О. К. Шейнман, Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 54–62

Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 4, с. 54–62

УДК 517.9

Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях

© 1993. О. К. Шейнман

В работе [1] И. М. Кричевер и С. П. Новиков ввели естественное обобщение алгебр Вирасоро и Гейзенберга и аффинных алгебр Каца–Муди, связанное с компактными римановыми поверхностями с двумя отмеченными точками. Те же авторы положили начало изучению квазиградуированных модулей над алгебрами типа Вирасоро и Гейзенберга, их приложениям к квантовой теории поля [1–3]. Представления алгебр Гейзенберга рассматривались также в работе А. Джаффе, С. Климека и А. Лесневского [4].

В работе автора [5] более подробно рассмотрены аффинные алгебры Ли, связанные с эллиптическими кривыми. В частности, показано, что орбита присоединенного представления такой алгебры задается не одним, как обычно, а несколькими весами (ниже показано, что это справедливо и в случае кривых рода $g \geqslant 1$). Но тогда в силу метода орбит А. А. Кириллова и «типичные» неприводимые представления этих алгебр должны задаваться не одним, а несколькими весами. Неприводимые модули, порожденные двумя старшими векторами, и соответствующие модули Верма построены в [6].

В настоящей работе, которая представляет собой первую часть исследования орбит и представлений аффинных алгебр Ли на римановых поверхностях, изучаются орбиты присоединенного и коприсоединенного представлений и группа Вейля аффинных алгебр Ли на римановых поверхностях рода $g \geqslant 1$, введенных в [1]. Ниже мы будем называть их иногда КН-алгебрами (алгебрами Кричевера–Новикова), в отличие от КМ-алгебр (алгебр Каца–Муди). Отметим сразу характерные черты предлагаемого подхода. Первое — в случае рода $g \geqslant 1$ аффинные алгебры не имеют картановской подалгебры. Ее функции отчасти берет на себя пространство, равное прямой сумме центра и тензорного произведения картановской подалгебры соответствующей конечномерной алгебры Ли на пространство одномерных гомологий проколотой римановой поверхности (ср. [5, §3]). Второе — группа Вейля разлагается в полупрямое произведение соответствующей конечной группы Вейля и решетки $(Q^\vee)^m$, где $Q^\vee$ — решетка, порожденная дуальной системой корней, а m — ранг группы одномерных гомологий проколотой римановой поверхности. Не все известные подходы к определению группы Вейля равно применимы в случае рода $g \geqslant 1$. Мы определяем группу Вейля как группу, классифицирующую определенный ниже класс орбит, который мы считаем аналогом класса орбит полупростых элементов.

В §1 определяется рассматриваемый класс алгебр Ли и излагаются необходимые результаты из работ [1–3].

В §2 классифицируются орбиты присоединенного действия, причем используется связь задачи их классификации с проблемой Римана–Гильберта. Вводится и изучается группа Вейля.

В §3 изучается коприсоединенное представление. Указано явное описание множества представителей орбит.

В следующей публикации автор предполагает изложить конструкцию модулей старшего веса и рассмотреть формулу характеров неприводимых модулей.

В заключение отметим, что эта работа вряд ли была бы возможна без обсуждения в течение ряда лет всех связанных с ней вопросов с И. М. Кричевером. Автор также благодарен за обсуждение С. М. Натанзону и участникам семинара Э. Б. Винберга, А. Л. Онищика и В. Л. Попова в Московском университете.

§1. Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях

Пусть Γ — компактная алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$ рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$, а $\mathbb{A}^\Gamma$ — алгебра мероморфных функций на ней, голоморфных вне точек $P_\pm$. Пусть, далее, $\mathfrak{g}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра. Назовем *алгеброй токов* на Γ [1] алгебру Ли

$$T = \mathfrak{g} \otimes {}_{\mathbb{C}}\mathbb{A}^\Gamma \tag{1.1}$$

с обычной скобкой.

Зафиксируем векторное поле e на Γ с l нулями общего положения $P_1, \dots, P_l$ вне точек $P_\pm$, мероморфное на Γ и голоморфное на $\Gamma \setminus \{P_\pm\}$. Положим $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{P_\pm, P_1, .., P_l\}$, $m = 2g + l + 1$. Поле e ниже играет ту же роль, что оператор $z\partial/\partial z$ в алгебрах Каца–Муди [9].

Пусть $c_1, \dots, c_{2g}, c_{2g+1}, \dots, c_{2g+l-1}, c_+, c_-$ — базис одномерных гомологий римановой поверхности Γ^* (очевидно, что $\dim H_1(\Gamma^*, \mathbb{C}) = m$). Здесь $c_1, \dots, c_g$ — базисные a-циклы, $c_{g+1}, \dots, c_{2g}$ — базисные b-циклы, а остальные — так называемые разделяющие циклы, введенные в [1]. *Разделяющий цикл* — это цикл, гомологичный на $\Gamma \setminus \{P_\pm\}$ малой окружности, охватывающей P_+ или P_-. Циклы $c_\pm$ — это сами малые окружности, охватывающие соответственно точки $P_\pm$. Циклы $c_{2g+1}, \dots, c_{2g+l-1}$ определяются тем, что, во-первых, они — разделяющие и, во-вторых, они дополняют до базиса пространства $H_1(\Gamma^*, \mathbb{C})$ циклы $c_1, \dots, c_{2g}, c_\pm$. Пусть векторное поле e имеет в локальных координатах выражение $e = e(z)\partial/\partial z$ и $d\omega$ — это 1-форма на Γ, равная в тех же координатах $dz/E(z)$. Каждому из базисных циклов c_k $(k = 1, \dots, m)$, определенных выше (где $c_+ = c_{m-1}$, $c_- = c_m$), сопоставим коцикл γ_k и билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ на T:

$$\gamma_k(xA, yB) = \frac{(x,y)}{2\pi i} \oint_{c_k} A\,dB, \tag{1.2}$$

$$\langle xA, yB \rangle_k = \frac{(x,y)}{2\pi i} \oint_{c_k} AB\,d\omega\,. \tag{1.3}$$

Здесь $x, y \in \mathfrak{g}$, $A, B \in \mathbb{A}^\Gamma$ и (x, y) — форма Картана–Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1.1. *Аффинной алгеброй Ли на римановой поверхности* Γ^* называется центральное расширение G алгебры токов T с помощью элементов $c_1, \ldots, c_m$, причем элементу c_i отвечает коцикл γ_i $(i = 1, \ldots, m)$:

$$G = T \oplus Z,$$

где $Z = \mathbb{C}c_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}c_m$.

Присоединяя векторное поле e, расширим алгебру Ли G до линейного пространства $\widetilde{G} = G \oplus \mathbb{C}e$.

Предложение 1.1. *Коциклы $\gamma_{2g+1}, \ldots, \gamma_m$, отвечающие разделяющим циклам, равны между собой.*

Доказательство. Функции A, B в (1.2) голоморфны вне точек $P_\pm$.

Для любого из равных коциклов $\gamma_{2g+1}, \ldots, \gamma_m$ ниже будем применять обозначение γ.

Замечание 1.1. Коцикл γ, отвечающий разделяющим циклам, играет особую роль. Он обладает свойством локальности, и соответствующее центральное расширение используется в формализме операторного квантования на римановых поверхностях [1–3].

Заметим, что ниже теорию старшего веса можно излагать с использованием только этого коцикла. В этом случае набор параметров, задающих представление, сводится к l весам.

Предложение 1.2. 1°. *Подпространство $G^k = T \oplus \mathbb{C}c_k$ образует подалгебру Ли в G.*

2°. *Подалгебра G^k может быть расширена до алгебры Ли $\widetilde{G}^k = G^k \oplus \mathbb{C}e$ с помощью соотношений*

$$[e, xA] = -[xA, e] = x(eA), \qquad [e, c_k] = 0, \tag{1.4}$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathbb{A}^\Gamma$.

3°. *Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ является единственной допускающей продолжение до инвариантной симметрической билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ на $\widetilde{G}^k$, обладающей следующими свойствами*:

1) $\langle xA, c_k \rangle_k = \langle xA, e \rangle_k = 0$ *для любых $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathbb{A}^\Gamma$*;
2) $\langle c_k, e \rangle_k = 1$;
3) *ограничение формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на T представимо в виде $\langle xA, yB \rangle_k = (x, y)\langle A, B \rangle_\Gamma$, где $x, y \in \mathfrak{g}$, $A, B \in \mathbb{A}^\Gamma$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ — билинейная симметрическая форма на $\mathbb{A}^\Gamma$, обладающая такими свойствами*:
4) $\langle AB, C \rangle_\Gamma = \langle A, BC \rangle_\Gamma$ *для любых $A, B, C \in \mathbb{A}^\Gamma$*;
5) $\langle eA, c \rangle_\Gamma = -\langle A, eC \rangle_\Gamma$ *для любых $A, C \in \mathbb{A}^\Gamma$*.

Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ на $\widetilde{G}^k$ имеет вид

$$\langle xA + a_1c_k + b_1e, yB + a_2c_k + b_2e \rangle_k = a_1b_2 + a_2b_1 + \langle xA, yB \rangle_k. \tag{1.5}$$

Доказательства всех трех утверждений предложения 1.2 повторяют доказательства соответствующих предложений в эллиптическом случае [5]. В частности, утверждения 1.2.1°, 1.2.2° доказываются аналогично предложению 1.1 из [5], а доказательство 1.2.3° аналогично доказательству предложения 2.1 из [5].

В заключение параграфа, следуя [1], введем на G структуру квазиградуированной алгебры Ли.

Определение 1.2 [1]. Алгебра Ли G называется *квазиградуированной*, если она разлагается в прямую сумму подпространств G_j, занумерованных счетным множеством индексов j, причем существует такое натуральное N, что

$$[G_i, G_j] \subseteq \bigoplus_{k=i+j-N}^{i+j+N} G_k .$$

Пусть $j \in 1/2 + \mathbb{Z}$, если g нечетно, и $j \in \mathbb{Z}$, если g четно. Следуя [1], определим при $|j| > g/2$ функцию $A_j \in \mathbb{A}^\Gamma$ как единственную, с точностью до пропорциональности, функцию из этой алгебры, обладающую в точках $P_\pm$ асимптотикой

$$A_j(z_\pm) = \alpha_j^\pm z_\pm^{\pm j - g/2}(1 + O(z_\pm)), \qquad \alpha_j^+ = 1 \tag{1.6}$$

(где $z_\pm$ — локальные параметры в окрестностях точек $P_\pm$). При $|j| \leqslant g/2$, $j \neq g/2$, положим

$$A_j = \alpha_j^\pm z_\pm^{\pm j - g/2 \pm 1/2 - 1/2}(1 + O(z_\pm)), \qquad \alpha_j^+ = 1, \tag{1.7}$$

и $A_{g/2} \equiv 1$.

Предложение 1.3 [1]. *Функции A_j $(j \equiv g/2 \pmod{\mathbb{Z}})$ образуют базис в $\mathbb{A}^\Gamma$ как в линейном пространстве.*

Пусть $G_j = \widetilde{G}_j = \mathfrak{g} A_j$ для $j \neq g/2$ и $G_{g/2} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}c_m$, $\widetilde{G}_{g/2} = G_{g/2} \oplus \mathbb{C}e$.

Предложение 1.4. *Имеют место разложения*

$$G = \bigoplus_{j \equiv g/2 \pmod{\mathbb{Z}}} G_j , \qquad \widetilde{G} = \bigoplus_{j \equiv g/2 \pmod{\mathbb{Z}}} \widetilde{G}_j .$$

Эти разложения задают на G и $\widetilde{G}^k$ соответственно структуру квазиградуированных алгебр Ли.

Доказательство вытекает из формул умножения для функций A_j [1, § 3].

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{A}_\pm^\Gamma \subset \mathbb{A}^\Gamma$ — подалгебры функций из $\mathbb{A}^\Gamma$, имеющих нули соответственно в точках $P_\pm$. Очевидно, что базис в $\mathbb{A}_+^\Gamma$ образуют функции A_j с $j > g/2$, а базис в $\mathbb{A}_-^\Gamma$ — функции A_j с $j < -g/2$. Обозначим также через $\mathbb{A}_0^\Gamma$ подпространство в $\mathbb{A}^\Gamma$, натянутое на $\{A_j : |j| \leqslant g/2\}$. Положим $G_\pm = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{A}_\pm^\Gamma$, $G_0 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{A}_0^\Gamma$.

Предложение 1.5. 1°. $\mathbb{A}^\Gamma = \mathbb{A}_+^\Gamma \oplus \mathbb{A}_0^\Gamma \oplus \mathbb{A}_-^\Gamma$.

2°. $T = G_+ \oplus G_0 \oplus G_-$.

Доказательство вытекает из определений. Разложение 1.5.1° введено в [1].

§2. Орбиты и группа Вейля

В данном параграфе мы изучаем орбиты присоединенного действия группы токов на алгебре Ли G. Исследование орбит является ключевым как для определения группы Вейля алгебры Ли G, так и для понимания в дальнейшем ее теории представлений. Для классификации орбит мы развиваем подход Френкеля [7] и Сигала [8], связавших орбиты алгебр Каца–Муди с группами монодромии некоторых дифференциальных уравнений. Поскольку мы рассматриваем алгебры токов на римановых поверхностях, при восстановлении орбиты по ее группе монодромии используется аппарат проблемы Римана–Гильберта.

Определение 2.1. *Групповым током* (*током в группе* $\exp\mathfrak{g}$) называется отображение $g\colon \Gamma\to\exp\mathfrak{g}$, голоморфное всюду, за исключением, быть может, точек $P_\pm$ и нулей $P_1,\dots,P_l$ векторного поля e.

Групповые токи образуют группу T_G. Очевидно, что T_G содержит все функции вида $\exp X$, $X\in T$.

Пусть $g\in T_G$. Определим оператор присоединенного действия $\operatorname{Ad} g\in GL(\widetilde{G})$. Элементы пространства $\widetilde{G}$ будем записывать в виде a_kc_k+be+X, где $X\in T$, $b,a_k\in\mathbb{C}$ $(k=1,\dots,m)$ (по повторяющемуся индексу k здесь и ниже в §2 происходит суммирование).

Определение 2.2. $(\operatorname{Ad} g)(a_kc_k+be+X)=a_kc_k+be+gXg^{-1}-b(eg)g^{-1}+(\langle g^{-1}(eg),X\rangle_k-\frac{1}{2}b\langle(eg)g^{-1},(eg)g^{-1}\rangle_k)c_k$. Здесь eg — стандартное действие векторного поля на функцию. Мотивировка определения 2.2 следует из теоремы 3.1.5 статьи [7], где аналогичная формула для $\operatorname{Ad} g$ является следствием определения $\operatorname{Ad}\exp X=\exp\operatorname{ad}X$. Заметим, что поскольку мы не наложили на g условий в особых точках, $\widetilde{G}$, вообще говоря, не инвариантно относительно $\operatorname{Ad} g$.

Определение 2.3. *Орбитой элемента* $\widetilde{X}=a_kc_k+be+X\in\widetilde{G}$ (обозначается $\Omega_{\widetilde{X}}$) называется множество $\{(\operatorname{Ad} g)\widetilde{X}\mid g\in T_G\}$.

Элементу $\widetilde{X}=a_kc_k+be+X\in\widetilde{G}$ сопоставим следующее уравнение монодромии на кривой Γ:

$$b(eu)=uX\,. \tag{2.1}$$

Выберем на Γ произвольную точку $P_0\neq P_\pm,P_1,\dots,P_l$. Точка P_0 является регулярной точкой тока X; поэтому мы можем рассматривать росток решения уравнения (2.1) с начальным условием $u(P_0)=I$ (I — единица группы $\exp\mathfrak{g}$). Назовем это решение *фундаментальным*. Рассмотрим любой замкнутый контур $P=P(\tau)$ на Γ^*, имеющий начало и конец в точке P_0, и аналитическое продолжение решения $u=u(P)$ вдоль этого контура. В результате в окрестности P_0 мы получим решение того же уравнения с другим начальным условием

$$u_1(P_0)=g_{P(\tau)},\quad \text{где } g_{P(\tau)}\in\exp\mathfrak{g}\,.$$

Определение 2.4. Элемент $g_{P(\tau)}\in\exp\mathfrak{g}$ называется *оператором монодромии уравнения* (2.1) *вдоль контура* $P=P(\tau)$.

Определение 2.5. Подгруппа группы $\exp\mathfrak{g}$, порожденная операторами монодромии всех замкнутых контуров с отмеченной точкой P_0 на кривой Γ^*, называется *группой монодромии уравнения* (2.1) (*тока* X, *элемента* $\widetilde{X}$) на Γ^* и обозначается G_X (или $G_{\widetilde{X}}$).

Из общей теории уравнения монодромии известно, что оператор монодромии зависит лишь от гомотопического класса контура $P=P(\tau)$ на Γ^*. Группа монодромии, как легко показать, является конечно порожденной группой с образующими M_{a_k}, M_{b_k} $(k=1,\dots,g)$, $M_1,\dots,M_l, M_{\pm}$ и соотношением

$$\prod_{k=1}^{g}(M_{a_k}M_{b_k}M_{a_k}^{-1}M_{b_k}^{-1}) = M_+M_-M_1\dots M_l, \tag{2.2}$$

где M_{a_k}, M_{b_k} $(k=1,\dots,g)$ — операторы монодромии вдоль базисных a- и b-циклов, а $M_{\pm}, M_1,\dots,M_l$ — соответственно вдоль контуров $c_{\pm}, c_1,\dots,c_l$. По очевидным гомотопическим соображениям порядок сомножителей в правой части (2.2) несуществен, т.е. операторы $M_{\pm}, M_1,\dots,M_l$ попарно коммутируют. В левой части произведение берется в порядке расположения базисных циклов на границе фундаментального многоугольника.

Следующая теорема 2.1 позволяет задать орбиту присоединенного действия конечным числом параметров и является обобщением теоремы 3.2.10(ii) из [7] и теоремы 4.1 из [5]. Предварительно заметим, что для элемента $\widetilde{X}=a_kc_k+be+X\in\widetilde{G}$ выражения $\langle\widetilde{X},\widetilde{X}\rangle_k = 2a_kb+\langle X,X\rangle_k$ для всех $k=1,\dots,m$ и значение b являются инвариантами присоединенного действия. Это следует из инвариантности форм $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ и определения 2.2. Пусть $\widetilde{X}=a_k^{(1)}c_k+b^{(1)}e+X$, $\widetilde{Y}=a_k^{(2)}c_k+b^{(2)}e+Y\in\widetilde{G}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $b^{(1)}, b^{(2)}\neq 0$. *Элементы* $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\widetilde{G}$ *тогда и только тогда принадлежат одной орбите, когда их группы монодромии* $G_{\widetilde{X}}$ *и* $G_{\widetilde{Y}}$ *сопряжены в группе* $\exp\mathfrak{g}$ *и выполнены соотношения* $b^{(1)}=b^{(2)}$ *и*

$$2a_k^{(1)}b^{(1)}+\langle X,X\rangle_k = 2a_k^{(2)}b^{(2)}+\langle Y,Y\rangle_k \qquad (k=1,\dots,m). \tag{2.3}$$

Мы не приводим здесь доказательства теоремы 2.1, так как оно дословно повторяет доказательство теоремы 4.1 из [5], данное в эллиптическом случае.

Чтобы закончить классификацию орбит, мы должны решить обратную задачу: показать, что для каждого набора данных, состоящего из конечно порожденной группы $M\subseteq\exp\mathfrak{g}$, удовлетворяющей соотношению (2.2), и комплексных чисел $\zeta_1,\dots,\zeta_m$, $b\neq 0$, можно построить элемент $\widetilde{X}=a_kc_k+be+X\in\widetilde{G}$, такой, что $G_{\widetilde{X}}=M$, а $\langle\widetilde{X},\widetilde{X}\rangle_k=\zeta_k$ $(k=1,\dots,m)$. Разумеется, построение тока X по группе монодромии представляет собой один из случаев проблемы Римана–Гильберта. Мы не будем здесь проводить это построение в полной общности. Вместо этого выделим класс орбит, аналогичных орбитам полупростых элементов, и проведем построение для них.

Определение 2.6. Назовем орбиту *главной*, если ее группа монодромии коммутативна.

Пусть $T_H\subset T_G$ — подгруппа токов, принимающих значения в группе $\exp\mathfrak{h}$: $T_H=\{h\colon\Gamma\to\exp\mathfrak{h}\mid h\in T_G\}$. В силу теоремы 2.1 группа монодромии орбиты определена с точностью до сопряжения. Поэтому без ограничения общности можно считать, что группа монодромии главной орбиты является подгруппой группы T_H.

Теорема 2.2. *Для любой конечно порожденной подгруппы M группы T_H, образующие которой удовлетворяют соотношению* (2.2), *и любого набора комплексных чисел $b \neq 0$, $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ существует такой элемент $\widetilde{H} = a_k c_k + be + H$ $(h \in \mathfrak{h} \otimes \mathbb{A}^\Gamma)$, что $G_H = M$ и $\langle \widetilde{H}, \widetilde{H} \rangle_k = \zeta_k$ $(k = 1, \dots, m)$.*

Доказательство. Группа $\exp \mathfrak{g}$ имеет точное линейное представление, при котором $\exp \mathfrak{h}$ изображается диагональными матрицами. Поэтому если $M \subset T_H$, то задача построения тока по заданной группе монодромии распадается на одномерные и всегда имеет решение (см., например, [10]). Итак, существование тока $H \in \mathfrak{h} \otimes \mathbb{A}^\Gamma$ с заданной группой монодромии будем считать доказанным.

Условия $\langle \widetilde{H}, \widetilde{H} \rangle_k = \zeta_k$ $(k = 1, \dots, m)$, как и выше, сводятся к набору соотношений $2a_k b + \langle H, H \rangle_k = \zeta_k$ $(k = 1, \dots, m)$, из которых при известных H и $b \neq 0$ могут быть найдены $a_1, \dots, a_m$. Теорема доказана.

Перейдем к определению группы Вейля алгебры Ли G. Положим

$$\mathfrak{h}^m = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathfrak{h}_k. \tag{2.4}$$

Очевидно, что $\mathfrak{h}^m \cong H_1(\Gamma^*, \mathfrak{h})$, где $H_1(\Gamma^*, \mathfrak{h})$ — пространство одномерных гомологий «проколотой» римановой поверхности Γ^* с коэффициентами в $\mathfrak{h}$.

Рассмотрим аффинную группу Вейля $W_a = \overline{W} Q^\vee$, где $\overline{W}$ — (конечная) группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $Q^\vee \subset \mathfrak{h}$ — решетка, порожденная дуальной системой корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Из определения следует, что любой элемент $w_a \in W_a$ однозначно представим в виде

$$w_a = \overline{w} q, \qquad \overline{w} \in \overline{W}, \ q \in Q^\vee. \tag{2.5}$$

Назовем $\overline{w}$ *конечной частью* элемента w_a.

Пусть W_a^m — прямое произведение m экземпляров группы W_a, естественно действующее в $\mathfrak{h}^m$.

Определение 2.7. *Группой Вейля алгебры Ли G* называется подгруппа $W \subset W_a^m$, состоящая из таких элементов $(w_a^{(1)}, \dots, w_a^{(m)})$, что $w_a^{(k)}$ $(k = 1, \dots, m)$ имеют одну и ту же конечную часть.

Следствие 2.1. $W \cong \overline{W} (Q^\vee)^m$.

Рассмотрим ограничение присоединенного представления группы токов на алгебру токов T. У этого ограничения мы также можем рассматривать главные орбиты.

Теорема 2.3. *Пространство главных орбит присоединенного представления на алгебре токов T находится во взаимно однозначном соответствии с факторпространством $\mathfrak{h}^m / W$.*

Доказательство. Построим (многозначное) отображение пространства главных орбит на $\mathfrak{h}^m$. Для этого заметим, что орбита ограничения присоединенного действия на алгебру токов T задается только своей группой монодромии (это следует из доказательства теоремы 4.1 статьи [5]). Поскольку группа монодромии коммутативна и задана с точностью до сопряжения, можно считать, что она является подгруппой группы $\exp\mathfrak{h}$. Пусть $h_1, \dots, h_m$ — набор образующих группы монодромии. Сопоставим орбите набор

$$(2\pi i)^{-1}(\ln h_1, \dots, \ln h_m) \in \mathfrak{h}^m.$$

Этот набор определен не однозначно, а с точностью до сдвига на элементы решетки $(Q^\vee)^m$. Сам набор $h_1, \dots, h_m$ задан с точностью до сопряжения общим элементом g_0, что при ограничении на картановскую подгруппу $\exp\mathfrak{h}$ сводится к действию на $h_1, \dots, h_m$ элемента конечной группы Вейля $\overline{W}$. Таким образом мы сопоставили, и притом взаимно однозначно, орбите присоединенного действия в T орбиту группы W в $\mathfrak{h}^m$. Это доказывает теорему.

Заметим, что если рассмотренное в доказательстве теоремы 2.3 отображение записать в терминах тока, задающего орбиту, оно будет выглядеть следующим образом (с точностью до сдвигов на элементы решетки $(Q^\vee)^m$):

$$H \to \left(\dots, \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} H d\omega, \dots \right), \tag{2.6}$$

где $H = H(P)$ — ток со значениями в подалгебре $\mathfrak{h}$, а 1-форма $d\omega$ определена выше (§1). Справедливость (2.6) вытекает из того, что в коммутативном случае для уравнения $E(z)\,u'(z) = u(z)\,H(z)$ оператор монодромии в точности имеет вид

$$h_k = \exp \oint_{c_k} H d\omega\,. \tag{2.7}$$

§3. Орбиты коприсоединенного представления

Рассмотрим теперь коприсоединенное представление группы токов T_G. Возьмем $\Omega = \mathfrak{g}^* \otimes {}_{\mathbb{C}}\Omega^\Gamma$ в качестве пространства этого представления, где Ω^Γ — это пространство мероморфных дифференциалов на Γ, регулярных вне точек $P_\pm$, а двойственность определена билинейной формой

$$\langle xA, \lambda\omega_\Gamma \rangle = \frac{(x, \lambda)}{2\pi i} \oint_{c_0} A\omega_\Gamma, \tag{3.1}$$

где $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $\omega_\Gamma \in \Omega^\Gamma$ и $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ — естественная билинейная форма на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. Действие группы токов определим формулой $(\operatorname{Ad} g)^*\omega = g\omega g^{-1} - (dg)\,g^{-1}$, где $\omega \in \Omega$. Сопоставим произвольному $\omega \in \Omega$ уравнение монодромии на Γ^*

$$du = u\omega\,. \tag{3.2}$$

Справедлив следующий аналог теоремы 2.1, который мы сформулируем без доказательства.

Теорема 3.1. *Два элемента $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ принадлежат одной орбите тогда и только тогда, когда их группы монодромии сопряжены в группе* $\exp\mathfrak{g}$.

Мы будем рассматривать здесь только главные орбиты, т.е. орбиты с коммутативными группами монодромии. Это означает, что $\omega \in \Omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^* \otimes {}_{\mathbb{C}}\Omega^\Gamma$. Опишем пространство главных орбит коприсоединенного представления. Пусть Ω^Γ_{2g+1} есть $(2g+1)$-мерное подпространство в Ω^Γ, содержащее голоморфные дифференциалы, g нормированных дифференциалов второго рода с полюсами порядков $1, \dots, g$ в точке P_+ и нормированный дифференциал третьего рода с простыми полюсами в точках $P_\pm$. Очевидно, что каждый элемент пространства Ω^Γ_{2g+1} определяется своими периодами по базисным циклам $c_0, c_1, \dots, c_{2g}$. Пусть $\Omega_{2g+1} = \mathfrak{h}^* \otimes \Omega^\Gamma_{2g+1}$. Определим на пространстве Ω_{2g+1} действие группы Вейля $W = \overline{W}(Q^\vee)^{2g+1}$, действуя ее компонентами на периоды дифференциалов из этого пространства.

Теорема 3.2. *Пространство главных орбит коприсоединенного действия находится во взаимно однозначном соответствии с факторпространством* Ω_{2g+1}/W.

Доказательство. Орбита любого элемента $\omega \in \Omega$ по теореме 3.1 определяется его $2g+1$ периодами по базисным циклам $c_0, c_1, \dots, c_{2g}$. Однако для любого набора $2g+1$ периодов в пространстве Ω_{2g+1} найдется единственный дифференциал с тем же набором периодов. Следовательно, любая главная орбита имеет непустое пересечение с Ω_{2g+1}. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству теоремы 2.3.

Отметим, что теорема 3.2 дает нам возможность отождествить в рассматриваемом случае веса алгебры Ли G с элементами $(2g+1)$-мерного (над $\mathfrak{h}^*$) пространства дифференциалов, фигурирующего в условии этой теоремы.

Литература

1. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функц. анализ и его прил. – 1987. – Т. 21, вып. 2. – С. 46–63.
2. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского // Функц. анализ и его прил. – 1987. – Т. 21, вып. 4. – С. 47–61.
3. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии–импульса и операторные разложения на римановых поверхностях // Функц. анализ и его прил. – 1989. – Т. 23, вып. 1. – С. 24–40.
4. *Jaffe A., Klimek S., Lesniewsky A.* Representations of the Heisenberg Algebra on a Riemann Surface. – Harvard University Preprint HUTMP 89/B293, 1989.
5. *Шейнман О. К.* Эллиптические аффинные алгебры Ли // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24, вып. 3. – С. 51–61.
6. *Шейнман О. К.* Модули старшего веса некоторых квазиградуированных алгебр Ли на эллиптических кривых // Функц. анализ и его прил. – 1992. – Т. 26, вып. 3. – С. 65–71.
7. *Frenkel I. B.* Orbital Theory of affine Lie algebras // Invent. Math. – 1984. – V. 77, No. 2. – P. 301–352.
8. *Segal G.* Unitary representations of some infinite-dimensional groups // Comm. Math. Phys. – 1981. – V. 80, No. 3. – P. 301–342.
9. *Kač V. G., Peterson D. H.* Affine Lie algebras and Hecke modular Forms // Bull. Amer. Math. Soc. – 1980. – V. 3, No. 3. – P. 1057–1061.
10. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // УМН. – 1971. – Т. 26, вып. 1. – С. 113–180.

Государственный энергетический
институт им. Г. М. Кржижановского

Поступило в редакцию
1 апреля 1992 г.