорости релаксации инверсной населенности (время продольной релаксации  $T_1$  или время жизни атома на верхнем уровне) и скорости релаксации поля в резонаторе (время жизни фотона в резонаторе  $\tau_c$ ). В простейшей модели одномодового одночастотного лазера —

$$\frac{dE}{dt} + \frac{E}{2\tau_c} = \frac{\sigma N c L_{\text{amp}} E}{2L_c} + \delta E, \quad \frac{dN}{dt} + \frac{N - N_0 + \delta N}{T_1} = -\frac{\sigma N \varepsilon_0 c |E|^2}{\hbar \omega}, \quad (7)$$

— линеаризованный анализ устойчивости стационарного режима генерации при длине усиливающей среды  $L_{\text{amp}}$  [Окулов, 1994] дает следующее выражение для периода затухающих колебаний, возникающих при отклонении динамической системы (6) от равновесия:

$$\tau_{\text{REL}} = \sqrt{\frac{T_1 \tau_c}{G - 1}}, \quad G = \sigma N_0 L_{\text{amp}}, \quad \nu_{\text{REL}} = \frac{1}{\tau_{\text{REL}}}. \quad (8)$$

Отклонения от равновесия в системе уравнений (7) возникают вследствие шумов, т. е. флуктуаций инверсной населенности  $\delta N$  и поля  $\delta E$  в резонаторе. Спектр мощности излучения  $I(\omega)$  имеет в результате флуктуаций характерную форму с максимумом на частоте релаксационных колебаний  $\nu_{\text{REL}}$  [Chen, Lan, 2001]. Аналогичным образом записывается система уравнений с дискретным временем на основе нелокального отображения Фокса–Ли и уравнения для релаксирующей инверсной населенности (1)–(3):

$$\begin{aligned} E_{n+1}(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{r} - \vec{r}') f[E_n(\vec{r}')] d\vec{r}' + \delta E_n(\vec{r}), \\ f(E_n(\vec{r})) &= RE_n(\vec{r}) \cdot \exp[ikn_0 L_c + ikn_2 |E_n(\vec{r})|^2 L_{\text{amp}}] \cdot \exp[\sigma N_n(\vec{r}) L_{\text{amp}}], \\ \frac{N_{n+1}(\vec{r}) - N_n(\vec{r})}{\Delta t} &= + \frac{N_0(\vec{r}) + \delta N(\vec{r}) - N_n(\vec{r})}{T_1} - \frac{\sigma N_n(\vec{r}) \varepsilon_0 c |E_n(\vec{r})|^2}{\hbar \omega}, \\ K(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{ik}{2\pi L_c} \exp\left[\frac{ik|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{L_c}\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Эта динамическая система имеет качественно близкий спектр мощности  $I(\omega)$  с релаксационным максимумом на частоте релаксационных колебаний  $\nu_{\text{REL}}$  [Okulov, 2019], который на-

блюдался в ряде экспериментов с твердотельными чип-лазерами с диодной оптической накачкой [Chen, Lan, 2001]. Кроме того, вследствие нелинейного взаимодействия поперечных типов колебаний в спектре мощности возникают дополнительные пики, обусловленные возбуждением коллективных колебаний образовавшейся оптической решетки. Пучности образовавшейся оптической решетки ведут себя подобно атомам в кристаллической решетке, коллективные колебания которой аналогичны возбуждениям в виде «акустических» и «оптических» фононов [Staliunas, Weiss, 1995]. Дополнительный «оптический» резонанс  $\nu_{\text{opt}}$  в спектре мощности расположен дальше от несущей частоты  $\nu_0$ , чем «акустический»  $\nu_{\text{ac}}$  и самый медленный из них релаксационный резонанс  $|\nu_{\text{REL}} - \nu_0| < |\nu_{\text{ac}} - \nu_0| < |\nu_{\text{opt}} - \nu_0|$  [Okulov, 2019]. В данном случае не ставилась цель увязать относительную величину флуктуаций и интенсивность излучения. Вопрос о ширине спектральной линии не рассматривался, поэтому центральный пик предельно узок. На рис. 3 изображены фазовые портреты в переменных  $(\text{Re } E_n, \text{Im } E_n)$ ,  $(I(t), N(t))$  при малом превышении над порогом генерации  $G = \sigma N_0 L_{\text{amp}} \approx 1.2$ , при существенном различии времен жизни фотона в резонаторе  $\tau_C \approx 10^{-8}$  с и продольной релаксации  $T_1 \approx 10^{-4}$  с, а также числе Френеля  $N_f \approx N_p^2 \approx 90$  [Okulov, 1993], соответствующем возбуждению квадратной решетки интенсивности на выходном зеркале из  $9 \times 9$  ( $N_p \times N_p$ ) пятен.

Особенностями динамического режима, полученного итерациями нелокального отображения (9), является относительно слабый пик на частоте релаксационных колебаний  $\nu_{\text{REL}} = \sqrt{\frac{G-1}{T_1 \tau_C}} \approx 50$  МГц (рис. 3, в), обусловленный малым превышением коэффициента усиления  $G$  над порогом генерации. Для пренебрежимо малых шумов (рис. 3, а) фазовый портрет системы (8) близок к когерентному состоянию [Scully, 1997], т. е. круговой фазовой траектории в переменных  $(\text{Re } E_n, \text{Im } E_n)$ , слегка размытой за счет соотношения неопределенностей. При наличии шумов, обусловленных спонтанным распадом верхнего уровня с временем жизни  $T_1$ , флуктуациями инверсной населенности  $\delta N_n(\vec{r})$  вследствие пульсаций оптической накачки и флуктуациями поля в резонаторе  $\delta E_n(\vec{r})$ , включающими спонтанное излучение, фазовая траектория в переменных  $(I(t), N(t))$  (рис. 3, б) все время выталкивается из фокуса бесшумовой  $(\delta E_n(\vec{r}), \delta N_n(\vec{r}) = 0)$  динамической системы (7)  $\delta$ -образными случайными толчками.

Соответственно, фазовая траектория в переменных  $(I(t), N(t))$  в этом реалистичном режиме оказывается составленной из большого количества «броуновских» изломов, обусловленных случайными силами  $\delta N_n(\vec{r})$ ,  $\delta E_n(\vec{r})$ , возмущающими обе динамические переменные: поле в резонаторе  $E(t)$  и инверсную населенность  $N(t)$ . Очевидно, что ответ на вполне логичный вопрос о том, являются ли фазовые траектории системы (8) фракталом или одним из классических шумовых процессов [Scully, 1997], требует чрезвычайно аккуратного численного моделирования, которое могло бы различить классическую шумовую траекторию от автомодельной (self-similar) траектории фрактала, воспроизводящей себя при последовательном увеличении разрешения расчетной сетки. Определенный прогресс в этом направлении был достигнут благодаря работам Грассбергера и Прокацци [Hentchel, Procaccia, 1983], которые разработали остроумный алгоритм восстановления фазового пространства динамической системы по реализациям временного ряда всего лишь одной из динамических переменных системы и вычисления фрактальной размерности аттрактора в том случае, когда система находится в режиме динамического хаоса. Однако такие расчеты довольно объемны и требуют определенных затрат машинного времени и вычислительных ресурсов даже для простейших систем [Bhattacharjee, 1986].



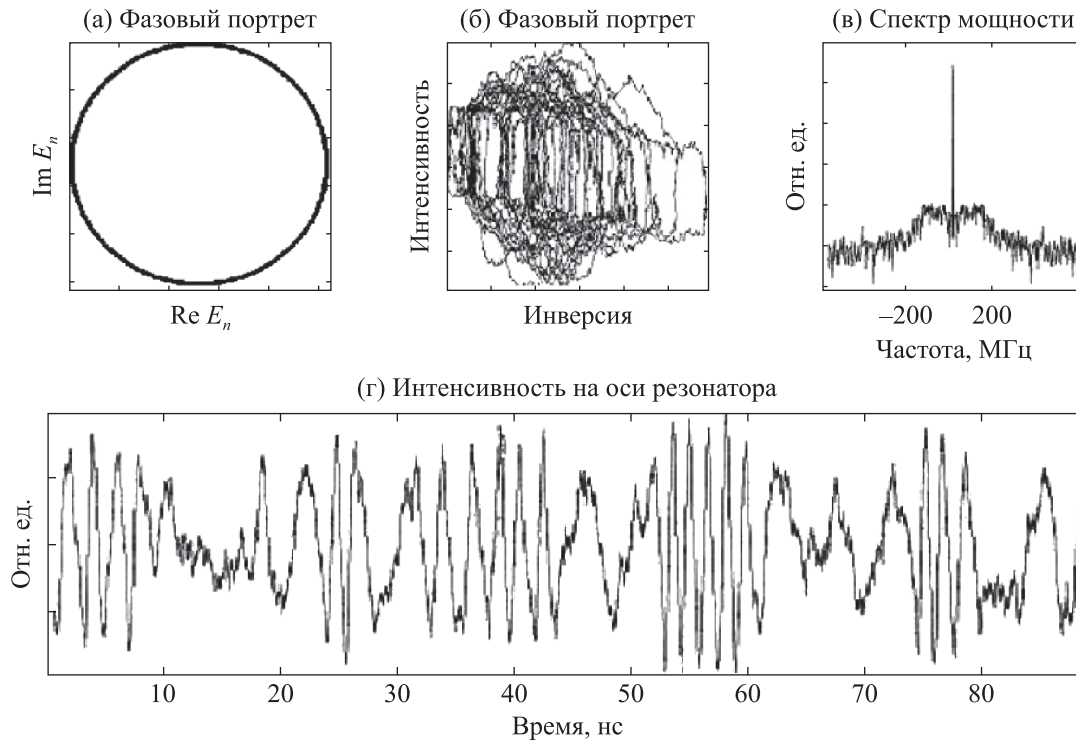


Рис. 3. (а) Фазовый портрет динамической системы (9) в переменных  $(\text{Re } E_n, \text{Im } E_n)$  или (in-phase, quadrature) после выхода на предельный цикл. (б) Фазовый портрет системы (9) в переменных  $(I(t), N(t))$  на предельном цикле со случайными шумами  $\delta N_n(\vec{r})$ ,  $\delta E_n(\vec{r})$ , добавляемыми на каждой итерации (проходе излучения через резонатор). (в) Спектр мощности  $I(\omega)$  системы (9) при малом превышении порога генерации. Ширина линии генерации предельно узкая, релаксационные максимумы уширены шумом. (г) Временная реализация интенсивности излучения системы (9) на оси резонатора  $I_n(t) = |E_n(\vec{r} = 0)|^2$ . Случайные отклонения интенсивности от стационарного значения вблизи предельного цикла являются результатом воздействия случайных сил  $\delta E_n(\vec{r})$  и  $\delta N_n(\vec{r})$ . Система уравнений (9) решалась итерационным методом с БПФ при коэффициенте усиления  $G = \sigma N_0 L_{\text{amp}} \approx 1.12$  и числе Френеля  $N_f \approx 90$

#### 4. Вихревые решетки

Пространственная структура излучения, содержащаяся в двумерных комплексных массивах  $E_n(\vec{r})$ , выводилась в виде двух распределений интенсивности  $I_n(\vec{r}) = \varepsilon_0 c E_n(\vec{r}) \cdot E_n^*(\vec{r})$  и оптической фазы  $\arg E_n(\vec{r})$ . Размерность массивов  $E_n(\vec{r})$  и  $N_n(\vec{r})$  варьировалась в диапазоне от  $128 \times 128$  до  $512 \times 512$ , хотя в некоторых тестах, проведенных для идентификации возможных численных артефактов, размерность массивов достигала  $1024 \times 1024$ . В отдельных тестах использовалась размерность  $2048 \times 2048$ , максимально возможная для используемого компьютера с процессором Pentium Dual Core и оперативной памятью 2 Гб. В отличие от ранней вычислительной работы [Staliunas, Weiss, 1985] и натуральных экспериментов, начатых в [Chen, Lan, 2001], где главное внимание было уделено распределению интенсивности  $I_n(\vec{r})$ , в данной работе особое внимание уделялось фазовой структуре излучения, которая содержит информацию о моменте импульса излучения. Фазовые сингулярности, т. е. точки, где модуль  $|E_n(\vec{r})|$  и интенсивность  $I_n(\vec{r}) = \varepsilon_0 c |E_n(\vec{r})|^2$  обращаются в 0, окружены областями, где фаза светового поля

$\arg E_n(\vec{r})$  меняется на величину  $\ell 2\pi$  при обходе сингулярности по замкнутому контуру, где  $\ell$  — топологический заряд сингулярности, а  $\ell \hbar$  — орбитальный момент импульса фотонов в таком оптическом вихре. В большинстве реализаций, полученных путем итерирования изначально шумового поля  $E_0(\vec{r})$  при числе Френеля  $N_f \approx 80 \div 1000$ , устанавливался квазистационарный режим генерации с квадратной решеткой пятен интенсивности (рис. 4), но наиболее интересная информация содержалась в фазовом распределении, которое явно указывало на существование решетки фазовых сингулярностей (рис. 5).

Изменение цвета от синего до красного при обходе вокруг этих особых точек означает изменение аргумента комплексного поля  $E_n(\vec{r})$  от 0 до  $\ell 2\pi$ . В подавляющем большинстве реализаций оказалось, что топологические заряды (орбитальные квантовые числа  $\ell = \pm 1$ ) расположены в «шахматном порядке». Элементарная ячейка вихрей состоит из четырех сингулярностей, локализованных по вершинам квадрата, причем соседние сингулярности имеют противоположные заряды  $\pm \ell$ , а сингулярности на диагонали имеют одинаковые по знаку топологические заряды. Эффективное «поле скоростей», рассчитываемое по преобразованию Маделунга  $\vec{V}_\perp \approx \text{grad}[\arg E_n(\vec{r})]$  в поперечной плоскости, или проекция на плоскость  $\vec{r} = [x, y]$  плотности импульса электромагнитного поля  $\vec{P}_\perp = \varepsilon_0 [\vec{E} \times \vec{B}]_\perp$ , состоит из решетки ячеек с противоположными циркуляциями скорости вокруг особых точек с нулевой интенсивностью (рис. 5). Полученные решетки с противоположно направленными циркуляциями (vortex-antivortex) отличаются от вихревых решеток в сверхпроводниках II рода, где вихри сонаправлены и образуются вокруг линий магнитной индукции, проникающей в тонкую пленку сверхпроводника и наводящей вокруг проникшего магнитного поля незатухающие круговые токи [Абрикосов, 1957].

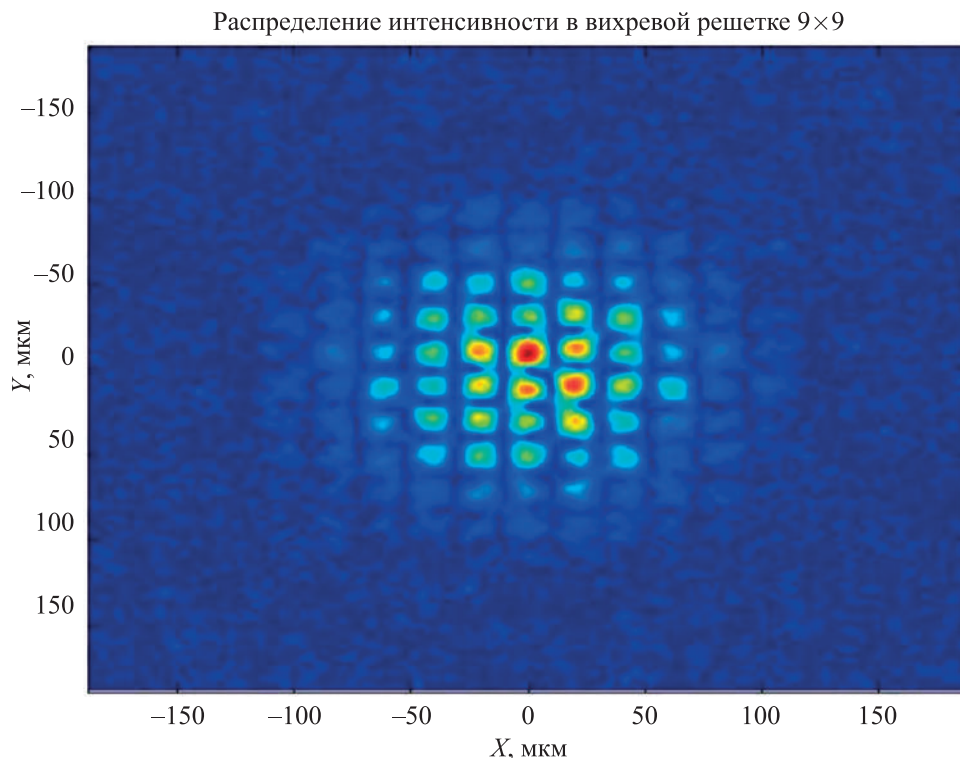


Рис. 4. Распределение интенсивности в квадратной решетке из  $9 \times 9$  оптических вихрей с противоположными циркуляциями на выходном зеркале  $\vec{r} = [x, y]$  твердотельного чип-лазера с параметрами резонатора из [Chen, Lan, 2001; Okulov, 2008]. Система уравнений (9) решалась итерационным методом с БПФ при коэффициенте усиления  $G = \sigma N_0 L_{\text{амп}} \approx 1.2$  и числе Френеля  $N_f \approx 90$

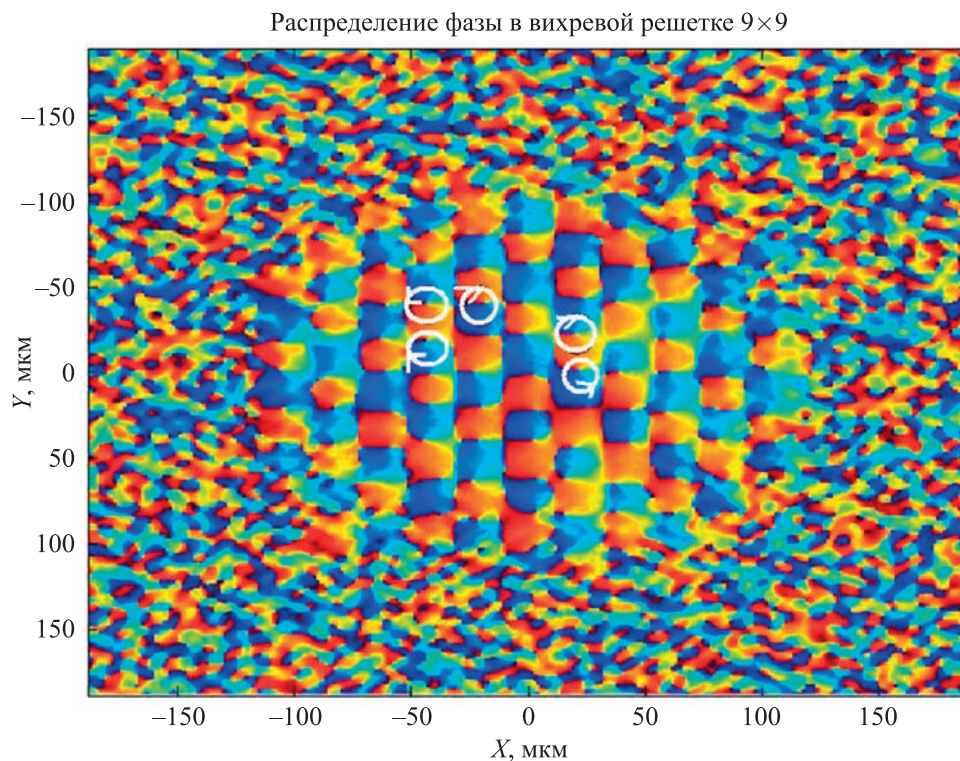


Рис. 5. Фаза электрического поля  $\arg E_n(\vec{r})$  квадратной решетки из  $9 \times 9$  оптических вихрей в ближнем поле чип-лазера с противоположными циркуляциями. Изменению фазы соответствует изменение цвета от синего ( $\phi = 0$ ) до красного ( $\phi = 2\pi$ ). Мелкомасштабный фон из хаотически расположенных вихрей является многомодовым случайным процессом  $\delta E_n(\vec{r})$ , добавляемым к полю  $E_n(\vec{r})$  на каждой итерации  $n \rightarrow n+1$  (проходе через резонатор),  $\vec{r} = [x, y]$ . Система уравнений (9) решалась итерационным методом с БПФ при коэффициенте усиления  $G = \sigma N_0 L_{\text{amp}} \approx 1.2$  и числе Френеля  $N_f \approx 90$

## 5. Моделирование локализованных структур

Нелинейное взаимодействие поперечных мод оптического резонатора является базовым механизмом образования локализованных структур. Возникающие в ближнем поле многомодового лазера пространственные солитоны [Окулов, 2000], вихревые оптические солитоны («темные» солитоны) и солитонные кластеры являются результатом развития модуляционной неустойчивости нелинейного уравнения Шрёдингера [Окулов, Ораевский, 1988]. Численное моделирование этих волновых образований требует тщательной настройки численного кода и контроля процесса расчета для идентификации численных артефактов. В отличие от «светлых» солитонов, представляющих собой области максимумов световой волны с плавным профилем интенсивности вблизи максимума, вихревые солитоны и вихревые решетки состоят из оптических сингулярностей, где градиенты поля велики, и это обстоятельство накладывает жесткие требования на разрешение расчетной сетки. Это обстоятельство существенно и для «светлых» солитонов, вокруг которых зачастую возникает интерференционная картина [Malomed, Towers, 2002], обусловленная интерференцией солитона с фоном (background) [Ахмедиев, 1997].

В этом случае также возникают резкие градиенты напряженности электрического поля световой волны, требующие измельчения расчетной сетки. На рис. 6 представлен результат расчета локализованного солитонного возбуждения, спонтанно возникшего на гладком фоне.

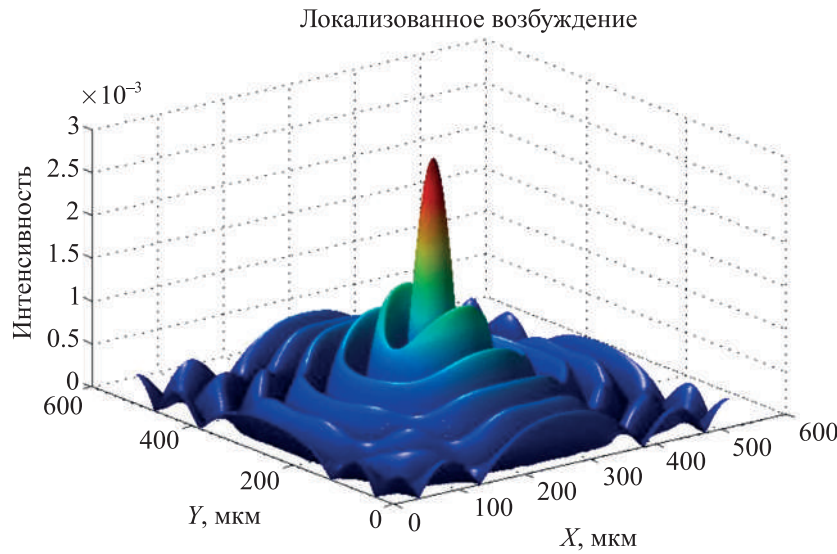


Рис. 6. Локализованное возбуждение на выходном зеркале  $E_n(\vec{r})$ ,  $\vec{r} = [x, y]$ , как результат синхронизации поперечных мод устойчивого резонатора. Осцилляции вокруг резкого центрального пика обусловлены интерференцией пространственного солитона с фоном [Ахмедиев, 1997]. Система уравнений (9) решалась итерационным методом с БПФ при коэффициенте усиления  $G = \sigma N_0 L_{\text{amp}} \approx 1.1$  и числе Френеля  $N_f \approx 65$

В нелокальном отображении (8) использовались два комплексных расчетных массива. Это массив огибающей световой волны  $E_n(\vec{r})$  и массив комплексного коэффициента усиления  $(N_n(\vec{r}), n_n(\vec{r}))$ , включающий распределение инверсной населенности  $N_n(\vec{r})$  и показателя преломления  $n_n(\vec{r})$  на однородной расчетной сетке  $512 \times 512$  точек. Изначально шумовой массив  $E_0(\vec{r})$  в виде суперпозиции 20 плоских волн со случайными фазами трансформировался в колоколообразное распределение. Однако после того, как интенсивность достигла уровня насыщения, в его центральной части появился резкий выброс. По мере усиления выброса возникла характерная интерференционная картина «валов» вокруг центрального максимума. Нелинейная разность фаз (см. формулы (3) и (9)) между центральным максимумом и краями усиливающей области составила порядка  $6\pi$ . Данная численная реализация хорошо аппроксимируется аналитическими решениями, так называемым вариационным методом [Malomed, Towers, 2002] в виде «светлого» солитона над однородным фоном  $B(t)$ :

$$E(\vec{r}, t) \approx \text{sech} h(\vec{r} \cdot \vec{W}(t)) \cdot \exp\left( i l + i b(t) |\vec{r}|^2 \right) \cdot |\vec{r} / W(t)|^l + B(t), \tag{10}$$

где функции  $\vec{W}(t)$  (двухкомпонентная функция, характеризующая поперечный размер солитона),  $b(t)$  (фазовая модуляция) и  $B(t)$  (амплитуда фона) определялись в этой работе из численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой из подстановки в нелинейное уравнение в частных производных типа Гинзбурга–Ландау. На рис. 6 изображен пространственный солитон с разными размерами по осям  $W_X^{-1}(t)$  и  $W_Y^{-1}(t)$ .

## 6. Заключение

Использование нелокальных отображений [Rybalova, 2018] для расчета нестационарных нелинейных волновых процессов позволяет существенно упростить численное моделирование сложных оптических систем. Физически наглядное построение вычислительной процедуры из



чередующихся интегралов свертки и точечных преобразований (9) дает возможность контролировать устойчивость и сходимость алгоритма путем фильтрации нежелательных пространственных гармоник и получать реалистичные численные решения, совпадающие в ряде решаемых случаев с аналитическими результатами, полученными вариационным методом [Malomed, Towers, 2002] и точными решениями [Ахмедиев, 1997].

Моделирование нестационарных процессов данным методом позволяет учесть влияние шумов на динамику лазеров чрезвычайно наглядным и эффективным способом, когда на каждом временном шаге, соответствующем проходу через оптический резонатор, к световому полю и распределению инверсной населенности добавляется шумовое поле в виде многомодового случайного процесса. Такой подход позволяет получить реалистичные спектры мощности излучения, где присутствуют релаксационные колебания и коллективные колебания вихревых решеток, сформировавшихся в результате синхронизации поперечных мод. Пространственная фильтрация высоких фурье-гармоник, происходящая при вычислении интегральных преобразований свертки обеспечивает подавление неустойчивостей, типичных для явных разностных схем и одновременно способствует селекции устойчивых волновых образований.

## Список литературы (References)

- Абрикосов А. А.* О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32, № 6. — С. 1442.  
*Abrikosov A. A.* On the magnetic properties of superconductors of the second group // JETP. — 1957. — Vol. 5, Iss. 6. — P. 1174–1182. (Original Russian paper: *Abrikosov A. A.* O magnitnykh svoystvakh sverkhprovodnikov vtoroi gruppy // Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki. — 1957. — Vol. 32, No. 6. — P. 1142.)
- Ахмедиев Н. Н., Анкевич А.* Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки. — М.: Физматлит, 2003.  
*Akhmediev N. N., Ankevich A.* Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. — London, UK: Chapman and Hall, 1997. (Russ. ed.: *Akhmediev N. N., Ankevich A.* Solitony. Nelineinye impulsy i puchki. — Moscow: Fizmatlit, 2003.)
- Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.  
*Born M., Wolf E.* Principles of Optics. — Oxford, UK: Pergamon Press, 1965. (Russ. ed.: *Born M., Wolf E.* Osnovy Optiki. — Moscow: Nauka, 1973.)
- Вадимова О. Л., Мухин И. Б., Кузнецов И. И., Палашиов О. В., Перевезенцев Е. А., Хазанов Е. А.* Расчет коэффициента усиления в криогенно охлаждаемых Yb: YAG-дисках в условиях сильного тепловыделения // Квантовая электроника. — 2013. — Т. 43, № 3. — С. 201–206.  
*Vadimova O. L., Mukhin I. B., Kuznetsov I. I., Palashov O. V., Perevezentsev E. A., Khazanov E. A.* Raschet koeffitsienta usileniya v kriogenno okhlazhdaemykh Yb: YAG-diskakh v usloviyakh silnogo teplovydeleniya [Calculation of the gain coefficient in cryogenically cooled Yb: YAG disks at high heat generation] // Kvantovaya Elektronika [Quantum Electronics]. — 2013. — Vol. 43, No. 3. — P. 201–206 (in Russian).
- Зубарев И. Г., Миронов А. Б., Михайлов С. И., Окулов А. Ю.* О точности воспроизведения временной структуры возбуждающего излучения при вынужденном рассеянии света // ЖЭТФ. — 1983. — Т. 84, № 2. — С. 466–474.  
*Zubarev I. G., Mironov A. B., Mikhailov S. I., Okulov A. Yu.* Accuracy of reproduction of time structure of the exciting radiation in stimulated scattering of light // JETP. — 1983. — Vol. 57, Iss. 2. — P. 270–274. (Original Russian paper: *Zubarev I. G., Mironov A. B., Mikhailov S. I., Okulov A. Yu.* O tochnosti vosproizvedeniya vremennoi struktury vzbuzhdayushogo izlucheniya pri vynuzhdennom rasseyanii sveta // Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki. — 1983. — Vol. 84, No. 2. — P. 466–474.)
- Окулов А. Ю.* О корреляции моды резонатора и профиля инверсии в твердотельном чип-лазере // Оптика и спектроскопия. — 1994. — Т. 77, № 6. — С. 985–990.  
*Okulov A. Yu.* O korrelyacii mody resonatora i profilya inversii v tverdotelnom chip-lasere [On correlations between cavity mode and inversion profile in a solid-state chip laser] // Optika i spectroscopia [Optics and spectroscopy]. — 1994. — Vol. 77, Iss. 6. — P. 985–990 (in Russian).
- Окулов А. Ю.* Солитонный лазер: геометрия и устойчивость // Оптика и спектроскопия. — 2000. — Т. 89, № 1. — С. 145–147.  
*Okulov A. Yu.* Solitonnyi laser: geometry and stability [Soliton laser: geometry and stability] // Optika i spectroscopia [Optics and spectroscopy]. — 2000. — Vol. 89, Iss. 1. — P. 145–147 (in Russian).

- Окулов А. Ю., Ораевский А. Н.* Регулярная и стохастическая автомодуляция излучения в кольцевом лазере с нелинейным элементом // *Квантовая электроника*. — 1984. — Т. 14, № 9. — С. 1235–1238.  
*Okulov A. Yu., Oraevsky A. N.* Regulyarnaya i stohasticheskaya avtomodulyaciya izlucheniya v kolcevom lasere s nelineinym elementom [Regular and stochastic self-modulation in a ring laser with nonlinear element] // *Kvantovaya Elektronika* [Quantum Electronics]. — 1984. — Vol. 14, Iss. 9. — P. 1235–1238 (in Russian).
- Окулов А. Ю., Ораевский А. Н.* О компенсации самофокусирующих искажений при квазирезонансном усилении импульса света // *Квантовая электроника*. — 1988. — Т. 18, № 2. — С. 369–376.  
*Okulov A. Yu., Oraevsky A. N.* Compensation of self-focusing distortions in quasisonant amplification of a light pulse // *Quantum Electronics*. — 1988. — Vol. 18, Iss. 2. — P. 233–238. (Original Russian paper: *Okulov A. Yu., Oraevskii A. N.* O kompesatcii samofokusirovochnykh iskazhenii pri kvasiresonansnom usilenii impulsa sveta // *Kvantovaya Elektronika*. — 1988. — Vol. 18, No. 2. — P. 369–376.)
- Окулов А. Ю., Ораевский А. Н.* Дискретные отображения и пространственно-временная динамика волнового пакета в нелинейной среде // *Труды ФИАН*. — М.: Наука, 1988. — Т. 187. — С. 202–222.  
*Okulov A. Yu., Oraevsky A. N.* Diskretnye otobrazheniya i prostranstvenno-vremennaya dinamika volnovoogo paketa v nelineinoy srede [Spatiotemporal dynamics of a wave packet in nonlinear medium and discrete maps] // *Proceedings P. N. Lebedev Physical Institute* [Trudy FIAN, Moscow]. — Moscow: Nauka, 1988. — Vol. 187. — P. 202–222 (in Russian).
- Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. — М.: Изд. МФТИ, 1994.  
*Fedorenko R. P.* Vvedenie v vychislitelnyu fiziku [Introduction to Computational Physics]. — Moscow: MFTI Press, 1994 (in Russian).
- Bhattacharjee J. K.* Fractal dimension of Feigenbaum attractors for a class of one-dimensional maps // *Phys. Lett. A*. — February 1986. — Vol. 117, No. 7. — P. 339.
- Chen Y. F., Lan Y. P.* Transverse pattern formation of optical vortices in a microchip laser with a large Fresnel number // *Phys. Rev. A*. — December 2001. — Vol. 65, No. 1. — P. 013802.
- Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* — April 1993. — Vol. 65, No. 4. — P. 851–1124.
- Feigenbaum M. J.* Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // *J. Stat. Phys.* — April 1978. — Vol. 19, No. 4. — P. 25–52.
- Firth W. J., D'Alessandro G. D.* Spontaneous Hexagon Formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror // *Phys. Rev. A*. — May 1991. — Vol. 66, No. 20. — P. 2597–2600.
- Hentchel H. G. E., Procaccia I.* The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // *Physica D*. — February 1983. — Vol. 8, No. 2. — P. 435.
- Lee S.-Y., Kurdoglyan M. S., Rim S., Kim C.-M.* Resonance patterns in a stadium-shaped microcavity // *Phys. Rev. A*. — August 2004. — Vol. 70, No. 2. — P. 023809.
- Malomed B. A., Towers I.* Stable (2+1)-dimensional solitons in a layered medium with sign-alternating Kerr nonlinearity // *Journ. Opt. Soc. Am B*. — March 2002. — Vol. 19, No. 3. — P. 537–543.
- Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Leblond H., Malomed B. A.* Stability limits for three-dimensional vortex solitons in the Ginzburg–Landau equation with the cubic-quintic nonlinearity // *Phys. Rev. A*. — October 2007. — Vol. 76, No. 4. — P. 045803.
- Okulov A. Yu.* 3D vortex labyrinths in the near field of solid-state microchip laser // *Journ. Mod. Opt.* — January 2008. — Vol. 55, No. 2. — P. 241–259.
- Okulov A. Yu.* Configuration of vortex-antivortex lattices at output mirror of wide-area microchip laser // *J. Phys.: Conf. Ser.* — March 2019. — Vol. 1163, No. 5. — P. 012065.
- Okulov A. Yu.* Scaling of diode-array-pumped solid-state lasers via self-imaging // *Opt. Comm.* — June 1993. — Vol. 99, No. 5-6. — P. 350–354.
- Okulov A. Yu., Oraevsky A. N.* Space-temporal behaviour of a light pulse in nonlinear nondispersive media // *Journ. Opt. Soc. Am B*. — May 1986. — Vol. 3, No. 5. — P. 741–746.

- Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S.* Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps // *Chaos, Solitons & Fractals*. — October 2018. — Vol. 115. — P. 300–305.
- Scully M. O., Zubairy M. S.* *Quantum optics*. — Cambridge University Press, UK, 1997.
- Siegman A. E.* *Lasers*. — University Science Books, Mill Valley, US, 1986.
- Staliunas K., Weiss C. O.* Nonstationary vortex lattices in large-aperture class B lasers // *Journ. Opt. Soc. Am B*. — June 1995. — Vol. 12, No. 6. — P. 1142–1149.
- Sziklas E. A., Siegman A. E.* Mode calculations in unstable resonators with flowing saturable gain. 2: fast Fourier transform method // *Appl. Opt.* — May 1975. — Vol. 14, No. 4. — P. 1874–1890.