

УДК 519.49

Эллиптические модули

В. Г. Дринфельд (Москва)

Введение

А) **Постановка задачи и основной результат.** Пусть k — глобальное поле, ∞ — точка k , d — натуральное число, k_∞ — пополнение k по ∞ .

Определение. Тройка (k, ∞, d) называется допустимой, если а) все точки k , кроме, быть может, ∞ , неархимедовы, б) $d \leq [\bar{k}_\infty : k_\infty]$.

Допустимые тройки бывают следующих типов:

- 1) $k = \mathbf{Q}$, ∞ — архимедово нормирование, $d = 1$;
- 2) $k = \mathbf{Q}$, ∞ — архимедово нормирование, $d = 2$;
- 3) k — мнимое квадратичное расширение \mathbf{Q} , ∞ — архимедово нормирование, $d = 1$.
- 4) k — функциональное поле, ∞ и d — любые.

Цель работы — обобщение трех классических теорем (связанных с первыми тремя типами допустимых троек): 1) теоремы Кронекера — Вебера, 2) теоремы Эйхлера — Шимуры о ζ -функциях модулярных кривых, 3) основной теоремы комплексного умножения. Это обобщение связано с четвертым типом допустимых троек.

Пусть (k, ∞, d) — допустимая тройка. Введем следующие обозначения: A — кольцо элементов k , целых во всех точках, кроме ∞ ; \mathfrak{A} — кольцо аделей k ; \mathfrak{A}_∞ — кольцо аделей без ∞ -компоненты. Сформулируем классические теоремы 1)–3) в виде, удобном для обобщения. Предварительно введем необходимые определения.

Пусть (k, ∞, d) — допустимая тройка типов 1)–3), K — поле над A (т. е. задан гомоморфизм $i : A \rightarrow K$).

Определение. Эллиптическим A -модулем ранга d над K называется: в случае 1) одномерный тор над K ; в случае 2) эллиптическая кривая над K ; в случае 3) эллиптическая кривая X над K вместе с гомоморфизмом $\varphi : A \rightarrow \text{End } X$ таким, что $i = D \circ \varphi$, где $D : \text{End } X \rightarrow K$ — дифференциал.

Аналогичным образом вводится понятие эллиптического A -модуля ранга d над S , где S — схема над A .

Определение. Пусть S — схема над k , $I \subset A$ — ненулевой идеал, X — эллиптический A -модуль ранга d над S . Структурой уровня I на X называется изоморфизм (A -модулей над S) $(I^{-1}/I)^d \times S \xrightarrow{\sim} X_I$, где $X_I \subset X$ — аннулятор I .

Если I достаточно мал, то функтор, сопоставляющий схеме S над k множество классов изоморфизма эллиптических A -модулей ранга d

над S со структурой уровня I , представим гладким $(d-1)$ -мерным многообразием N_I . Положим $N = \varprojlim N_I$. На N можно естественным образом определить действие группы $GL(d, \mathfrak{A}_f)$.

Теорема 1. Пусть (k, ∞, d) — тройка типа 1) или 3). Тогда N — спектр максимального абелева расширения k , вполне распадающегося над ∞ . Действие \mathfrak{A}_f^* совпадает с действием теории полей классов.

Теорема 2. Пусть (k, ∞, d) — тройка типа 2), \bar{N} — гладкая компактификация N , l — простое число. Тогда $H^1(\bar{N}, \bar{\mathbf{Q}}_l) \simeq \bigoplus_i U_i \otimes W_i$, где U_i — неприводимые представления $GL(2, \mathfrak{A}_f)$ над $\bar{\mathbf{Q}}_l$, а W_i — представление $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ в пространстве \mathbf{Q}_l^2 . Пусть $U_i = \otimes U_i^p$, где U_i^p — неприводимое представление $GL(2, \mathbf{Q}_p)$, W_i^p — ограничение W_i^p на $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

1) Если $p \neq l$, а U_i^p — представление класса 1 (см. [1]), то W_i^p неразветвлено и $L(s, W_i^p) = L\left(s - \frac{1}{2}, \hat{U}_i^p\right)$ (здесь \hat{U}_i^p — представление, контраградиентное к U_i^p , а L -функции понимаются в смысле Серра и Жакс—Ленглендса).

2) $\bigoplus_i U_i \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}} \mathbf{C} \simeq \text{Hom}_{GL(2, \mathbf{R})}(\Pi, A_0)$, где Π — представление $GL(2, \mathbf{R})$ в пространстве функций на $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$, профакторизованном по константам, а A_0 — пространство параболических форм на $GL(2, \mathfrak{A})$ в смысле [10].

В работе вводится понятие эллиптического модуля для троек типа 4), строятся модулярные многообразия и при $d=1, 2$ доказываются аналоги теорем 1—2.

Б) План работы. Понятие эллиптического модуля вводится в § 2. В § 3 доказывается аналитическая теорема об униформизации эллиптического модуля над \bar{k}_∞ с помощью решетки в \bar{k}_∞ . В § 5 строится универсальное семейство эллиптических A -модулей ранга d . Доказательство гладкости модулярных многообразий использует свойства формальных модулей (см. §§ 1, 4) (формальный модуль — это аналог формальной группы). В § 5 доказывается также конгруэнц-соотношение в форме [14]. В § 6 те же самые модулярные многообразия строятся аналитически (как фактор некоторой области Ω^d по дискретной группе). Область Ω^d тесно связана с комплексом Брюа—Титса группы $GL(d, k_\infty)$. В § 7 изучаются эллиптические модули над полными дискретно нормированными полями. В § 8 доказывается аналог теоремы 1. В § 9 строится компактификация модулярных поверхностей (в случае $d=2$); при этом используются результаты § 7. В §§ 10—11 доказывается аналог теоремы 2. Статья написана под влиянием работы [14] и бесед с И. И. Пятецким—Шапиро. Однако модулярные многообразия строятся алгебраически (так же, как в [6]). Аналитическое описание модулярных многообразий опирается на идеи работы [3] (хотя конгруэнц-подгруппы $GL(2, A)$ не являются группами Шоттки).

Автор приносит глубокую благодарность Ю. И. Манину и И. И. Пятецкому—Шапиро за внимание к работе и ценные замечания.

§ 1. Формальные модули

А) **Определения и обозначения.** Формальная группа над кольцом B — это, по определению, формальный ряд $F \in B[[x, y]]$ такой, что $F(x, y) = F(y, x)$, $F(x, 0) = x$, $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$. Гомоморфизм из формальной группы F в формальную группу G — это ряд $\beta \in B[[x]]$ такой, что $\beta(F(x, y)) = G(\beta(x), \beta(y))$. Для любой формальной группы F над B имеется канонический гомоморфизм $D: \text{End } F \rightarrow B$, сопоставляющий эндоморфизму φ число $\varphi'(0)$.

Пример. $F(x, y) = x + y$; такая группа называется аддитивной.

Пусть B имеет характеристику p . Всякий эндоморфизм аддитивной группы над B задается рядом $\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{p^i}$. В дальнейшем мы будем отождествлять элемент $b \in B$ с эндоморфизмом умножения на b ; эндоморфизм Фробениуса (соответствующий ряду x^p) мы будем обозначать через τ . Таким образом, кольцо эндоморфизмов аддитивной группы состоит из «рядов» $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \tau^i$ с правилом коммутирования $\tau b = b^p \tau$. Обозначим это кольцо через $B\{\{\tau\}\}$.

Пусть O — кольцо, B — алгебра над O , $\gamma: O \rightarrow B$ — естественный гомоморфизм.

Определение. Формальным O -модулем над B называется пара (F, f) , где F — формальная группа над B , а f — гомоморфизм из O в $\text{End } F$ такой, что $D \circ f = \gamma$.

Пример. $F(x, y) = x + y$, $f_a(x) = ax$ при $a \in O$ (мы пишем f_a вместо $f(a)$). Такой модуль называется аддитивным.

Ростком формального O -модуля над $B \text{ mod } \deg n$ называется пара (F, f) , где $F \in B[[x, y]]/(x, y)^n$, $f_a \in B[[x]]/(x^n)$, все соотношения между F и f , входящие в определение формального модуля, выполнены $\text{mod } \deg n$.

Рассмотрим следующий функтор из категории O -алгебр в категорию множеств: $B \rightarrow$ множество формальных O -модулей над B . Этот функтор, очевидно, представим некоторой алгеброй Λ_0 . (Образующие Λ_0 — это «неопределенные коэффициенты» рядов F и f_a , а соотношения между ними такие, чтобы (F, f) был формальным O -модулем).

Λ_0 имеет естественную градуировку. Легко проверить, что множество ростков формальных O -модулей над $B \text{ mod } \deg(n+1)$ канонически изоморфно множеству гомоморфизмов O -модулей $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \Lambda_0^k \xrightarrow{\psi} B$ таких, что $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$ при $\deg a + \deg b < n$ и $\psi(1) = 1$. Элементы вида ab , где $a \in \Lambda_0$, $b \in \Lambda_0$, $\deg a > 1$, $\deg b > 1$, порождают однородный идеал. Фактор Λ_0 по этому идеалу обозначим через $\tilde{\Lambda}_0$.

Предложение 1.1. Пусть $n \geq 2$. Тогда $\tilde{\Lambda}_0^{n-1}$ (как O -модуль) может быть задан образующими α и $h(a)$ (для всех $a \in O$) и соотношениями

$$\alpha(a^n - a) = \begin{cases} h(a), & \text{если } n \text{ — не степень простого числа,} \\ h(a) \circ p, & \text{если } n = p^k, \end{cases} \quad (1)$$

$$h(a + b) - h(a) - h(b) = \alpha C_n(a, b), \tag{2}$$

$$ah(b) + b^n h(a) = h(a, b). \tag{3}$$

(Здесь $C_n(x, y) = (x + y)^n - x^n - y^n$, если n не является степенью простого числа; $C_n(x, y) = \frac{(x + y)^n - x^n - y^n}{p}$, если $n = p^k$).

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\Lambda}_0^{n-1}$ можно задать образующими $h(a)$ и c_i ($0 < i < n$) с соотношениями

$$\begin{aligned} a(x + y + \Phi(x, y)) + h(a)(x + y)^n &= ax + ay + h(a)x^n + h(a)y^n + \Phi(ax, ay), \\ ax + h(a)x^n + bx + h(b)x^n + \Phi(ax, bx) &= (a + b)x + h(a + b)x^n, \end{aligned}$$

$$abx + h(ab)x^n = a(bx + h(b)x^n) + h(a)(bx)^n,$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x), \quad \Phi(y, z) + \Phi(x, y + z) = \Phi(x, y) + \Phi(x + y, z)$$

(где $\Phi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} c_i x^i y^{n-i}$). Хорошо известно, что из последних двух соотношений следует, что $\Phi(x, y) = \alpha C_n(x, y)$ (см. [7]). ■

Б) Случай, когда O — поле.

Предложение 1.2. 1) Если O — поле, то всякий формальный O -модуль изоморфен аддитивному модулю.

2) Если O бесконечно, то существует единственный изоморфизм с аддитивным модулем, производная которого в нуле равняется 1. В этом случае $\Lambda_0 \simeq O[c_1, c_2, \dots]$, где $\deg c_i = i$.

Доказательство. Случай характеристики нуль хорошо известен (см. [7]). Пусть $\text{char } O = p$, B — алгебра над O , (F, f) — формальный O -модуль над B . Тогда умножение на p в F нулево; поэтому (см. [7]) F изоморфна аддитивной группе. Можно считать, что F аддитивна. Пусть $f: O \rightarrow B\{\{\tau\}\}$ имеет вид $f(a) \equiv a + \varphi(a)\tau^k \pmod{\tau^{k+1}}$. Докажем, что существует $s \in B$ такой, что $(1 + s\tau^k)f(a)(1 + s\tau^k)^{-1} \equiv a \pmod{\tau^{k+1}}$ для всех $a \in O$. Действительно, так как f — гомоморфизм, то $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(a \circ b) = a\varphi(b) + b^{p^k}\varphi(a)$, откуда $(b^{p^k} - b)\varphi(a) = (a^{p^k} - a)\varphi(b)$. Если $O \not\subset \mathbf{F}_{p^k}$, то существование и единственность s очевидна ($s = -\frac{\varphi(a)}{a^{p^k} - a}$, где $a \in O, a \notin \mathbf{F}_{p^k}$). Если же

$O \subset \mathbf{F}_{p^k}$, то φ — дифференцирование; поэтому $\varphi = 0$. ■

В) Вычисление Λ_0 , где O — кольцо целых чисел локального неархимедова поля. Начиная с этого места, O — кольцо целых чисел локального неархимедова поля K , π — простой элемент O , p — характеристика $O/(\pi)$, q — порядок $O/(\pi)$.

Предложение 1.3. $\tilde{\Lambda}_0^{n-1} \simeq O$. Точнее,

1) если n не является степенью q , то $h(a) = (a^n - a)u$, $\alpha C_n(x, y) = u[(x + y)^n - x^n - y^n]$, где u — образующая $\tilde{\Lambda}_0^{n-1}$;

2) если $n = q^k$, то $h(a) = \frac{a^n - a}{\pi}u$, $\alpha = \frac{p}{\pi}u$, где u — образующая $\tilde{\Lambda}_0^{n-1}$.

Доказательство. 1) Если n не является степенью p , то $h(a)$ с помощью соотношения (1) выражается через α . Если n — степень p , но

не степень q , то существует $a \in O$ такое, что $a^n - a \notin (\pi)$; из (3) следует, что $(a^n - a)h(b) = (b^n - b)h(a)$; из (2) находится α .

2) Пусть n — степень q . Существует эпиморфизм $\tilde{\Lambda}_O^{n-1} \rightarrow O$, переводящий $h(a)$ в $\frac{a^n - a}{\pi}$, $\alpha \mapsto \frac{p}{\pi}$. Остается доказать, что $\tilde{\Lambda}_O^{n-1}$ порождается $h(\pi)$. Пусть $M = \tilde{\Lambda}_O^{n-1} / \{h(\pi)\}$. Если $x \in \tilde{\Lambda}_O^{n-1}$, то обозначим через \bar{x} его образ в M . Так как $\overline{h(\pi b)} = \pi \overline{h(b)} = \pi^n \overline{h(b)}$, то $\bar{h}(\pi b) = 0$ для любого $b \in O$. В частности, $\bar{h}(p) = 0$. Но $h(p) = (p^{n-1} - 1)\alpha$, поэтому $\bar{\alpha} = 0$. Итак, M является $O/(\pi)$ -модулем, а $\bar{h}: O/(\pi) \rightarrow M$ — дифференцирование, поэтому $\bar{h} = 0$, т. е. $M = 0$. ■

Предложение 1.4. $\Lambda_O \simeq O[g_1, g_2, \dots]$, $\deg g_i = i$.

Доказательство. Из предложения 1.3 следует, что существует эпиморфизм $O[g_1, g_2, \dots] \rightarrow \Lambda_O$, согласованный с градуировкой. Из предложения 1.2 вытекает, что $\Lambda_O \otimes K \simeq K[c_1, c_2, \dots]$, $\deg c_i = i$. Поэтому построенный эпиморфизм является изоморфизмом. ■

Следствие. 1) *Всякий росток формального O -модуля поднимается до формального O -модуля.*

2) *Если $B \rightarrow C$ — эпиморфизм O -алгебр, то всякий формальный O -модуль над C поднимается до формального O -модуля над B .*

Предложение 1.5. 1) Пусть (F, f) и (G, g) — формальные O -модули над B , причем $(F, f) \equiv (G, g) \pmod{\deg n}$. Тогда

а) если n не является степенью q , то

$$F(x, y) \equiv G(x, y) + v[(x+y)^n - x^n - y^n] \pmod{\deg(n+1)},$$

$$f_a(x) \equiv g_a(x) + v(a^n - a)x^n \pmod{\deg(n+1)}, \quad v \in B;$$

б) если n — степень q , то

$$F(x, y) \equiv G(x, y) + h \frac{p}{\pi} C_n(x, y) \pmod{\deg(n+1)},$$

$$f_a(x) \equiv g_a(x) + h \frac{a^n - a}{\pi} x^n \pmod{\deg(n+1)}, \quad h \in B.$$

2) Пусть

$$\varphi \in B[[x]], \quad \varphi(x) \equiv x - vx^n \pmod{\deg(n+1)},$$

$$G(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(F(x, y)), \quad g_a(\varphi(x)) = \varphi(f_a(x)).$$

Тогда

$$F(x, y) \equiv G(x, y) + v[(x+y)^n - x^n - y^n] \pmod{\deg(n+1)},$$

$$f_a(x) \equiv g_a(x) + v(a^n - a)x^n \pmod{\deg(n+1)}.$$

Доказательство. Утверждение 1) является переформулировкой предложения 1.3, а утверждение 2) проверяется непосредственно. ■

Следствие. *Формальный O -модуль (F, f) изоморфен аддитивному модулю тогда и только тогда, когда коэффициенты f_π делятся на π .*

Г) **Классификация формальных O -модулей над полями «конечной характеристики».** Гомоморфизмом формальных O -модулей называется гомоморфизм формальных групп, коммутирующий с действием O .

Пусть E — поле над $O/(\pi)$, φ — гомоморфизм формальных O -модулей над E . Как известно [7], если $\varphi \neq 0$, то $\varphi(x) = \psi(x^{p^k})$, $\psi'(0) \neq 0$. Так как φ коммутирует с действием O , то $\log_p q \mid k$. Число $k/\log_p q$ назовем высотой φ ; высотой нулевого гомоморфизма будем считать ∞ . Высотой формального O -модуля назовем высоту эндоморфизма умножения на π .

З а м е ч а н и е. Если O' — целое замыкание O в конечном расширении K , $n = [O' : O]$, то всякий формальный O' -модуль является также O -модулем и его O -высота в n раз больше O' -высоты.

Предложение 1.6. 1) *Существуют модули любой высоты.*

2) *Ненулевые гомоморфизмы существуют только между модулями одинаковой высоты.*

3) *Формальный O -модуль высоты h изоморфен аддитивному модулю $\text{mod deg } q^h$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим гомоморфизм $\lambda: \Lambda_O \simeq O[g_1, g_2, \dots] \rightarrow E$ такой, что $\lambda(g_{q^h-1}) \neq 0$, $\lambda(g_i) = 0$ при $i < q^h - 1$. Ему отвечает формальный O -модуль над E высоты h .

2) Следует из того, что высота композиции гомоморфизмов равна сумме высот.

3) Следует из предложения 1.5. ■

Предложение 1.7. 1) *Все формальные O -модули высоты $h < \infty$ над сепарабельно замкнутым полем E изоморфны между собой.*

2) *Кольцо эндоморфизмов такого модуля изоморфно кольцу целых чисел центрального тела над K с инвариантом $1/h$.*

Доказательство. Назовем формальный O -модуль (F, f) нормальным, если выполнены следующие условия:

1) $f_\pi(x) = x^{q^h}$,

2) $F \in \mathbf{F}_{q^h}[[x, y]]$, $f_a \in \mathbf{F}_{q^h}[[x]]$ при $a \in O$,

3) $F(x, y) \equiv x + y \text{ mod deg } q^h$, $f_a(x) \equiv ax \text{ mod deg } q^h$.

а) Всякий формальный O -модуль над E высоты h изоморфен нормальному. Действительно, согласно [7], с помощью замены переменной можно добиться того, чтобы $f_\pi(x) \equiv x^{q^h}$. После этого условия 1), 2) будут выполнены. С помощью предложения 1.6 делается замена переменной с коэффициентами из \mathbf{F}_{q^h} , после которой выполнено условие 3) (и по-прежнему, условия 1), 2)).

б) С помощью предложения 1.5 доказывается, что между любыми двумя нормальными формальными O -модулями высоты h существует изоморфизм, тождественный $\text{mod deg } (q^h + 1)$.

в) Пусть L — кольцо эндоморфизмов нормального формального O -модуля высоты h . Ясно, что $O \subset L$, L не имеет делителей нуля, L полно в π -адической топологии. Из б) следует, что всякий росток эндоморфизма нашего модуля $\text{mod deg } q^h$ с коэффициентами из \mathbf{F}_{q^h} поднимается до эндоморфизма. Поэтому $L/\pi L \simeq \mathbf{F}_{q^h} \{ \{ \tau^{\log_p q} \} \} / \tau^{h \log_p q}$. Отсюда следует, что $\dim L/\pi L = h^2$, а центр $L/\pi L$ совпадает с $O/(\pi)$. Поэтому $L \otimes K$ — центральное тело размер-

ности h^2 . Высота является нормированием на $L \otimes K$, поэтому L — максимальный порядок в $L \otimes K$. Из соотношения $\tau^{\log_p q} a = a^q \tau^{\log_p q}$ следует, что инвариант $L \otimes K$ равен $1/h$. ■

§ 2. Эллиптические модули (алгебраический подход)

А) **Определения и обозначения.** Пусть B — кольцо характеристики p . Эндоморфизм (алгебраической) аддитивной группы над B , переводящий t в t^p , обозначим через τ (так же, как в § 1). Элемент $b \in B$ будем отождествлять с эндоморфизмом умножения на b . Всякий эндоморфизм (алгебраической) аддитивной группы над B имеет вид $\sum_{i=0}^n b_i \tau^i$, причем $\tau b = b^p \tau$. Кольцо таких «многочленов» обозначим через $B\{\tau\}$. Имеем два гомоморфизма: $\varepsilon: B \rightarrow B\{\tau\}$, $\varepsilon(b) = b$, и $D: B\{\tau\} \rightarrow B$, $D\left(\sum_{i=0}^n b_i \tau^i\right) = b_0$.

Следующие обозначения сохраняются до конца работы: k — глобальное поле характеристики p ; ∞ — фиксированная точка k ; k_v — пополнение k , соответствующее точке v ; $|\cdot|_v$ — нормализованное абсолютное значение, соответствующее v (или его продолжение на конечное расширение k_v); вместо $|\cdot|_\infty$ будем писать $|\cdot|$; $A = \{x \in k \mid |x|_v \leq 1 \text{ при } v \neq \infty\}$; если $v \in \text{Спект } A$, то A_v — пополнение A по $|\cdot|_v$.

Пусть K — поле над A (т. е. задан $i: A \rightarrow K$). Точку $i^*(\text{Спект } K) \in \text{Спект } A$ (т. е. идеал $\text{Кег } i$) назовем «характеристикой» (обозначение: « char »). Таким образом, i — вложение тогда и только тогда, когда K имеет общую «характеристику».

Определение. Эллиптическим A -модулем над K называется гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow K\{\tau\}$ такой, что $i = D \circ \varphi$, $\varphi \neq \varepsilon \circ i$.

Б) **Ранг и точки конечного порядка.** Определим отображение $\text{deg}: K\{\tau\} \rightarrow \mathbf{Z}$ следующим образом: $\text{deg} \sum_{i=0}^n a_i \tau^i = p^n$ при $a_n \neq 0$, $\text{deg } 0 = 0$.

Предложение 2.1. а) φ — вложение;

б) существует $d > 0$ такое, что $\text{deg } \varphi(a) = |a|^d$ при $a \in A$.

Доказательство. а) Если бы $\text{Кег } \varphi \neq 0$, то $\text{Кег } \varphi$ было бы максимальным идеалом (так как $K\{\tau\}$ не имеет делителей нуля), а $\text{Им } \varphi$ был бы полем, т. е. $\text{Им } \varphi \subset \varepsilon(K)$, откуда $\varphi = \varepsilon \circ i$.

б) Ясно, что $\text{deg } \varphi(ab) = \text{deg } \varphi(a) \cdot \text{deg } \varphi(b)$, $\text{deg } \varphi(a+b) \leq \max(\text{deg } \varphi(a), \text{deg } \varphi(b))$, $\text{deg } \varphi(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$, $\text{deg } \varphi(a) \geq 1$ при $a \neq 0$, $\text{deg } \varphi(a) > 1$ для некоторого $a \in A$. Поэтому $\text{deg} \circ \varphi$ продолжается до нетривиального абсолютного значения k , которое не может соответствовать конечной точке. ■

Определение. d называется рангом эллиптического A -модуля φ .

Пример. Пусть $A = \mathbf{F}_q[x]$. Тогда $\varphi|_{\mathbf{F}_q} = \varepsilon \circ i|_{\mathbf{F}_q}$. Задание φ эквивалентно заданию $\varphi(x) \in K\{\tau\}$. В качестве $\varphi(x)$ можно взять любой элемент вида $(x) + \sum_{j=1}^d a_j \tau^{j \log_p q}$, где $d \geq 1$, $a_d \neq 0$, $a_j \in K$. Ранг такого модуля равен d .

Задание эллиптического A -модуля над K превращает любую K -алгебру в A -модуль. Пусть \bar{K} — алгебраическое замыкание K .

Предложение 2.2. K — делимый A -модуль. Если $a \in A$, $a \neq 0$, то число точек порядка a в K не превосходит $|a|^d$, где d — ранг эллиптического A -модуля. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $i(a) \neq 0$. Подмодуль кручения в \bar{K} изоморфен $\bigoplus_{v \in \text{Specm} A} (K_v/A_v)^{j_v}$, где $j_v < d$ при $v \neq \langle \text{char} \rangle K$.

Доказательство. Всякий делимый A -модуль кручения изоморфен

$$\bigoplus_{v \in \text{Specm} A} (K_v/A_v)^{j_v}, \quad j_v \text{ находятся путем подсчета числа точек порядка } a. \blacksquare$$

Следствие. Ранг эллиптического модуля — натуральное число.

Замечание. Так как $K\{\tau\} \subset K\{\{\tau\}\}$, то всякий эллиптический A -модуль над K определяет формальный A -модуль над K . Если K имеет общую характеристику, то всякий формальный A -модуль над K однозначно продолжается до формального k -модуля. Если $\langle \text{char} \rangle K = v \in \text{Specm} A$, то всякий формальный A -модуль над K однозначно продолжается до A_v -модуля; высота формального A_v -модуля, соответствующего эллиптическому A -модулю, равна $d - j_v$.

В) Изогении. Определение. Пусть $\varphi: A \rightarrow K\{\tau\}$, $\psi: A \rightarrow K\{\tau\}$ — эллиптические A -модули над K . Гомоморфизмом из φ в ψ называется элемент $\alpha \in K\{\tau\}$ такой, что $\alpha\varphi(a) = \psi(a)\alpha$ при $a \in A$. Ненулевой гомоморфизм называется изогенией.

Замечание. Из сравнения степеней следует, что изогения существует только между модулями одного ранга.

Всякий гомоморфизм эллиптических A -модулей является также гомоморфизмом аддитивных групп, поэтому можно говорить о ядре гомоморфизма эллиптических модулей.

Ядро изогении является конечной A -инвариантной групповой подсхемой в аддитивной группе.

Предложение 2.3. Пусть φ — эллиптический A -модуль. Для того чтобы конечная групповая подсхема H аддитивной группы, инвариантная относительно A , была ядром изогении из φ в какой-нибудь другой модуль, необходимо и достаточно, чтобы

- а) если K имеет общую «характеристику», то H была приведенной;
- б) если $v = \langle \text{char} \rangle K \in \text{Specm} A$, q — порядок поля вычетов v , то $H_{10c} = \text{Spec} K[t]/(t^{q^n})$ (где H_{10c} — связная компонента H).

Доказательство. При факторизации аддитивной группы по H получается аддитивная группа; пусть $u \in K\{\tau\}$ — гомоморфизм, ядром которого является H . Так как H инвариантна относительно A , то существует единственный гомоморфизм $\psi: A \rightarrow K\{\tau\}$ такой, что $u\varphi(a) = \psi(a)u$ при $a \in A$. Ясно, что $\psi \neq \varepsilon \circ i$, $D(\psi(a)) = [i(a)]^n$, где n — порядок H_{10c} . Поэтому для того чтобы ψ был эллиптическим модулем, необходимо и достаточно, чтобы $i(a^n) = i(a)$ при $a \in A$. \blacksquare

Следствие. Любую изогению можно умножить на другую изогению так, чтобы получить эндоморфизм умножения на $a \in A$, $a \neq 0$.

Предложение 2.4. Пусть X, Y — эллиптические A -модули ранга d над K . Тогда $\text{Hom}(X, Y)$ — проективный A -модуль конечной размерности (не превосходящей d^2). Если $v \in \text{Spec} A$, $v \neq \text{char} K$, то гомоморфизм $\text{Hom}(X, Y) \otimes_A A_v \rightarrow \text{Hom}_{A_v}(T_v X, T_v Y)$ инъективен (где $T_v X$ — v -компонента подмодуля кручения в K), а его коядро не имеет кручения.

Доказательство (см. [2]). 1) $\text{Hom}(X, Y)$ — A -модуль без кручения. Если $u, w \in \text{Hom}(X, Y)$, то $\deg(u+w) \leq \max(\deg u, \deg w)$, $\deg(au) = |a|^d \deg u$, $\deg u \geq 1$ при $u \neq 0$. Поэтому, если $V \subset \text{Hom}(X, Y) \otimes_A k$ — конечномерное подпространство, то $V \cap \text{Hom}(X, Y)$ — модуль конечного типа.

2) Пусть $a \in A$, $|a|_v < 1$, $|a|_w = 1$ при $w \neq v, \infty$. Тогда гомоморфизм $\text{Hom}(X, Y)/(a^k) \rightarrow \text{Hom}_{A_v}(T_v X, T_v Y)/(a^k)$ инъективен, поэтому $\varprojlim \text{Hom}(X, Y)/(a^k) \subset \text{Hom}_{A_v}(T_v X, T_v Y)$. С другой стороны, $\text{Hom}(X, Y) \otimes_A A_v \rightarrow \varprojlim \text{Hom}(X, Y)/(a^k)$ — мономорфизм. ■

Следствие. Пусть X — эллиптический A -модуль ранга d над K . Тогда $\text{End} X$ — проективный модуль, $\dim \text{End} X \leq d^2$, $\text{End} X \otimes_A k_\infty$ — тело. Если K имеет общую «характеристику», то $\text{End} X$ коммутативно и $\dim \text{End} X \leq d$.

§ 3. Эллиптические модули (аналитический подход)

Пусть L — конечное расширение k_∞ , L^s — сепарабельное замыкание L . Решеткой над L назовем конечно порожденный дискретный A -подмодуль в L^s , инвариантный относительно $\text{Gal}(L^s/L)$. Пусть Γ_1 и Γ_2 — решетки над L размерности d . Морфизмом из Γ_1 в Γ_2 назовем число $\alpha \in L$ такое, что $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Композицию морфизмов определим как произведение чисел.

Предложение 3.1. Категория эллиптических модулей ранга d над L изоморфна категории решеток размерности d над L .

Доказательство. 1) Пусть Γ — решетка размерности d над L . Положим

$$f(z) = z \prod_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ \alpha \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$$

(это произведение, очевидно, сходится равномерно на каждом круге, так что f — целая функция). Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть E — поле, $\text{char} E = p$, $\Delta \subset E$ — конечная подгруппа, $g(z) = \prod_{\alpha \in \Delta} (z - \alpha)$. Тогда $g(z+w) = g(z) + g(w)$.

Доказательство. Ясно, что $g(z+w) - g(z) - g(w) = 0$ при $z \in \Delta$ или $w \in \Delta$. Поэтому $g(z)g(w)$ делит $g(z+w) - g(z) - g(w)$. Сравнивая степени, получим, что $g(z+w) = g(z) + g(w)$. ■

Так как Γ является объединением возрастающей последовательности конечных подгрупп, то $f(z+w) = f(z) + f(w)$. Ясно, что f индуцирует изоморфизм групп $\bar{L}/\Gamma \simeq \bar{L}$. Так как Γ является A -подмодулем, то на \bar{L} пере-

носится с \bar{L}/Γ структура A -модуля. Если $a \in A$, $a \neq 0$, то $f(az)$ и $\prod_{v \in \frac{1}{a} \Gamma/\Gamma} (f(z) - f(\beta))$ — аналитические функции от z с одинаковыми дивизорами.

Поэтому $f(az) = P_a(f(z))$, где P_a — многочлен степени $|a|^d$.

2) Пусть φ — эллиптический A -модуль ранга d над L . Ему соответствует формальный k -модуль над L (см. замечание в конце § 2 Б)). Согласно предложению 1.2, существует единственный $f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \tau^i \in L\{\{\tau\}\}$ такой, что $fa = \varphi(a)f$ при $a \in A$. Докажем, что формальный гомоморфизм f является аналитическим гомоморфизмом. Пусть $a \in A$, $|a| > 1$, $\varphi(a) = a + \sum_{j=1}^s a_j \tau^j$.

Пусть $i > s$; из тождества $fa = \varphi(a)f$ получим: $(a^i - a)b_i = \sum_{j=1}^s a_j b_{i-j}^j$. Пусть

$c_i = |b_i|^{p^{-i}}$. Тогда $|a| \cdot c_i \leq \max_{1 \leq j \leq s} (|a_j|^{p^{-i}} c_{i-j})$. Пусть $\frac{1}{|a|} < \theta < 1$; $c_i \leq \theta \max_{1 \leq j \leq s} c_{i-j}$

при достаточно больших i . Поэтому $c_i \rightarrow 0$. Пусть $\Gamma \subset \bar{L}$ — ядро f . Ясно, что $\Gamma \subset L^s$, Γ инвариантен относительно $\text{Gal}(L^s/L)$, Γ является A -подмодулем и $\frac{1}{a} \Gamma/\Gamma \simeq (A/(a))^d$. Так как Γ дискретен, то Γ является решеткой над L размерности d .

3) Пусть Γ_1 и Γ_2 — решетки размерности d над L , $\alpha \in L$, $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Пусть f_1 и f_2 — целые функции, построенные в 1) по решеткам Γ_1 и Γ_2 . Функция $f_2(\alpha z)$ инвариантна относительно Γ_1 . Повторяя рассуждения из п. 1), получим, что $f_2(\alpha z) = P(f_1(z))$, где P — многочлен. P задает гомоморфизм эллиптических A -модулей. Наоборот, пусть многочлен P задает гомоморфизм эллиптических A -модулей. Тогда $P \circ f_1$ является формальным гомоморфизмом из аддитивного k -модуля в формальный k -модуль, отвечающий второму эллиптическому A -модулю. Из предложения 1.2 следует, что $P(f_1(z)) = f_2(\alpha z)$ для однозначно определенного $\alpha \in L$. Ясно, что $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. ■

Следствие. Для любых A и d существуют эллиптические A -модули ранга d над k_∞^s .

§ 4. Универсальные деформации формальных модулей

А) Деформации нулевого уровня (см. [13]). Будем использовать те же обозначения, что в § 1 В) Пусть O^{nr} — максимальное неразветвленное расширение O , \hat{O}^{nr} — пополнение O^{nr} . Рассмотрим категорию C , объектами которой являются полные локальные \hat{O}^{nr} -алгебры, у которых поле вычетов изоморфно $\hat{O}^{nr}/(\pi)$; морфизмами C являются локальные гомоморфизмы \hat{O}^{nr} -алгебр.

Пусть (G, g) — формальный O -модуль над $\hat{O}^{nr}/(\pi)$, $R \in C$. Деформацией модуля (G, g) с базой R назовем формальный O -модуль (F, f) над

R , редукция которого по модулю максимального идеала совпадает с (G, g) .

Предложение 4.1. Пусть (F, f) и (F', f') — деформации модулей (G, g) и (G', g') с базой R . Пусть $\varphi: (F, f) \rightarrow (F', f')$ — гомоморфизм, индуцирующий нулевой гомоморфизм $(G, g) \rightarrow (G', g')$. Если высота (G, g) конечна, то $\varphi = 0$.

Доказательство. Пусть $m \subset R$ — максимальный идеал. Достаточно рассмотреть случай, когда $m^{r+1} = 0$, $\varphi \equiv 0 \pmod{m^r}$, $r \geq 1$. Тогда $F'(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $f'_a(\varphi(x)) = a\varphi(x)$, поэтому $\varphi(F(x, y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(f_a(x)) = a\varphi(x)$. Пусть $l: m^r \rightarrow R/m$ — линейная функция, $\varphi' = l(\varphi)$. Тогда φ' является гомоморфизмом из (G, g) в аддитивный O -модуль, поэтому $\varphi' = 0$. ■

Деформации (F_1, f_1) и (F_2, f_2) модуля (G, g) назовем изоморфными, если существует изоморфизм $(F_1, f_1) \xrightarrow{\sim} (F_2, f_2)$, индуцирующий тождественный автоморфизм (G, g) (если (G, g) имеет конечную высоту, то такой изоморфизм единствен).

Предложение 4.2. Пусть (G, g) — формальный O -модуль над \hat{O}^{nr} конечной высоты h . Функтор, сопоставляющий $R \in \mathcal{C}$ множество деформаций модуля (G, g) с точностью до изоморфизма, представим алгеброй $\hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]]$.

Доказательство. Пусть $O[g_1, g_2, \dots] = \Lambda_O \rightarrow \hat{O}^{nr}/(\pi)$ — гомоморфизм, соответствующий (G, g) . Можно считать, что при этом гомоморфизме $g_i \mapsto 0$ при $i < q^h - 1$. Пусть (F^0, f^0) — деформация (G, g) с базой $\hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]]$ такая, что соответствующий гомоморфизм $\Lambda_O \rightarrow \hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]]$ переводит g_{q^i} в t_i при $1 \leq i \leq h - 1$, g_j в нуль при $j < q^h - 1$, $j \neq q^i - 1$. Докажем, что (F^0, f^0) является универсальной деформацией.

Пусть M — векторное пространство над $\hat{O}^{nr}/(\pi)$. 2-мерным коциклом модуля (G, g) с коэффициентами в M называется набор $\{\delta \in M[[x, y]], \delta_a \in M[[x]]\}$ при $a \in O\}$ такой, что

$$\Delta(y, z) + \Delta(x, G(y, z)) = \Delta(x, y) + \Delta(G(x, y), z), \quad \Delta(x, y) = \Delta(y, x),$$

$$\delta_a(x) + \delta_a(y) + \Delta(g_a(x), g_a(y)) = a\Delta(x, y) + \delta_a(G(x, y)),$$

$$\delta_a(x) + \delta_b(x) + \Delta(g_a(x), g_b(x)) = \delta_{a+b}(x), \quad a\delta_b(x) + \delta_a(g_b(x)) = \delta_{ab}(x).$$

Кограницей ряда $\psi \in M[[x]]$ назовем коцикл (Δ, δ) , где $\Delta(x, y) = \psi(G(x, y)) - \psi(x) - \psi(y)$, $\delta_a(x) = \psi(g_a(x)) - a\psi(x)$.

Пусть $R \in \mathcal{C}$, $m \subset R$ — максимальный идеал, $m^{r+1} = 0$, $r \geq 1$, (F, f) — деформация модуля (G, g) с базой R .

Лемма. 1) Существует взаимно однозначное соответствие между формальными O -модулями (F', f') над R , совпадающими с (F, f) по модулю m^r и 2-мерными коциклами модуля (G, g) с коэффициентами в m^r . Коциклу (Δ, δ) отвечает модуль (F', f') , где $F'(x, y) = F(F(x, y), \Delta(x, y))$, $f'_a(x) = F(f_a(x), \delta_a(x))$.

2) Два коцикла с коэффициентами в m^r когомологичны тогда и только тогда, когда соответствующие деформации изоморфны.

Доказательство. Если $(F', f') \equiv (F'', f'') \pmod{m^r}$, то изоморфизм деформаций (F', f') и (F'', f'') тождественный $\pmod{m^r}$ (следует из предложения 4.1). Все остальное проверяется выкладкой. ■

Пусть $\varphi: \hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{n-1}]] \rightarrow R$ — гомоморфизм такой, что $\varphi_*(F^0, f^0) \equiv (F, f) \pmod{m^r}$. Для доказательства предложения достаточно показать существование и единственность гомоморфизма $\psi: \hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{n-1}]] \rightarrow R$ такого, что $\psi \equiv \varphi \pmod{m^r}$ и $\psi_*(F^0, f^0) \approx (F, f)$. Пусть $\psi: \hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{n-1}]] \rightarrow R$ — гомоморфизм такой, что $\psi(t_i) = \varphi(t_i) + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \in m^r$. Тогда разность между коциклами, соответствующими $\varphi_*(F^0, f^0)$ и $\psi_*(F^0, f^0)$, имеет вид $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i (\Delta_i, \delta_i)$, где (Δ_i, δ_i) — коциклы с коэффициентами в $\hat{O}^{nr}/(\pi)$ (не зависящие ни от ε_i , ни от r); при этом $(\Delta_i, \delta_i) \equiv 0 \pmod{\deg q^i}$, $(\Delta_i, \delta_i) \not\equiv 0 \pmod{\deg(q^i + 1)}$. Остается доказать, что классы (Δ_i, δ_i) образуют базис когомологий с коэффициентами в $\hat{O}^{nr}/(\pi)$. Это вытекает из следующих двух утверждений (первое из них очевидно, а второе, по существу, было доказано в § 1 В)).

а) Кограница x^n сравнима с

$$\{(x + y)^n - x^n - y^n, (a^n - a)x^n\} \pmod{\deg(n + 1)},$$

кограница x^{q^i} сравнима с

$$\left\{ h_i \frac{p}{\pi} C_{q^{i+h}}(x, y), h_i \frac{a^{q^{i+h}} - a}{\pi} x^{q^{i+h}} \right\} \pmod{\deg(q^{i+h} + 1)}, h_i \neq 0.$$

б) Пусть (Δ, δ) — коцикл и $(\Delta, \delta) \equiv 0 \pmod{\deg n}$. Если n не является степенью q , то

$$(\Delta, \delta) \equiv \{v[(x + y)^n - x^n - y^n, v(a^n - a)x^n] \pmod{\deg(n + 1)};$$

если n — степень q , то

$$(\Delta, \delta) \equiv \left\{ h \cdot \frac{p}{\pi} C_n(x, y), h \cdot \frac{a^n - a}{\pi} x^n \right\} \pmod{\deg(n + 1)}. \quad \blacksquare$$

В) Деформации произвольного уровня. Пусть $R \in \mathcal{C}$, $m \subset R$ — максимальный идеал. Задание формального O -модуля (F, f) над R превращает m в O -модуль. Пусть редукция (F, f) по модулю m имеет конечную высоту h . Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Определение. Структурой уровня n на формальном O -модуле (F, f) называется гомоморфизм O -модулей $\varphi: \left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^h \rightarrow m$ такой, что $f_\pi(x)$

делится на $\prod_{\alpha \in \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^h} (x - \varphi(\alpha))$.

При $n \geq 1$ отсюда следует, что $f_\pi(x)$ и $\prod_{\alpha \in \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^h} (x - \varphi(\alpha))$ де-

лятся друг на друга. В случае $R = \hat{O}^{nr}/(\pi)$ существует ровно одна структура уровня n . Пусть (G, g) — формальный O -модуль над $\hat{O}^{nr}/(\pi)$ конеч-

ной высоты h . Деформацию модуля (G, g) со структурой уровня n будем называть деформацией уровня n .

Предложение 4.3. 1) Функтор, сопоставляющий $R \in \mathcal{C}$ множество деформаций уровня n модуля (G, g) с точностью до изоморфизма представим некоторым кольцом D_n .

2) D_n — регулярное кольцо. Пусть $n \geq 1$, а e_i ($i=1, \dots, h$) — базис $\left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^h$ как $O/(\pi)^n$ -модуля. Тогда образы e_i в D_n при универсальной деформации уровня n образуют систему локальных параметров.

3) Пусть $m \leq n$. Гомоморфизм $D_m \rightarrow D_n$ конечный и плоский.

Доказательство. а) Пусть (F, f) — универсальная деформация с базой $D_0 \simeq \hat{O}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]]$. Пусть $0 \leq r \leq h$. Рассмотрим функтор Φ_r , сопоставляющий каждой D_0 -алгебре $R \in \mathcal{C}$ множество таких гомоморфизмов φ из $\left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^r$ в максимальный идеал R , что $f_\pi(x)$ делится на $\prod_{\alpha \in \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^r} (x - \varphi(\alpha))$.

Лемма. Φ_r представим кольцом L_r , обладающим следующими свойствами:

1) L_r — регулярное кольцо. Пусть e_i ($i=1, \dots, r$) — базис $\left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^r$. Тогда образы e_i в L_r , а также t_r, \dots, t_{h-1} образуют систему локальных параметров.

2) Гомоморфизм $L_{r-1} \rightarrow L_r$ конечный и плоский.

Доказательство. При $r=0$ лемма верна. Пусть $r \geq 1$ и утверждение для Φ_{r-1} доказано. Пусть $\varphi_{r-1}: \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^{r-1} \rightarrow L_{r-1}$ — гомоморфизм, упоминаемый в определении Φ_{r-1} . Положим $\theta_i = \varphi_{r-1}(e_i)$ ($1 \leq i \leq r-1$),

$$g(x) = \frac{f_\pi(x)}{\prod_{\alpha \in \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^{r-1}} (x - \varphi_{r-1}(\alpha))}.$$

Пусть $L_r = L_{r-1}[[\theta_r]]/g(\theta_r)$. Определим гомоморфизм $\varphi_r: \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^{r-1} \oplus \left(\frac{1}{\pi} O/O\right) \rightarrow L_r$ так, чтобы ограничение φ_r на первое слагаемое совпадало с φ_{r-1} , а ограничение φ_r на второе слагаемое переводило $1/\pi$ в θ_r . Ясно, что L_r конечно и плоско над L_{r-1} . Далее, $L_r/(\theta_1, \dots, \theta_r, t_r, \dots, t_{h-1}) = \hat{O}^{nr}/(\pi)$, поэтому L_r регулярно, и $\theta_1, \dots, \theta_r, t_r, \dots, t_{h-1}$ образуют систему локальных параметров. Осталось доказать, что L_r представляет Φ_r . Для этого достаточно доказать, что $f_\pi(x)$ делится на $\prod_{\alpha \in \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^r} (x - \varphi_r(\alpha))$. В самом

деле, $f_\pi(x)$ делится на $x - \varphi_r(\alpha)$ при $\alpha \in \left(\frac{1}{\pi} O/O\right)^r$. Так как L_r регулярно, то остается доказать, что φ_r инъективно. Действительно, если

$\varphi_r \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i \right) = 0$, то $\sum_{i=1}^r \alpha_i \theta_i$ принадлежит квадрату максимального идеала L_r , откуда $\alpha_i \in (\pi)$. ■

Полагая $r = h$, получим утверждения 1) — 3) при $n = 1$.

б) Пусть $n \geq 1$ и утверждения 1) — 2) о D_n доказаны. Пусть $e_i (1 \leq i \leq h)$ — базис в $\left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^h$, b_i — образ e_i в D_n . Ясно, что $D_{n+1} = D_n [[y_1, \dots, y_n]] / (f_\pi(y_1) - b_1, \dots, f_\pi(y_n) - b_n)$. Поэтому D_{n+1} регулярно, (y_1, \dots, y_n) — система локальных параметров в D_{n+1} , гомоморфизм $D_n \rightarrow D_{n+1}$ конечный и плоский. ■

Предложение 4.4. Пусть (F, f) — формальный O -модуль над $R \in \mathcal{C}$ со структурой φ уровня n . Пусть $P \subset \left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^h$ — подмодуль. Тогда $H \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spf } R[[x]] / \prod_{\alpha \in P} (x - \varphi(\alpha)) \subset \text{Spf } R[[x]]$ является O -инвариантной групповой

подсхемой, а фактор $G = F/H$ формальным O -модулем. Если $\left(\frac{1}{\pi^m} O/O\right)^h \rightarrow \left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^h / P$ — вложение, то соответствующий гомоморфизм из $\left(\frac{1}{\pi^m} O/O\right)^h$ в максимальный идеал R является структурой уровня m .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $R = D_n$ (см. предложение 4.3). Очевидно, что H — минимальная замкнутая подсхема в $\text{Spf } R[[x]]$, содержащая $\text{Spf } R[[x]] / (x - \varphi(\alpha))$ при всех $\alpha \in P$. Так как $F(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \varphi(\alpha + \beta)$ и $\text{Spf } R[[x]] / (x - \varphi(\alpha + \beta))$ содержится в H при $\alpha, \beta \in P$, то H инвариантна относительно сложения. Точно так же доказывается, что H инвариантна относительно действия O . Так как $\varphi(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, то гомоморфизм из F в G индуцирует ненулевое касательное отображение. Так как D_n не имеет делителей нуля, то G является формальным O -модулем. Так как гомоморфизм из $\left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^h$ в максимальный идеал D_n инъективен, а D_n регулярно, то этот гомоморфизм является структурой уровня m . ■

В) Деформации делимых модулей. В этом разделе под формальной группой мы будем понимать групповой объект в категории формальных схем (например, дискретная группа является формальной). Пусть $R \in \mathcal{C}$. Делимым O -модулем над R назовем формальную группу F над R , снабженную гомоморфизмом $f: O \rightarrow \text{End } F$, такую, что F_{10c} является формальным O -модулем, а $F/F_{10c} \simeq \text{Spf } R \times (K/O)^j (j < \infty)$. (При $R = \hat{O}^{nr}/(\pi)$ последовательность $0 \rightarrow F_{10c} \rightarrow F \rightarrow F/F_{10c} \rightarrow 0$ расщепляется).

Пусть редукция F_{10c} по модулю максимального идеала имеет конечную высоту h . Структурой уровня n на делимом модуле (F, f) называется гомоморфизм $\left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^{j+h} \xrightarrow{\varphi} \text{Mog}(\text{Spf } R, F)$, индуцирующий структуру уровня n на F_{10c} и эпиморфизм $\left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^{j+h} \rightarrow \left(\frac{1}{\pi^n} O/O\right)^j \subset F/F_{10c}$. Пояятие

деформации уровня n вводится так же, как для формальных модулей. Предложение 4.1 легко обобщается на случай делимых модулей.

Предложение 4.5. Пусть (G, g) — делимый O -модуль над $\hat{O}^{nr}/(\pi)$ со структурой уровня n такой, что G_{10c} имеет высоту h , а $G/G_{10c} \approx (K/O)^j$.

Пусть $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. Функтор, сопоставляющий $R \in \mathcal{C}$ множество деформаций уровня n модуля (G, g) с базой R с точностью до изоморфизма, представим кольцом $E_n \simeq D_n[[d_1, \dots, d_j]]$ (D_n определяются в предложении 4.3). В частности, E_n — регулярное кольцо размерности $j+h$, а E_0 гладко над \hat{O}^{nr} . Если $m \leq n$, то гомоморфизм $E_m \rightarrow E_n$ конечный и плоский.

Доказательство. Пусть $R \in \mathcal{C}$ и (F, f) — деформация уровня n формального модуля G_{10c} . Ясно, что продолжения ее до деформации делимого модуля G классифицируются элементами $\text{Exp}(\Gamma, \text{Mor}(\text{Spf } R, F))$, где Γ — фактор G/G_{10c} по элементам порядка π^n . Если M — модуль над O , полный в π -адической топологии, то $M = \text{Exp}(K/O, M)$. Поэтому, зафиксировав изоморфизм $\Gamma \approx (K/O)^j$, мы можем отождествить $\text{Exp}(\Gamma, \text{Mor}(\text{Spf } R, F))$ с $[\text{Mor}(\text{Spf } R, F)]^j$. ■

З а м е ч а н и е. Пусть O' — целое замыкание O в конечном расширении K . Под O^{nr} понимается максимальное неразветвленное расширение O внутри O'^{nr} . Пусть (G, g) — делимый O' -модуль такой, что G_{10c} имеет конечную высоту. Пусть E' — база универсальной деформации (нулевого уровня) O' -модуля (G, g) . Мы можем рассмотреть (G, g) как O -модуль; пусть E — база универсальной деформации O -модуля (G, g) . На E , очевидно, действует группа автоморфизмов O -модуля (G, g) , в частности, группа O^* . Легко доказать, что если $\Gamma \subset O^{**}$ — подгруппа, порождающая O' как O -модуль, то $\text{Spf } E' = (\text{Spf } E)^\Gamma$.

§ 5. Модулярные многообразия

А) Эндоморфизмы аддитивной группы.

Предложение 5.1. Пусть B — кольцо характеристики p , $\text{Spec } B$ связен.

з е н. Пусть $f_1, f_2 \in B\{\tau\}$, $f_j = \sum_{i=0}^{d_j} a_{ij}\tau^i$, $d_1 > 0$, a_{d_j} обратимы при $j = 1, 2$.

Пусть $h \in B\{\tau\}$ и $hf_1 = f_2h$. Тогда

1) если $d_1 \neq d_2$, то $h = 0$;

2) если $d_1 = d_2$ и $h \neq 0$, то h имеет вид $\sum_{i=0}^{d_3} h_i\tau^i$, h_{d_3} обратим.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда B — локальное артиново кольцо. Проведем индукцию по длине B .

1) Пусть коэффициенты h нильпотентны (это всегда так, если $d_1 \neq d_2$).

Докажем, что $h = 0$. Пусть $m \subset B$ — идеал, $m^2 = 0$, $h = \sum_{i=0}^n h_i\tau^i$, $h_i \in m$.

Тогда $hf_1 = f_2h = a_{02}h$. Так как $d_1 > 0$, то $h_n = 0$.

2) Пусть $d = d_2 = d$, $h = \sum_{i=0}^n h_i \tau^i$, $m \subset B$ — идеал, $m^2 = 0$, $h_n \in m$. Приравняв коэффициенты при τ^{d+n} , получим, что $h_n = 0$. ■

Предложение 5.2. Пусть B — кольцо, $\text{char } B = p$. Пусть $f = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i \in B\{\tau\}$, $d > 0$, причем a_d обратим, a_i нильпотентны при $i > d$. Тогда существует единственный элемент вида $1 + \sum_{j=1}^m a_j \tau^j \in B\{\tau\}$ такой, что a_j нильпотентны и $(1 + \sum_{j=1}^m a_j \tau^j) f (1 + \sum_{j=1}^m a_j \tau^j)^{-1}$ имеет степень d .

Доказательство. Единственность следует из предложения 5.1.

Пусть $m \subset B$ — идеал, $m^2 = 0$, $a_i \in m$ при $i > d$, $n > d$. Тогда степень $(1 - \frac{a_n}{a_d^{p^{n-1}}} \tau^{n-d}) f (1 - \frac{a_n}{a_d^{p^{n-1}}} \tau^{n-d})^{-1}$ меньше n . Отсюда следует существование. ■

Б) Конструкция модулярных схем.

Определение. Пусть S — схема над A . Эллиптическим A -модулем над S ранга d называется линейное расслоение L над S вместе с гомоморфизмом $A \xrightarrow{\psi} \text{End } L$ ($\text{End } L$ — кольцо эндоморфизмов L как групповой схемы над S) таким, что 1) для любого $a \in A$ дифференциал $\psi(a)$ является умножением на a ; 2) для любого поля K и морфизма $\text{Spec } K \rightarrow S$ соответствующий гомоморфизм $A \rightarrow K\{\tau\}$ является эллиптическим модулем ранга d в смысле § 1. Гомоморфизмом эллиптических модулей называется гомоморфизм групповых схем над S , согласованный с действием A .

Замечание. Назовем эллиптический модуль над S стандартным, если для любого $a \in A$ эндоморфизм $\psi(a)$ имеет вид $\sum_{i=0}^{d \log_p |a|} b_i \tau^i$, где $b_i \in H^0(S, L^{1-p^i})$.

Согласно предложению 5.2, всякий эллиптический модуль изоморфен стандартному, всякий изоморфизм стандартных модулей линейный.

Пусть $I \subset A$ — идеал. Обозначим через $V(I)$ — множество простых идеалов, содержащих I . Пусть X — эллиптический модуль над S ранга d , $I \neq 0$, $X_I \subset X$ — аннулятор I . Ясно, что X_I — конечная плоская групповая схема над S . Если образ S в $\text{Spec } A$ не пересекается с $V(I)$, то X_I этальна над S .

Определение. Структурой уровня I на X называется гомоморфизм A -модулей $\psi: (I^{-1}/A)^d \rightarrow \text{Mog}(S, X)$ такой, что для любого $t \in V(I)$ X_t как дивизор совпадает с суммой дивизоров $\psi(\alpha)$, $\alpha \in t^{-1}/A$.

Замечание. Если образ S в $\text{Spec } A$ не пересекается с $V(I)$, то структура уровня I — это изоморфизм $(I^{-1}/A)^d \times S \xrightarrow{\sim} X_I$.

Предложение 5.3. Пусть $I \subset A$ — идеал такой, что $I \neq 0$ и $V(I)$ содержит более одного элемента. Функтор, сопоставляющий схеме S над A множество эллиптических A -модулей ранга d со структурой уровня I

с точностью до изоморфизма, представим схемой M_1^d конечного типа над A .

Доказательство. Пусть $m \in V(I)$. Достаточно доказать, что ограничение нашего функтора на категорию схем над $\text{Spec } A - m$ представимо. В самом деле, если S — схема над $\text{Spec } A - m$, а X — эллиптический A -модуль ранга d над S со структурой уровня I , то выбор ненулевого элемента $(m^{-1}/A)^d$ определяет тривиализацию расслоения X . ■

В) **Деформации эллиптических модулей.** Пусть $V \in \text{Spec } A$, $\mathcal{O} = A_v$; определение категории \mathcal{C} дано в § 4. Пусть X — эллиптический модуль ранга d над \hat{A}_v^{nr}/v со структурой уровня v^n .

Рассмотрим функтор, сопоставляющий $R \in \mathcal{C}$ множество деформаций уровня v^n модуля X с базой R с точностью до изоморфизма. Этот функтор можно представить следующим образом: пусть $I \subset A$ — ненулевой идеал, $V(I) \not\ni v$, $I \neq A$; поднимем каким-то образом структуру уровня v^n на X до структуры уровня Iv^n ; пусть y — соответствующая точка $M_{Iv^n}^d \otimes A_v^{nr}$, а F_n — пополнение ее локального кольца; F_n представляет рассматриваемый функтор.

Если $R \in \mathcal{C}$, Y — эллиптический модуль над R , то $\hat{Y} = \varinjlim Y_{v^n}$ является делимым A_v -модулем. Задание на Y структуры уровня v^n определяет структуру уровня n на \hat{Y} . Таким образом, возникает гомоморфизм $E_n \rightarrow F_n$ (E_n определено в § 4В)).

Предложение 5.4. Построенный гомоморфизм $E_n \rightarrow F_n$ является изоморфизмом.

Доказательство. а) Если $R \in \mathcal{C}$, Y — эллиптический модуль над R , $\hat{Y} = \varinjlim Y_{v^n}$, то задание на \hat{Y} структуры уровня n определяет на Y структуру уровня v^n . Поэтому достаточно доказать предложение при $n = 0$.

б) Сведем доказательство к случаю $A = \mathbb{F}_p[x]$, $v = (x)$. Пусть $x \in v$. Мы можем рассматривать любой эллиптический A -модуль и как $\mathbb{F}_p[x]$ -модуль, а любой делимый A_v -модуль как $\mathbb{F}_p[[x]]$ -модуль. Пусть E'_0 — база универсальной деформации $\mathbb{F}_p[[x]]$ -модуля \hat{X} , а E'_0 — база универсальной деформации $\mathbb{F}_p[x]$ -модуля X . Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \rightarrow & F_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ E'_0 & \rightarrow & F'_0 \end{array}$$

коммутативна.

Пусть A_x — локализация A по множеству элементов A , взаимно простых с x . Определим действие A_x^* на F'_0 . Пусть $a \in A \cap A_x^*$, Y — деформация эллиптического $\mathbb{F}_p[x]$ -модуля X с базой $R \in \mathcal{C}$. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма деформация Y' с базой R , для которой эндоморфизм $X \xrightarrow{a} X$ продолжается до гомоморфизма $Y \rightarrow Y'$. (Y' получается следующим образом: пусть $b \in \mathbb{F}_p[x]$, $b(0) \neq 0$, $a|b$; так как $Y_{(b)}$ этальна над $\text{Spec } R$, то подсхема $X_{(a)} \subset X_{(b)}$ однозначно продолжается до подсхемы $H \subset Y_{(b)}$, этальной и конечной над $\text{Spec } R$; $Y' = Y/H$.) Таким образом, по-

лугруппа $A_x^* \cap A$ действует на F_0' , причем $A_x^* \cap F_p[x]$ действует тривиально. Это позволяет определить действие A_x^* на F_0' . Из предложения 5.1 следует, что $\text{Spf } F_0 = (\text{Spf } F_0')^{A_x^*}$. С другой стороны (см. § 4 В)), на E_0' действует группа $A_x^* \subset A_v^*$, причем $\text{Spf } E_0 = (\text{Spf } E_0')^{A_x^*}$. Так как гомоморфизм $E_0' \rightarrow F_0'$ согласован с действием A_x^* , то из того, что нижняя строка коммутативной диаграммы является изоморфизмом, следует, что верхняя строка также изоморфизм.

в) Остается разобрать случай $n = 0$, $A = F_p[x]$, $v = (x)$. Пусть эллиптический $F_p[x]$ -модуль X задается гомоморфизмом $F_p[x] \rightarrow \bar{F}_p\{\tau\}$, при котором $x \mapsto \sum_{i=h}^{d-1} a_i \tau^i + \tau^d$, $a_h \neq 0$. Ясно, что $F_0 = \bar{F}_p[[x, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}]]$, а универсальная деформация эллиптического модуля X имеет вид $x \mapsto x + \sum_{i=1}^{d-1} a_i \tau^i + \tau^d$. Так как $E_0 \approx F_0$, то достаточно доказать, что морфизм $\text{Spf } F_0 \rightarrow \text{Spf } E_0$ индуцирует мономорфизм касательных пространств. Иначе говоря, надо доказать, что если $\beta_1, \dots, \beta_{d-1} \in \bar{F}_p$, а деформация $x \mapsto \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i \varepsilon \tau^i + \sum_{i=h}^{d-1} a_i \tau^i + \tau^d$ с базой $\bar{F}_p[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ индуцирует тривиальную деформацию делимого модуля \hat{X} , то $\beta_i = 0$ при $1 \leq i \leq h-1$. Действительно, из тривиальности деформации формального модуля \hat{X}_{loc} следует, что $\beta_i = 0$ при $1 \leq i \leq h-1$. Пусть $r \in \bar{F}_p$ — точка порядка x модуля X . Тогда из тривиальности деформации \hat{X} следует, что $\sum_{i=h}^{d-1} (a_i + \beta_i \varepsilon) r^{p^i} + r^{p^d} = 0$, откуда $\sum_{i=h}^{d-1} \beta_i r^{p^i} = 0$. Так как r может принимать p^{d-h} различных значений, то $\beta_i = 0$ при $h \leq i \leq d-1$. ■

Следствие. Пусть выполнены условия предложения 5.3. Тогда M_I^d — гладкое d -мерное многообразие. Морфизм $M_I^d \rightarrow \text{Spes } A$ гладкий над $\text{Spes } A - V(I)$. Если $J \subset I$, то морфизм $M_J^d \rightarrow M_I^d$ конечный и плоский.

Г) Действие группы. Положим $M^d = \varprojlim M_I^d$. Пусть \mathfrak{A} — кольцо аделей k , \mathfrak{A}_f — кольцо аделей без компоненты ∞ (таким образом, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_f \times k_\infty$), $\hat{A} = \varprojlim A/I$.

Определим действие на M^d группы $GL(d, \mathfrak{A}_f)/k^*$. Пусть S — схема над A , X — эллиптический модуль над S ранга d вместе с гомоморфизмом $\psi: (k/A)^d \rightarrow \text{Мог}(S, X)$ таким, что для любого ненулевого идеала $I \subset A$ ограничение ψ на $(I^{-1}/A)^d$ является структурой уровня I . Пусть $g \in GL(d, \mathfrak{A}_f)$ — матрица с коэффициентами из \hat{A} . Можно рассматривать g как эндоморфизм $(k/A)^d$. Его ядро P конечно. Из предложения 4.4 вытекает, что дивизор $H \subset X$, равный сумме дивизоров $\psi(\alpha)$, $\alpha \in P$, является

2) Каждой точке $\omega \in W$ соответствуют эллиптический модуль X и гомоморфизм $(k_v/A_v)^d \rightarrow X$, ядро которого изоморфно k_v/A_v . Это определяет $GL(d, \mathfrak{A}_f)$ -инвариантное отображение множеств $W \rightarrow GL(d, \mathfrak{A}_f)/B'$. Пусть $I \subset A$ — идеал, $I \neq 0$. Отображение $U_I \setminus W \rightarrow GL(d, \mathfrak{A}_f)/B'$, очевидно, непрерывно. Пусть W_I^0 — прообраз в $U_I \setminus W$ образа единицы в $U_I \setminus GL(d, \mathfrak{A}_f)/B'$. Положим $W^0 = \lim_{\leftarrow} W_I^0$. Тогда W^0 инвариантна относительно B' , а W индуцирована схемой W^0 . Всякий морфизм $W_{\text{red}}^0 \rightarrow W_{\text{red}}^0$ однозначно определяется своим действием на множестве точек. Отсюда вытекают а) и б). ■

§ 6. Униформизация модулярных многообразий

А) Три аналога верхней полуплоскости. Пусть K — локальное неархимедово поле, $O \subset K$ — кольцо целых чисел, $\pi \in O$ — простой элемент. Пусть d — натуральное число.

1) «Аналитический» аналог. Пусть \mathbf{P}_K^{d-1} — проективное пространство, рассматриваемое как жесткое аналитическое пространство. На \mathbf{P}_K^{d-1} действует группа $GL(d, K)$ по формуле $(g; (z_1, \dots, z_d)) \rightarrow (z_1, \dots, z_d) \cdot g^{-1}$. Пусть Ω^d — множество точек \mathbf{P}_K^{d-1} , не лежащих ни на какой гиперплоскости, определенной над K . Множество Ω^d является $GL(d, K)$ -инвариантным подмножеством \mathbf{P}_K^{d-1} .

2) «Однородный» аналог [5]. Положим $S^d = GL(d, K)/GL(d, O)$. Группа $GL(d, K)$ действует слева на K^d , поэтому элементы S^d можно интерпретировать как классы свободных d -мерных O -подмодулей в K^d с точностью до подобия. Введем на S^d метрику ρ . Пусть $M \subset K^d$, $N \subset K^d$, $M \approx N \approx O^d$, $M \supset N \supset \pi^k M$, $N \not\subset M$, $N \not\supset \pi^{k-1} M$. Пусть $\{M\}$, $\{N\}$ — соответствующие элементы S^d ; положим $\rho(\{M\}, \{N\}) = k$.

Подмножество $\Delta \subset S^d$ назовем симплексом, если выполнено одно из эквивалентных условий: а) $\rho(x, y) \leq 1$ при $x, y \in \Delta$, б) существуют подмодули $M_i \subset K^d$ ($1 \leq i \leq k$) такие, что $M_i \approx O^d$, $M_i \supset M_{i+1}$ при $i < k$, $M_k \supset \pi M_1$, $\Delta = \{\{M_1\}, \dots, \{M_k\}\}$. Таким образом, S^d — симплицальная схема размерности $d - 1$. Соответствующий полиэдр обозначим через $S^d(\mathbf{R})$, а множество точек $S^d(\mathbf{R})$ с рациональными барицентрическими координатами обозначим через $S^d(\mathbf{Q})$.

3) «Топологический» аналог [9]. Фиксируем норму $|\cdot|$ на K ; тем же символом обозначается продолжение этой нормы на \bar{K} . Положим $q = |\pi^{-1}|$. Назовем норму v на K^d целочисленной (рациональной), если для любого $x \in K^d$, $x \neq 0$, $\log_q v(x) \in \mathbf{Z}$ (соответственно $\log_q v(x) \in \mathbf{Q}$). Оказывается, что множество норм на K^d с точностью до подобия отождествляется с $S^d(\mathbf{R})$; при этом классам рациональных норм соответствует $S^d(\mathbf{Q})$, а целочисленных — S^d . Вот конструкция: пусть

$K^d \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset \pi M_1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Пусть v_i — норма на

K^d , соответствующая M_i . Точке $S^d(\mathbf{R})$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ соответствует класс нормы $v = \max_{1 \leq i \leq k} \{q^{\alpha_i} v_i\}$. Метрика ρ на S^d продолжа-

ется до метрики на $S^d(\mathbf{R})$, которую мы будем также обозначать через ρ : если ν_1, ν_2 — нормы на K^d , то

$$\rho(\{\nu_1\}, \{\nu_2\}) \stackrel{\text{def}}{=} \log_q \left\{ \sup_{K^d} \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot \sup_{K^d} \frac{\nu_2}{\nu_1} \right\}.$$

Если $(z_1, \dots, z_d) \in \Omega^d$, то функция $(a_1, \dots, a_d) \mapsto \left| \sum_{i=1}^d a_i z_i \right|$ является рациональной нормой K^d . Это определяет $GL(d, K)$ -инвариантное отображение $\lambda: \Omega^d \rightarrow S^d(\mathbf{Q})$ (легко проверить, что λ сюръективно).

Предложение 6.1. 1) Пусть $x_1, \dots, x_k \in S^d$, $c \in \mathbf{Q}$. Пусть $X_c = \left\{ z \in \Omega^d \mid \sum_{i=1}^k \rho(x_i, \lambda(z)) \leq c \right\}$. Тогда X_c — открытое аффинное подмножество \mathbf{P}_K^{d-1} . Если $c_1 < c_2$, то X_{c_1} — внутреннее подмножество X_{c_2} .

2) Ω^d — допустимое открытое подмножество \mathbf{P}_K^{d-1} .

Доказательство. Пусть n — натуральное число, $n > c$. Пусть для каждого i ($1 \leq i \leq k$) ν_i — норма на K^d , классом которой является x_i , $C_i = \{y \in K^d \mid \nu_i(y) = 1\}$, $P_i \subset C_i$ — конечная q^n -сеть. Каждой паре (a, b) , где $a = (a_1, \dots, a_d) \in K^d$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in K^d$ соответствует рациональная функция r_b^a на \mathbf{P}_K^{d-1} :

$$r_b^a(z_1, \dots, z_d) = \frac{\sum a_i z_i}{\sum b_i z_i}.$$

Пусть $W \subset \mathbf{P}_K^{d-1}$ — пересечение областей определения функций r_b^a , где $a, b \in P_i$, $1 \leq i \leq k$. Легко проверить, что набор функций $\prod_{i=1}^k r_{v_i}^{u_i}$ (где $u_i, v_i \in P_i$) осуществляет замкнутое вложение W в аффинное пространство. Ясно, что X_c является прообразом полидиска радиуса q^c при этом отображении. Отсюда следует 1).

Для того чтобы вывести 2) из 1) достаточно доказать, что если B — алгебра Тэйта над K , $\varphi: \text{Max } B \rightarrow \mathbf{P}_K^{d-1}$ — морфизм такой, что $\text{Im } \varphi \subset \Omega^d$, то $\text{Im}(\lambda \circ \varphi)$ — ограниченное подмножество $S^d(\mathbf{Q})$. Действительно, пусть φ задается функциями $t_i \in B$ ($1 \leq i \leq d$), $|t_i| \leq 1$. Пусть $\psi(a_1, \dots, a_d) = \inf_{x \in \text{Max } B} \left| \sum_{i=1}^d a_i t_i(x) \right|$. ψ — непрерывная функция на K^d , и ψ обращается в нуль только в нуле. Пусть $\nu(a_1, \dots, a_d) = \max_{1 \leq i \leq d} |a_i|$, $\{v\}$ — соответствующий элемент S^d , $\varepsilon = \inf_{\nu(a)=1} \psi(a)$. Ясно, что $\text{Im}(\lambda \circ \varphi)$ содержится в шаре с центром $\{v\}$ радиуса $-\log_q \varepsilon$. ■

Пусть \bar{S}^d — барицентрическое подразделение S^d (т. е. точки \bar{S}^d — это симплексы S^d ; если $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ — симплексы S^d , причем $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_m$, то $\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$ является симплексом \bar{S}^d).

Предложение 6.2. Пусть $c \in \mathbf{Q}$, $0 < c < 1$. Для каждого симплекса $\Delta \subset S^d$ размерности $k - 1$ положим $V_\Delta^c = \left\{ y \in S^d(\mathbf{Q}) \mid \rho(y, x) \leq 1 - \frac{3-c}{4^k} \right.$

при $x \in \Delta, \sum_{y \in \Delta} \rho(y, x) \leq k - 1 + \frac{1+c}{4^k} \left. \right\}$, $U_\Delta^c = \lambda^{-1}(V_\Delta^c)$. Множества U_Δ^c образуют $GL(d, K)$ -инвариантное допустимое аффинное покрытие Ω^d с нервом \bar{S}^d . Если $c_1 < c_2$, то $U_{\Delta_1}^{c_1} \subseteq U_{\Delta_2}^{c_2}$.

Доказательство. Докажем, что множества V_Δ^c образуют покрытие $S^d(\mathbf{Q})$ с нервом \bar{S}^d (этого достаточно в силу предложения 6.1).

Пусть $\Phi \subset S^d$ — симплекс размерности $d - 1$, $\Phi(\mathbf{Q})$ — соответствующее замкнутое подмножество $S^d(\mathbf{Q})$. Если $x \in \Phi(\mathbf{Q})$ имеет барицентрические координаты $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, то расстояние от x до i -ой точки из Φ равно, как легко проверить, $1 - \alpha_i$. Если $V_\Delta^c \cap \Phi(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$, то $\Delta \subset \Phi$: действительно, если $y \in \Delta, z \in \Phi, x \in V_\Delta^c \cap \Phi(\mathbf{Q})$, то $\rho(y, x) < 1, \rho(z, x) \leq 1$, поэтому $\rho(y, z) < 2$; следовательно, $\Delta \cup \Phi$ является симплексом, откуда $\Delta \subset \Phi$. Пусть $\Delta_1 \subset \Phi, \Delta_2 \subset \Phi$ — симплексы размерности $k_1 - 1, k_2 - 1, k_2 \geq k_1, \Delta_2 \not\supset \Delta_1$; пусть j -ая точка Φ принадлежит $\Delta_1 - \Delta_2$. Если бы точка $\Phi(\mathbf{Q})$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ принадлежала $V_{\Delta_1}^c \cap V_{\Delta_2}^c$, то выполнялись бы неравенства $\alpha_j \geq \frac{3-c}{4^{k_1}}, \sum_{i \neq j} \alpha_i \geq 1 - \frac{1+c}{4^{k_2}}$, что противоречит условию

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1.$$

Обозначим множество первых k точек симплекса Φ через M_k . Ясно, что точка из $\Phi(\mathbf{Q})$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, где $\alpha_i = \frac{3-c}{4^i}$ при $i > 1$, принадлежит $\bigcap_{k=1}^d V_{M_k}^c$. Остается доказать, что множества V_Δ^c покрывают $S^d(\mathbf{Q})$. Пусть $x \in \Phi(\mathbf{Q})$ имеет координаты $(\alpha_1, \dots, \alpha_d), \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_d$. Существует $n \geq 1$ такое, что $\alpha_n \geq \frac{3-c}{4^n}, \alpha_i < \frac{3-c}{4^n}$ при $i > n$. Тогда $x \in V_{M_n}^c$. ■

Б) Факторизация жестких аналитических пространств по действию дискретной группы. Пусть K — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения.

Предложение 6.3. Пусть V — алгебра Тэйта над K и конечная группа G действует на V . Тогда V^G — алгебра Тэйта и V конечна над V^G .

Доказательство. Представим V в виде фактора алгебры сходящихся степенных рядов R . Пусть C — тензорное произведение нескольких экземпляров R , причем эти экземпляры соответствуют элементам G . На C действует G , и существует G -инвариантный эпиморфизм $C \rightarrow V$. Легко проверить, что C^G — алгебра Тэйта и C конечна над C^G . Поэтому V конечна над C^G, V^G конечна над C^G . Отсюда следует, что V^G — алгебра Тэйта и V конечна над V^G . ■

Предложение 6.4. Пусть B_1, B_2 — алгебры Тэйта, $\text{Max } B_2 \subset \text{Max } B_1$ — открытое аффинное подмножество. Пусть конечная группа G действует на B_1 , $\text{Max } B_2$ инвариантно относительно G . Тогда морфизм $\text{Max } B_2^G \rightarrow \text{Max } B_1^G$ является открытым вложением. Если $\text{Max } B_2 \subseteq \text{Max } B_1$, то $\text{Max } B_2^G \subseteq \text{Max } B_1^G$.

Доказательство. Ясно, что морфизм $\text{Max } B_2^G \rightarrow \text{Max } B_1^G$ индуцирует взаимно однозначное отображение множеств точек и изоморфизмы пополнений локальных колец. По основной теореме [8] этот морфизм является открытым вложением. Если $\text{Max } B_2 \subseteq \text{Max } B_1$, то существует замкнутое вложение $\varphi: \text{Max } B_1 \rightarrow \text{Max } K\{t_1, \dots, t_r\}$ такое, что $\varphi(\text{Max } B_2)$ содержится в множестве $|t_i| \leq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Пусть s_{ij} — j -я симметрическая функция от сдвигов $\varphi^*(t_i)$ с помощью элементов G . Функции s_{ij} определяют конечный морфизм из $\text{Max } B_1^G$ в единичный полидиск, при котором $\text{Max } B_2^G$ попадает в полидиск радиуса $1 - \varepsilon$. ■

Если B — алгебра Тэйта с действием конечной группы G , то вместо $\text{Max } B^G$ будем писать $G \backslash \text{Max } B$. Пусть X — аффинное аналитическое пространство с действием конечной группы G , $Y = G \backslash X$, Z — отделимое пространство, $\varphi: X \rightarrow Z$ — морфизм, инвариантный относительно G . Тогда существует единственный морфизм $\psi: Y \rightarrow Z$ такой, что $\varphi = \psi \circ \pi$, где $\pi: X \rightarrow Y$ — проекция. Действительно, пусть $Z = \bigcup Z_i$ — допустимое аффинное покрытие. Тогда множества $X_i = \psi^{-1}(Z_i)$ аффинны и G -инвариантны; конечное число множеств X_i покрывают X . Положим $Y_i = G \backslash X_i = \pi(X_i)$. Множества Y_i образуют допустимое покрытие Y . Остается проверить, что для каждого i существует единственный морфизм $\psi_i: Y_i \rightarrow Z$, согласованный с φ .

Определение. Пусть X — отделимое жесткое аналитическое пространство. Действие группы Γ на X называется дискретным, если существуют множество I с действием на нем группы Γ и допустимое аффинное покрытие X множествами $X_i (i \in I)$, для которых выполнены следующие свойства:

- 1) $\gamma(X_i) = X_{\gamma(i)}$, при $\gamma \in \Gamma, i \in I$;
- 2) пусть $i \in I, \Gamma_i = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(i) = i\}$; группа Γ_i конечна;
- 3) если $\gamma \notin \Gamma_i$, то $X_i \cap X_{\gamma(i)} = \emptyset$; если $i \in I, j \in I$, то $X_{(j)} \cap X_{\gamma(i)} = \emptyset$ для всех $\gamma \in \Gamma$, кроме конечного числа;
- 4) пусть $i \in I$, покрытие $\bigcup_{\gamma} X_{\gamma(i)}$ множествами $X_{\gamma(i)}$ допустимо.

Пусть в ситуации определения $Y = G \backslash X$, Y_i — образ X_i в Y . Легко проверить, что можно единственным образом превратить Y в отделимое аналитическое пространство, а отображение $X \rightarrow Y$ — в морфизм так, чтобы покрытие Y множествами Y_i было допустимым и аффинным, а Y_i совпадало с $\Gamma_i \backslash X_i$ как пространство. Если φ — G -инвариантный морфизм из X в отделимое пространство Z , то, как легко проверить, существует единственный морфизм $\psi: Y \rightarrow Z$, согласованный с φ . Из предложения 6.2 вытекает, что дискретная подгруппа $\Gamma \subset GL(d, K)/K^*$, где K — локальное неархимедово поле, дискретно действует на Ω^d .

В) Униформизация модулярных многообразий. В этом разделе $K = k_\infty$. Если идеал $I \subset A$ удовлетворяет условию предложения 5.3, то положим $\mathcal{M}_I^d = (M_1^d \otimes k_\infty)_{an}$ (на самом деле, как видно из доказательства предложения 5.3, многообразие \mathcal{M}_I^d имеет смысл для любого ненулевого идеала I , $I \neq A$).

Пусть $\tilde{\Omega}^d = GL(d, k) \setminus (\Omega^d \times GL(d, \mathfrak{A}_f))$ (здесь $GL(d, \mathfrak{A}_f)$ рассматривается как дискретное множество). На $\tilde{\Omega}^d$ можно ввести левое действие группы $GL(d, \mathfrak{A}_f)/K^*$. Ω^d содержится в $\tilde{\Omega}^d$ в качестве открыто-замкнутого подмножества. Точно так же определим $\tilde{S}^d, \tilde{S}^d(\mathbf{R})$ и т. д.

Назовем метризованным A -модулем размерности d проективный A -модуль P размерности d вместе с нормой v на $P \otimes_A k_\infty$. Метризованные A -модули (P_1, v_1) и (P_2, v_2) назовем подобными, если существует изоморфизм $f: P_1 \simeq P_2$ такой, что v_1 и $f^*(v_2)$ пропорциональны. Пусть $I \subset A$ — идеал, $I \neq A, I \neq 0$. Структурой уровня I на d -мерном метризованном A -модуле (P, v) назовем изоморфизм $\psi: (I^{-1}/A)^d \simeq I^{-1}P/P$. Очевидно, множество d -мерных метризованных A -модулей со структурой уровня I с точностью до подобия можно отождествить с $U_I \setminus \tilde{S}^d(\mathbf{R})$.

Пусть (P, v) — метризованный A -модуль. Определим функцию \tilde{v} на $P \otimes k_\infty/P$ по формуле $\tilde{v}(u) = \inf_{v \in u} v(v)$. Пусть $x, y \in (I^{-1}/A)^d, x \neq 0, y \neq 0$. По-

ложим $\mu_{x,y} = \frac{\tilde{v}(\psi(x))}{\tilde{v}(\psi(y))}$. $\mu_{x,y}$ можно рассмотреть как функцию на $U_I \setminus \tilde{S}^d(\mathbf{R})$.

Предложение 6.5. Для того чтобы подмножество $H \subset U_I \setminus \tilde{S}^d(\mathbf{R})$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы функции $\mu_{x,y}|_H$ были ограниченными при $x, y \in (I^{-1}/A)^d, x \neq 0, y \neq 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть (P, v) — метризованный d -мерный A -модуль, e_1, \dots, e_d — базис $I^{-1}P/P, e'_i$ — наименьший по норме элемент в классе e_i, u — наименьший по норме элемент $I^{-1}P$. Пусть $\mu_{x,y} \leq c$ для всех x, y . Тогда $e'_i/|u| \leq c_1$ (c_1 зависит только от c). Введем на $P \otimes k_\infty$ норму v' по формуле $v'(\sum a_i e'_i) = \max |a_i|$. Тогда $v'(u) \geq 1/c_1$; по лемме Минковского

порядок $I^{-1}P / \sum_{i=1}^d A e'_i$ ограничен константой, зависящей только от c . С другой стороны, из леммы Минковского следует, что $\rho(\{v\}, \{v'\})$ ограничено константой, зависящей только от c (определение ρ см. в § 6 А). ■

Предложение 6.6. $I \subset A$ — идеал, $I \neq 0, I \neq A$. Тогда $U_I \setminus \tilde{\Omega}^d = \mathcal{M}_I^d$. Это отождествление согласовано с проекциями $\mathcal{M}_J^d \rightarrow \mathcal{M}_I^d$ при $J \subset I$, а также с действием группы $GL(d, \mathfrak{A}_f)$.

Доказательство. а) В § 3 было по существу получено отождествление $\mathcal{M}_I^d(\bar{k}_\infty) = U_I \setminus \tilde{\Omega}^d(\bar{k}_\infty)$, согласованное с проекциями и действием $GL(d, \mathfrak{A}_f)$ (а именно, точке Ω^d с координатами (z_1, \dots, z_d) соответствует решетка $\sum_{i=1}^d A z_i$ с естественной структурой уровня I). Легко проверить, что

отображение $\tilde{\Omega}^d(\bar{k}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}_I^d(\bar{k}_\infty)$ индуцировано морфизмом $\tilde{\Omega}^d \rightarrow \mathcal{M}_I^d$. Так как этот морфизм инвариантен относительно U_I , то ему соответствует морфизм $\varphi: U_I \setminus \tilde{\Omega}^d \rightarrow \mathcal{M}_I^d$.

б) Пусть $x \in U_I \setminus \tilde{\Omega}^d$, $y = \varphi(x)$, O_x и O_y — пополнения локальных колец многообразий $U_I \setminus \tilde{\Omega}^d$ и \mathcal{M}_I^d в точках x и y . Докажем, что $\varphi^*: O_y \rightarrow O_x$ — изоморфизм. Пусть $m_y \subset O_y$ — максимальный идеал, n — натуральное число. Над кольцом O_y/m_y^n имеется эллиптический A -модуль X со структурой уровня I . Пусть $f \in O_y/m_y^n[[z]]$ — формальный изоморфизм из аддитивного A -модуля в X (см. предложение 1.2). Так же, как в § 3, проверяется, что f — целая функция. Пусть O_y^{nr} — максимальное неразветвленное расширение O_y , Γ — множество нулей f в кольце O_y^{nr}/m_y^n . Γ является A -модулем, гомоморфизм $\Gamma \rightarrow O_y^{nr}/m_y^n$ инъективен, а его образ является решеткой. Таким образом, получается гомоморфизм $O_x \rightarrow O_y^{nr}/m_y^n$, инвариантный относительно $\text{Gal}(O_y^{nr}/O_y)$. Итак, построен гомоморфизм $\psi: O_x \rightarrow O_y$ такой, что $\varphi^*\psi = \text{id}$. Так как \mathcal{M}_I^d и $U_I \setminus \tilde{\Omega}^d$ — гладкие многообразия одинаковой размерности (см. предложение 5.4), то φ^* — изоморфизм.

Лемма. Пусть $\Sigma \subset \mathcal{M}_I^d$ — аффинное открытое подмножество. Тогда образ Σ в $U_I \setminus \tilde{S}^d(\mathbf{Q})$ ограничен.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $I = (\beta)$, $|\beta| > 1$. Пусть $x, y \in (I^{-1}/A)^d$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $f_{x,y}$ — функция на \mathcal{M}_I^d , равная отношению образов x и y на универсальном эллиптическом A -модуле, $c = \sup_{x,y} \sup_{\Sigma} |f_{x,y}|$. Каждому элементу $\Sigma(\bar{k}_\infty)$ соответствует d -мерная решетка $\Gamma \subset \bar{k}_\infty$ вместе с изоморфизмом $\psi: (I^{-1}/A)^d \simeq I^{-1}\Gamma/\Gamma$. Пусть $f(z) = z \prod_{\alpha \in \Gamma} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$. Пусть $\bar{\psi}(x) \in I^{-1}\Gamma$ — наименьший по модулю элемент в классе $\psi(x)$, u — наименьший по модулю элемент Γ , $u \neq 0$. Тогда $|f(\psi(x))| \geq |\psi(x)|$, $\left|f\left(\frac{u}{\beta}\right)\right| = \left|\frac{u}{\beta}\right| = \inf_{x \neq 0} \bar{\psi}(x)$. Поэтому $\left|\frac{\bar{\psi}(x)}{\bar{\psi}(y)}\right| \leq c$ при $x, y \in (I^{-1}/A)^d$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Остается воспользоваться предложением 6.5. ■

Из леммы следует, что $\varphi^{-1}(\Sigma)$ покрывается конечным числом аффинных множеств. Из основной теоремы [8] следует, что φ — изоморфизм. ■

§ 7. Униформизация Тэйта

Пусть O — полное дискретно нормированное кольцо над A , $m \subset O$ — максимальный идеал, K — поле частных O , K^s — сепарабельное замыкание K . В этом разделе $|\cdot|$ обозначает норму в K , а не в k_∞ .

Пусть $\varphi: A \rightarrow K\{\tau\}$ — эллиптический модуль ранга d . Будем говорить, что φ имеет стабильную редукцию, если существует эллиптический A -модуль $\varphi': A \rightarrow K\{\tau\}$ такой, что $\varphi' \simeq \varphi$, $\varphi'(A) \subset O\{\tau\}$ и редукция φ' по модулю m является эллиптическим A -модулем (т. е. существует $a \in A$ такое, что степень редукции $\varphi'(a)$ больше 1). Очевидно, что ранг редукции φ' не больше d . В случае равенства будем говорить, что φ имеет

хорошую редукцию. φ имеет хорошую редукцию тогда и только тогда, когда φ получается из некоторого эллиптического A -модуля над O путем расширения кольца скаляров.

Предложение 7.1. *Любой эллиптический A -модуль над K имеет потенциально стабильную редукцию.*

Доказательство. Пусть v — нормирование (аддитивное) в K . Положим $\omega(\sum a_i \tau^i) = \inf_{i > 0} \left\{ \frac{1}{p^i - 1} v(a_i) \right\}$. Пусть y_1, \dots, y_k — образующие кольца A , $r = \inf_{1 \leq j \leq k} \omega(\varphi(y_j))$. Если K' — конечное расширение K такое, что $r \cdot e(K'/K) \in \mathbb{Z}$ (где $e(K'/K)$ — индекс ветвления), то φ имеет над K' стабильную редукцию. ■

З а м е ч а н и е. Для модулей ранга 1 понятия стабильной и хорошей редукции совпадают.

Пусть X — эллиптический A -модуль над K . Назовем решеткой в X проективный $\text{Gal}(K^s/K)$ -инвариантный A -подмодуль конечного типа $\Gamma \subset X(K^s)$ такой, что в каждом круге содержится конечное число элементов Γ .

Предложение 7.2. *Множество классов изоморфизма эллиптических модулей ранга d над K находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов изоморфизма пар (X, Γ) , где X — эллиптический A -модуль над K ранга d_1 ($d_1 \leq d$) с потенциально хорошей редукцией, а Γ — решетка в X размерности $d - d_1$.*

Доказательство. 1) Так же, как в § 3, можно по паре (X, Γ) построить эллиптический A -модуль ранга d .

2) Пусть $\varphi: A \rightarrow O\{\tau\}$ — эллиптический A -модуль ранга d над K , а редукция φ по модулю t является эллиптическим модулем ранга d_1 . Из предложения 5.2 вытекает существование и единственность пары (ψ, u) , где $\psi: A \rightarrow O\{\tau\}$ — эллиптический A -модуль над O ранга d_1 , $u = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tau^i \in O\{\{\tau\}\}$, и $\psi(a) = \varphi(a)u$ при $a \in A$, $a_i \in t$, $a_i \rightarrow 0$.

Л е м м а. u — аналитический гомоморфизм.

Доказательство. Из соотношения $\varphi(a)u = u\psi(a)$ следует, что существуют k и s такие, что $k \geq 1$, $|a_i| \leq \max(|a_{i+1}|, \dots, |a_{i+k}|, |a_{i-1}|^{p^{k+1}}, \dots, |a_{i-s}|^{p^{k+s}})$ при $i > s$. Пусть $c_i = \sup_{j \geq i} |a_j|$. Так как $a_i \rightarrow 0$, то $c_i \leq \max_{1 \leq j \leq s} c_{i-j}$ при $i > s$.

Пусть $d_i = c_i^{p^{-i}}$. Тогда $d_i \leq \max_{1 \leq j \leq s} d_{i-j}^{p^k}$, $d_i < 1$ при $i > s$, поэтому $d_i \rightarrow 0$. ■

Пусть Γ — ядро гомоморфизма u . Ясно, что $\Gamma \subset K^s$. Если $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 0$, то $|\gamma| > 1$. Пусть $a \in A$, $|a|_{\infty} > 1$, образ a в O не равен нулю. Положим $f = \psi(a)$. Ясно, что $f^{-1}(\Gamma)/\Gamma \simeq [A/(a)]^d$, а ядро гомоморфизма $f^{-1}(\Gamma)/\Gamma \rightarrow \Gamma/f(\Gamma)$ изоморфно $[A/(a)]^{d_1}$. Поэтому $\Gamma/f(\Gamma) \simeq [A/(a)]^{d-d_1}$. Если $z \in K^s$, $|z| > 1$, то $|f(z)| = |z|^{a|d_1}$. Отсюда следует, что Γ — решетка размерности $d - d_1$.

3) Итак, получено взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфизма эллиптических A -модулей ранга d над K ,

имеющих стабильную редукцию, и множеством классов изоморфизма пар (X, Γ) , где X — эллиптический A -модуль над K ранга d_1 ($d_1 \leq d$) с хорошей редукцией, а Γ — решетка в X размерности $d - d_1$. Остается применить спуск Галуа. ■

§ 8. Комплексное умножение ($d=1$)

Теорема 1. *Схема M^1 является спектром кольца целых чисел максимального абелева расширения k , полностью распадающегося над ∞ . Действие \mathfrak{A}_f^*/k^* на M^1 совпадает с действием теории полей классов.*

Доказательство. Пусть $I \subset A$ — идеал, удовлетворяющий условию предложения 5.3. Из предложения 7.1 следует, что морфизм $M_I^1 \rightarrow \text{Спес } A$ конечный. Из предложения 5.4 следует, что M_I^1 — гладкая кривая, а морфизм $M_I^1 \rightarrow \text{Спес } A$ ветвится только над $V(I)$. Пусть $v \in \text{Спес.п } A$, $v \in V(I)$, π — простой элемент A_v . Из предложения 5.5 следует, что π действует на слой M_I^1 над v так же, как фробениус поля $A_v/(\pi)$. Поэтому каждая связная компонента M_I^1 инвариантна относительно \mathfrak{A}_f^* . С другой стороны, $M^1(k_\infty) = M^1(\bar{k}_\infty) = \mathfrak{A}_f^*/k^*$ (см. § 3), причем это отождествление согласовано с действием \mathfrak{A}_f^*/k^* . Поэтому M^1 связна, действие \mathfrak{A}_f^*/k^* на M^1 точное, $\mathfrak{A}_f^* \backslash M^1 = \text{Спес } A$. Остается воспользоваться теорией полей классов. ■

Следствие. *Над любым алгебраически замкнутым полем над A существуют эллиптические A -модули любого ранга.*

§ 9. Компактификация модулярных поверхностей ($d=2$)

А) Конструкция границы. Пусть X — эллиптический модуль над S . Обозначим через \bar{X} расслоение на проективные прямые над S , получающееся присоединением к X бесконечно удаленного сечения. Мультипликативная полугруппа A действует на X .

Функтор, сопоставляющий схеме S над A множество классов изоморфизма эллиптических A -модулей X ранга 1 над S , снабженных согласованными между собой структурами уровня I (для всех $I \subset A$, $I \neq 0$) и гомоморфизмом $k \rightarrow \text{Мог}(S, \bar{X})$, представим некоторой схемой N^1 .

На N^1 действует группа B , состоящая из матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $x \in \mathfrak{A}_f^*$, $y \in \mathfrak{A}_f$. Пусть $I \subset A$ — идеал, удовлетворяющий условию предложения 5.3, V_I — группа матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $x, y \in \hat{A}$, $x \equiv 1 \pmod{I}$, $y \equiv 0 \pmod{I}$, $N_I^1 \stackrel{\text{def}}{=} V_I \backslash N^1$. Легко проверить, что морфизм $N_I^1 \rightarrow M_I^1$ гладкий. Пусть \tilde{N}_I^1 — пополнение N_I^1 вдоль бесконечно удаленного сечения (мы будем рассматривать \tilde{N}_I^1 как схему, а не как формальную схему), $\hat{N}_I^1 \subset \tilde{N}_I^1$ — дополнение до бесконечно удаленного сечения, $\tilde{N}^1 = \varprojlim \tilde{N}_I^1$, $\hat{N}^1 = \varprojlim \hat{N}_I^1$. Пусть \tilde{M}^2 , \hat{M}^2 — схемы, индуцированные схемами \tilde{N}^1 , \hat{N}^1 относительно включения $B \subset GL(2, \mathfrak{A}_f)/k^*$.

Пусть $I \subset A$ — идеал, удовлетворяющий условию предложения 5.3, $\hat{M}_I^2 = U_I \setminus \tilde{M}^2$, $\hat{M}_I^2 = U_I \setminus \hat{M}^2$. Пусть O — полное дискретно нормированное кольцо над A , K — его поле частных.

Предложение 9.1. 1) Морфизм $\text{Спек } K \rightarrow M_I^2$ продолжается до морфизма $\text{Спек } O \rightarrow M_I^2$ тогда и только тогда, когда соответствующий эллиптический модуль над K имеет потенциально хорошую редукцию.

2) Существует единственный $GL(2, \mathfrak{A}_I)$ -инвариантный морфизм $s: \hat{M}^2 \rightarrow M^2$, индуцирующий взаимно однозначное отображение множества морфизмов $\text{Спек } O \rightarrow \hat{M}_I^2$ таких, что прообразом \hat{M}_I^2 является $\text{Спек } K$, на множество морфизмов $\text{Спек } K \rightarrow M_I^2$, не продолжающихся до морфизма $\text{Спек } O \rightarrow M_I^2$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Пусть морфизм $\text{Спек } K \rightarrow M_I^2$ не продолжается до морфизма $\text{Спек } O \rightarrow M_I^2$. Этому морфизму соответствует эллиптический A -модуль над K ранга 2, имеющий потенциально плохую редукцию, со структурой уровня I . Это то же самое (см. предложение 7.2), что эллиптический модуль X над K ранга 1 вместе с одномерной решеткой Γ в X такой, что $\text{Gal}(K^s/K)$ действует на $I^{-1}\Gamma/\Gamma$ тривиально, и эпиморфизмом $(I^{-1}/A)^2 \rightarrow I^{-1}\Gamma/\Gamma$ ($I^{-1}\Gamma$ — это, по определению, множество точек $X(K^s)$, которые при «умножении» на любой элемент $a \in I$ попадают в Γ). Всякий автоморфизм A -модуля $I^{-1}\Gamma$, тривиальный на $I^{-1}\Gamma/\Gamma$, тождественный; поэтому $I^{-1}\Gamma \subset X(K)$. Биекция 2) построена. Легко проверить, что она индуцирована морфизмом $\hat{M}^2 \rightarrow M^2$. ■

Следствие. Пусть $v \in \text{Спек } A$, $v \notin V(I)$, Y — слой M_I^2 над v , \bar{Y} — гладкая компактификация Y . Пополнение \bar{Y} вдоль $\bar{Y} - Y$ канонически изоморфно слою \hat{M}_I^2 над v .

Б) Компактификация M_I^2 .

Предложение 9.2. Пусть X_1, X_2 — нормальные поверхности, $\pi_i: X_i \rightarrow \text{Спек } A$ — собственные морфизмы, $D_i \subset X_i$ — замкнутые подсхемы, конечные над $\text{Спек } A$, $\varphi: X_1 - D_1 \rightarrow X_2 - D_2$ — конечный морфизм над $\text{Спек } A$. Тогда φ продолжается до конечного морфизма $X_1 \rightarrow X_2$.

Доказательство. Пусть $G \subset X_1 \times X_2$ — график φ , \bar{G} — его замыкание. Так как G конечно над $X_1 - D_1$ и $X_2 - D_2$, то G замкнуто внутри $(X_1 - D_1) \times X_2$ и $X_1 \times (X_2 - D_2)$. Поэтому $\bar{G} - G$ конечно над $\text{Спек } A$. Отсюда следует, что проекция $\bar{G}_1 \rightarrow X_1$ — конечный морфизм и бирациональный изоморфизм, т. е. $\bar{G} \approx X_1$. ■

Предложение 9.3. 1) Пусть $I \subset A$ — идеал, удовлетворяющий условию предложения 5.3. Существует единственная (с точностью до изоморфизма) гладкая поверхность \bar{M}_I^2 , содержащая M_I^2 в качестве открытого всюду плотного множества, такая, что морфизм $M_I^2 \rightarrow \text{Спек } A$ продолжается до собственного морфизма $\bar{M}_I^2 \rightarrow \text{Спек } A$, а $\bar{M}_I^2 - M_I^2$ конечно над $\text{Спек } A$.

2) Если $J \subset I$, то проекция $M_J^2 \rightarrow M_I^2$ продолжается до конечного морфизма $\bar{M}_J^2 \rightarrow \bar{M}_I^2$. Положим $\bar{M}^2 = \varprojlim \bar{M}_I^2$. Действие $GL(2, \mathfrak{A}_I)$ на M^2 продолжается до действия на \bar{M}^2 .

3) Пополнение \overline{M}_I^2 вдоль $\overline{M}_I^2 - M_I^2$ канонически изоморфно \widehat{M}_I^2 . В частности, морфизм $\overline{M}_I^2 \rightarrow \text{Спес } A$ гладкий над $\text{Спес } A - V(I)$.

Доказательство. Пусть $a \in A$, $|a| > 1$, $k = \log_p |a|$. Пусть в универсальном эллиптическом модуле над M_I^2 образ a имеет вид $\sum \alpha_i \tau^i$.

Положим $t = \alpha_k^{a^{k+1}} / \alpha_{2k}$. Мы получили морфизм $\varphi: M_I^2 \rightarrow \text{Спес } A[t]$. Из предложения 9.1 следует, что φ — конечный морфизм. Легко проверить, что φ плоский. С другой стороны, легко построить конечный плоский морфизм

$\pi: M_I^2 \rightarrow \text{Спес } A \left[\left[\frac{1}{t} \right] \right]$ такой, что $\varphi \circ \pi$ совпадает с композицией $\widehat{M}_I^{2\pi'} \rightarrow \text{Спес } A \left(\left(\frac{1}{t} \right) \right) \rightarrow \text{Спес } A[t]$ (здесь $A \left(\left(\frac{1}{t} \right) \right)$ — локализация $A \left[\left[\frac{1}{t} \right] \right]$ по $\frac{1}{t}$, а π' получается из π заменой базы). Возникает морфизм $\sigma: \widehat{M}_I^2 \rightarrow M_I^2 \times_{\text{Спес } A[t]} \text{Спес } A \left(\left(\frac{1}{t} \right) \right)$.

Лемма. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Объявим подмножества $\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}$ открытыми. Пусть O_X — пучок колец на X такой, что $H^0(\{1, 2\}, O_X) = A[[y]]$, $H^0(\{3, 2\}, O_X) = A[y, y^{-1}]$, $H^0(\{2\}, O_X) = A((y))$. Категория квазикогерентных O_X -модулей эквивалентна категории $A[y]$ -модулей.

Доказательство. 1) Пусть M — модуль над $A[y]$. Положим $H^0(U, \overline{M}) = H^0(U, O_X) \otimes_{A[y]} M$. \overline{M} — квазикогерентный пучок. $M \rightarrow \overline{M}$ — функтор. Остается доказать, что функториальные гомоморфизмы $M \rightarrow H^0(X, \overline{M})$ и $\widetilde{H^0(X, F)} \rightarrow F$ (где F — квазикогерентный пучок) являются изоморфизмами.

2) $0 \rightarrow A[y] \rightarrow A[y, y^{-1}] \times A[[y]] \rightarrow A((y)) \rightarrow 0$ — точная последовательность плоских $A[y]$ -модулей, поэтому $H^0(X, \overline{M}) = M$, $H^1(X, \overline{M}) = 0$.

3) Ограничение гомоморфизма $\widetilde{H^0(X, F)} \rightarrow F$ на $\{2, 3\}$ — изоморфизм.

4) Если $\text{Supp } F \subset \{1\}$, то $\widetilde{H^0(X, F)} \rightarrow F$.

5) Если $H^0(X, F) = 0$, то $F = 0$ (следует из 3), 4)).

6) Пусть $0 \rightarrow G_1 \rightarrow \widetilde{H^0(X, F)} \rightarrow F \rightarrow G_2 \rightarrow 0$ — точная последовательность.

Тогда $H_0(X, G_1) = 0$, поэтому $G_1 = 0$. Так как $H^1(X, \widetilde{H^0(X, F)}) = 0$, то $H^0(X, G_2) = 0$. Поэтому $G_2 = 0$.

Остается проверить, что σ — изоморфизм. Легко проверить, что $\deg \varphi = \deg \pi$ (надо воспользоваться следствием из предложения 9.1). Из предложения 9.1 следует, что слои σ над замкнутыми точками состоят из одной точки (но не обязательно приведены). С другой стороны, можно проверить, что ограничение σ на каждую связную компоненту \widehat{M}_I^2 является замкнутым вложением. ■

§ 10. Связь с автоморфными формами ($d=2$)

А) Этальные когомологии жестких аналитических пространств. Пусть K — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения,

K^s — сепарабельное замыкание K , n — натуральное число такое, что $\frac{1}{n} \in K$, X — жесткое аналитическое пространство над K .

Определение. 1) Множество пар (L, φ) , где L — обратимый пучок на X , $\varphi: O_X \xrightarrow{\sim} L^n$, обозначается через $H_{\text{et}}^1(X, \mu_n)$ (на $H_{\text{et}}^1(X, \mu_n)$ имеется структура группы).

2) $H_{\text{et}}^0(X, \mathbf{Z}/(n)) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{жесткие}}^0(X, \mathbf{Z}/(n))$, $H_{\text{et}}^0(X, \mu_n) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{жесткие}}^0(X, \mu_n)$ (в правых частях этих равенств $\mathbf{Z}/(n)$ — постоянный пучок, а μ_n — пучок корней степени n из единицы; это — пучки в жесткой топологии).

3) $H_{\text{et}}^1(X \otimes K^s, \mu_n) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim H_{\text{et}}^1(X \otimes L, \mu_n)$, где $K \subset L \subset K^s$, $[L:K] < \infty$.

Точно так же определяются $H_{\text{et}}^0(X \otimes K^s, \mu_n)$ и $H_{\text{et}}^0(X \otimes K^s, \mathbf{Z}/(n))$ (на всех этих группах действует $\text{Gal}(K^s/K)$).

4) $H_{\text{et}}^1(X \otimes K^s, \mathbf{Z}/(n)) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{et}}^1(X \otimes K^s, \mu_n) \otimes \mu_n^{-1}$ (здесь μ_n^{-1} — это $\text{Gal}(K^s/K)$ — модуль гомоморфизмов из группы корней степени n из единицы поля K в $\mathbf{Z}/(n)$).

Свойства «эталльных когомологий».

1) Если $X = Y_{\text{an}}$, где Y — проективная схема над K , то «когомологии» X совпадают с когомологиями Y (это следует из теоремы типа GAGA, см. [11], [12]).

2) Существует точная последовательность

$$0 \rightarrow H^0(X, \mu_n) \rightarrow H^0(X, O_X^*) \xrightarrow{n} H^0(X, O_X^*) \rightarrow H^1(X, \mu_n) \rightarrow H^1(X, O_X^*) \xrightarrow{n} H^1(X, O_X^*)$$

(здесь $H^i(X, O_X^*)$ — жесткие когомологии).

3) Пусть множества X_i образуют допустимое открытое покрытие X , размерность нерва которого не больше 1. Существует точная последовательность

$$0 \rightarrow H^0(X, \mu_n) \rightarrow \prod_i H^0(X_i, \mu_n) \rightarrow \prod_{i \neq j} H^0(X_i \cap X_j, \mu_n) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mu_n) \rightarrow \prod_i H^1(X_i, \mu_n) \rightarrow \prod_{i \neq j} H^1(X_i \cap X_j, \mu_n).$$

4) Если $X_1 \rightarrow X_2$ — конечный этальный морфизм жестких аналитических пространств с группой Галуа G , порядок которой взаимно прост с n , то $H^1(X_2, \mu_n) = H^1(X_1, \mu_n)^G$.

Предложение 10.1. Пусть $z_i \in K$, $c_i \in K^s$ ($1 \leq i \leq k$), $c \in K^s$. Пусть $|z_i| < |c|$, $0 < |c_i| < |c|$, $|z_i - z_j| > |c_i|$ при $i \neq j$. Положим $X = \{z \mid |z| \leq |c|, |z - z_i| \geq |c_i|\}$. Тогда $H^0(X \otimes K^s, \mathbf{Z}/(n)) = \mathbf{Z}/(n)$, $H^1(X \otimes K^s, \mu_n) \simeq (\mathbf{Z}/(n))^h$ ($\text{Gal}(K^s/K)$ действует тривиально).

Доказательство. а) Круг радиуса $|c|$ является объединением кругов радиуса $|c_i|$ и множества X . Так как круг связан, окружности, по которым пересекаются X и круги радиуса $|c_i|$, связны, то X связно. Аналогично, $X \otimes L$ связно, если L — конечное расширение K .

б) $H^1(X, O_X^*) = 0$, так как всякий дивизор на X главный. Множество рациональных функций без полюсов на X всюду плотно в $H^0(X, O_X)$. Ясно,

что если $f \in H^0(X, O_X)$ и $\sup_{z \in X} |f(z) - 1| < 1$, то $f = g^n$, где $g \in H^0(X, O_X^*)$.

Поэтому всякий элемент $H^0(X, O_X^*) \otimes \mathbf{Z}/(n)$ представлен рациональной функцией. Легко проверить, что если f — рациональная функция, дивизор которой на \mathbf{P}_K^1 содержится в одном из k маленьких кружков или вне большого круга, то существует $c \in K$ такое, что $\sup_{z \in X} |cf(z) - 1| < 1$. Получен эпимор-

физм $\varphi: (\mathbf{Z}/(n))^k \rightarrow H^1(X, \mu_n)/[K^*/(K^*)^n]$. Пусть X_i — окружность радиуса $|c_i|$. Рассмотрим гомоморфизм $H^1(X, \mu_n) \rightarrow H^1(X_i, \mu_n)$. Для того чтобы доказать, что φ — изоморфизм, достаточно проверить, что $H^1(X_i, \mu_n)/[K^*/(K^*)^n] \simeq \mathbf{Z}/(n)$ при $1 \leq i \leq k$. Это следует из того, что z^m не является n -й степенью в

$K\{z, z^{-1}\}$ при $n \nmid m$ (действительно, если бы $f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu \in K\{z, z^{-1}\}$, $f^n = z^m$,

то $\max_\nu |a_\nu| = 1$; приведем равенство $f^n = z^m$ по модулю максимального идеала и получим противоречие). Итак, получена точная последовательность $0 \rightarrow K^*/(K^*)^n \rightarrow H^1(X, \mu_n) \rightarrow (\mathbf{Z}/(n))^k \rightarrow 0$, откуда $H^1(X \otimes K^s, \mu_n) \simeq (\mathbf{Z}/(n))^k$. ■

Б) Когомологии Ω^2 . Пусть C — абелева группа. 1-коцепью с коэффициентами в C на графе называется антисимметрическая функция на множестве ориентированных ребер графа, принимающая значения в C . 1-коцепь называется гармонической, если сумма ее значений на всех ребрах, выходящих из одной и той же вершины графа, равна 0.

Предложение 10.2. $H^0(\Omega^2 \otimes k_\infty^s, \mathbf{Z}/(n)) = \mathbf{Z}/(n) \cdot H^1(\Omega^2 \otimes k_\infty^s, \mu_n)$ изоморфно группе гармонических 1-коцепей на S^2 с коэффициентами в $\mathbf{Z}/(n)$ (изоморфизм согласован с действием $GL(2, k_\infty)$; действие $\text{Gal}(k_\infty^s/k_\infty)$ тривиально).

Доказательство (см. § 6 А)). Пусть $0 < \epsilon < 1$, $\Delta_1 \subset S^2$, $\Delta_2 \subset S^2$ — симплексы, $F = U_{\Delta_1}^\epsilon \cap U_{\Delta_2}^\epsilon$; F изоморфно пространству X , изученному в предложении 10.1. Так как F абсолютно неприводимо, а $S^2(\mathbf{R})$ связно, то Ω^2 связно. Опишем $H^1(F \otimes k_\infty^s, \mu_n)$ в инвариантных терминах. Пусть ν — нормирование (аддитивное) в k_∞^s такое, что $\nu(k_\infty^*) = \mathbf{Z}$. Пусть $k_\infty \subset L \subset k_\infty^s$, $[L : k_\infty] < \infty$, f — голоморфная обратимая функция на $F \otimes L$. Существует функция $\bar{f}: \lambda(F) \rightarrow \mathbf{Q}$ такая, что $\bar{f} \circ \lambda = \nu \circ f$. Функция \bar{f} обладает следующими свойствами:

1) на каждом ребре (пересекающемся с $\lambda(F)$) \bar{f} линейна, и ее «производная» — целое число;

2) если $x \in \lambda(F) \cap S^2$, то сумма «производных» по направлениям, выходящим из x , равна 0.

Всякая функция на $\lambda(F)$, удовлетворяющая 1)–2), равна \bar{f} для некоторого L и функции f на $F \otimes L$. Функции f на $F \otimes L$ соответствует нулевой класс в $H^1(F \otimes k_\infty^s, \mu_n)$ тогда и только тогда, когда «производная» \bar{f} на каждом ребре делится на n . ■

В) Когомологии $\overline{M}^2 \otimes k_\infty^s$:

Предложение 10.3. Пусть Π — представление $GL(2, k_\infty)$ в пространстве локально постоянных функций $P^1(k_\infty) \rightarrow Q$, профакторизованном по константам, A_0 — пространство параболических автоморфных форм на $GL(2, k) \setminus GL(2, \mathfrak{A})$ (см. [10]), $V = \text{Hom}_{GL(2, k_\infty)}(\pi, A_0)$.

Пусть $l \neq p$, $W^\infty \rightarrow 2$ -мерное l -адическое представление $\text{Gal}(k_\infty/k_\infty)$ такое, что существует нерасщепляющаяся точная последовательность $0 \rightarrow Q_l \rightarrow W^\infty \rightarrow Q_l(-1) \rightarrow 0$. Тогда $H^1(\overline{M}^2 \otimes k_\infty^s, Q_l) \simeq V \otimes W^\infty$ (изоморфизм $GL(2, \mathfrak{A}_l) \times \text{Gal}(k_\infty^s/k_\infty)$ -модулей), $H^0(\overline{M}^2 \otimes k_\infty^s, Q_l)$ изоморфно пространству локально постоянных функций $k^* \setminus \mathfrak{A}_l^* \rightarrow Q_l$ ($\text{Gal}(k_\infty^s/k_\infty)$ действует тривиально, а $g \in GL(2, \mathfrak{A}_l)$ действует по формуле $(gf)(x) = f(x \det g)$).

Доказательство. а) Пусть $I \subset A$ — идеал, $I \neq 0$, $I \neq A$. Образы множеств U_Δ^c и их $GL(2, \mathfrak{A}_l)$ -сдвигов образуют допустимое открытое покрытие $\tilde{\Omega}^2$. Ясно, что стабилизатор в U_I любой вершины или ребра \tilde{S}^2 является p -группой. Воспользовавшись свойствами 3) — 4) «эталных когомологий», получим изоморфизм $H^0(\mathcal{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, Z/(n)) = H^0(U_I \setminus \tilde{S}^2(\mathbf{R}), Z/(n))$ и точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(U_I \setminus \tilde{S}^2(\mathbf{R}), Z/(n)) \rightarrow H^1(\mathcal{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, Z/(n)) \rightarrow [H^1(\tilde{\Omega} \otimes k_\infty^s, \mu_n)]^{U_I} \otimes \mu_n^{-1} \rightarrow 0,$$

$H^1(\tilde{\Omega} \otimes k_\infty^s, \mu_n)$ совпадает (см. предложение 10.2) с группой гармонических 1-коцепей на \tilde{S}^2 с коэффициентами в $Z/(n)$.

б) Пусть $I_0 \subset \text{Gal}(k_\infty^s/k_\infty)$ — группа инерции. Отображение $I_0 \times H^1(\mathcal{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, Z/(n)) \rightarrow H^1(U_I \setminus \tilde{S}^2(\mathbf{R}), Z/(n))$, заданное формулой $(x, \sigma) \mapsto \sigma x - x$, билинейно, и $\text{Gal}(k_\infty^s/k_\infty)$ инвариантно. I_0/I_0^n и μ_n изоморфны как $\text{Gal}(k_\infty^s/k_\infty)$ -модули. Поэтому возникает гомоморфизм

$$[H^1(\tilde{\Omega} \otimes k_\infty^s, \mu_n)]^{U_I} \rightarrow H^1(U_I \setminus \tilde{S}^2(\mathbf{R}), Z/(n)).$$

Легко проверить, что этот гомоморфизм сопоставляет U_I -инвариантной гармонической 1-коцепи на \tilde{S}^2 класс когомологий соответствующей коцепи на $U_I \setminus \tilde{S}^2$.

в) Пусть K — полное неархимедово поле, Y — гладкая проективная аналитическая кривая над K , $D \subset Y$ — конечное подпространство. Легко показать, что $H^0(Y, Z/(n)) = H^0(Y - D, Z/(n))$, $H^1(Y \otimes k_\infty^s, \mu_n) \subset H^1((Y - D) \otimes k_\infty^s, \mu_n)$. Точнее, если $Y - D = \bigcup_{i \in N} Y_i$ — допустимое аффинное покрытие такое, что Y_i для каждого $i \in N$ пересекается лишь с конечным числом множеств покрытия, то

$$\begin{aligned} H^1(Y \otimes k_\infty^s, \mu_n) &= \\ &= \bigcup_{\Phi \subset N} \text{Ker} [H^1((Y - D) \otimes k_\infty^s, \mu_n) \rightarrow H^1((\bigcup_{i \in N - \Phi} Y_i) \otimes k_\infty^s, \mu_n)] \end{aligned}$$

(где Φ пробегает конечные подмножества N). Поэтому

$$H^0(\overline{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, Z/(n)) = H^0(U_I \setminus \tilde{S}^2(\mathbf{R}), Z/(n)),$$

а $H^1(\overline{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, \mu_n)$ состоит из тех элементов $H^1(M_I^2 \otimes k_\infty^s, \mu_n)$, для которых соответствующая гармоническая 1-коцепь финитна по модулю U_I (или, что то же самое, параболична).

г) Переходя к пределу, получим изоморфизм $H^0(\overline{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, \mathbf{Q}_I) = H^0(U_I \setminus \tilde{S}(\mathbf{R}), \mathbf{Q}_I)$ и точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(U_I \setminus \tilde{S}_0^2(\mathbf{R}), \mathbf{Q}_I) \rightarrow H^1(\overline{M}_I^2 \otimes k_\infty^s, \mathbf{Q}_I) \rightarrow V_I \otimes \mathbf{Q}_I(-1) \rightarrow 0$$

где V_I — пространство параболических U_I -инвариантных гармонических 1-коцепей на \tilde{S}^2 с коэффициентами в \mathbf{Q} . Легко показать, что построенный в б) гомоморфизм $U_I \rightarrow H^1(U_I \setminus \tilde{S}^2(\mathbf{R}), \mathbf{Q})$ является изоморфизмом. Отсюда следует, что $H^1(\overline{M}^2 \otimes k_\infty^s, \mathbf{Q}_I) \simeq V \otimes W^\infty$, где $\overline{V} = \varinjlim V_I$.

д) Остается доказать, что $\overline{V} = V$. Для этого достаточно проверить, что пространство гармонических 1-коцепей на S^2 с коэффициентами в \mathbf{Q} канонически изоморфно $\text{Hom}(\Pi, \mathbf{Q})$. Этот изоморфизм строится следующим образом. Пусть x, y — соседние точки S^2 , $P_{x,y}$ — множество точек $z \in \mathbf{P}^1(k_\infty)$ таких, что y находится между x и z . Если μ — распределение на $\mathbf{P}^1(k_\infty)$ со значениями в \mathbf{Q} такое, что $\int_{\mathbf{P}^1(k_\infty)} \mu = 0$, то 1-коцепь l_μ , принимающая на ребре \overrightarrow{xy} значение $\int_{P_{x,y}} \mu$, гармонична. ■

§ 11. Основная теорема

На $H^*(\overline{M}^2 \otimes k^s, \mathbf{Q}_I)$ действует группа $\text{Gal}(k^s/k) \times GL(2, \mathfrak{A}_f)$ (группа $GL(2, \mathfrak{A}_f)$ действует на \overline{M}^2 слева, а на когомологии справа; мы будем рассматривать на когомологиях соответствующее левое действие). Положим $V \otimes \overline{\mathbf{Q}} = \bigoplus_{i \in T} V_i$, где V_i — неприводимые представления $GL(2, \mathfrak{A}_f)$ (в [10] доказано, что $V_i \neq V_j$ при $i \neq j$). Из предложения 10.3 следует, что $H^1(\overline{M}^2 \otimes k_\infty^s, \overline{\mathbf{Q}}_I) \simeq \bigoplus_i V_i \otimes W_i$, где W_i — представление $\text{Gal}(k^s/k)$ в пространстве $\overline{\mathbf{Q}}_I^2$. Пусть $V_i = \bigotimes_{\sigma \in \text{Спект } A} \overline{V}_i^\sigma$, W_i^σ — ограничение W_i на $\text{Gal}(k_\sigma^s/k_\sigma)$, \hat{V}_i^σ — представление, контраградиентное к V_i^σ .

Теорема 2. 1) $H^0(\overline{M}^2 \otimes k^s, \mathbf{Q}_I) = H^0(M^1 \otimes k^s, \mathbf{Q}_I)$ (группа $GL(2, \mathfrak{A}_f)$ действует на M^1 с помощью гомоморфизма $\det: GL(2, \mathfrak{A}_f) \rightarrow \mathfrak{A}_f^*$).

2) Для любых $i \in T, v \in \text{Спект } A$ таких, что V_i^σ — представление класса 1, W_i^σ «совпадает» с \hat{V}_i^σ (т. е. W_i^σ неразветвлено и $L(s, W_i^\sigma) = L(s - \frac{1}{2}, \hat{V}_i^\sigma)$).

Доказательство. 1) В § 9 А) было определено вложение $M^1 \rightarrow \overline{M}^2$, согласованное с действием группы $B \subset GL(2, \mathfrak{A}_f)$. Из предложения 10.3 следует, что соответствующий гомоморфизм $H^0(\overline{M}^2 \otimes k_\infty^s, \mathbf{Q}_I) \rightarrow H^0(M^1 \otimes k_\infty^s, \mathbf{Q}_I)$ является изоморфизмом.

2) Пусть $L(s, \hat{V}_i^\sigma) = (1 - \mu_1 q^{-s})^{-1} (1 - \mu_2 q^{-s})^{-1}$. Точно так же, как в [14],

доказывается, что W_i^v неразветвлено и каждое собственное значение фробениуса (арифметического) на W_i^v совпадает либо с $\mu_1^{-1}q^{-1/2}$ либо с $\mu_2^{-1}q^{-1/2}$. Докажем, что если одно из собственных значений фробениуса совпадает с $\mu_1^{-1}q^{-1/2}$ то другое равно $\mu_2^{-1}q^{-1/2}$. Как известно, $\hat{V}_i \simeq V_j$ для некоторого $j \in T$; если ограничение V_i на центр группы $GL(2, \mathfrak{A}_j)$ кратно характеру $\omega \circ \det$, то $\hat{V}_i \simeq V_i \otimes \omega^{-1}$ (см. [10]). Из свойств \cup -произведения следует, что одно из собственных значений фробениуса на W_j^v совпадает с $\mu_1 q^{-1/2}$. Пусть $s \in \mathbb{H}^0(\bar{M}^2 \otimes k^s, \bar{Q}_l)$, $s \neq 0$, $gs = \omega(\det g)s$ при $g \in GL(2, \mathfrak{A}_j)$. Умножение на s индуцирует автоморфизм $H^1(\bar{M}^2 \otimes k_{\text{cc}}^s, \bar{Q}_l)$. Из утверждения 1) и теоремы 1 следует, что одно из собственных значений фробениуса на W_i^v совпадает с $\mu_1 q^{-1/2} \omega(\pi)$, где π — простой элемент A_v . Но $\omega(\pi) = \mu_1^{-1} \mu_2^{-1}$. ■

З а м е ч а н и е. В работе [14] действие $GL(2, \mathfrak{A}_j)$ отличается от действия, описанного в § 5 Г), на внешний автоморфизм $GL(2, \mathfrak{A}_j)$. Этим объясняется различие формулировок теоремы 2 и соответствующей теоремы в [14].

(Поступила в редакцию 17/XII 1973 г.)

Литература

1. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, Теория представлений и автоморфные функции (обобщенные функции, вып. 6), Москва изд-во «Наука», 1966.
2. Д. Мамфорд, Абелевы многообразия, Москва, изд-во «Мир», 1971.
3. Д. Мамфорд, Аналитическая конструкция кривых с вырожденной редукцией над полными локальными кольцами, Успехи матем. наук, XXVII, вып. 6 (168) (1972), 181—221.
4. И. И. Пятецкий-Шапиро, Индуцированные кольца и редукция полей модулярных функций, Изв. АН СССР, серия матем., 34 (1970), 532—546.
5. F. Bruhat, T. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, Publ. Math., IHES, Paris, 41 (1972).
6. P. Deligne, Formes modulaires et représentations l -adiques, Lect. Notes Math., № 179 (1971), Berlin, Springer-Verlag.
7. A. Fröhlich, Formal groups, Lect. Notes Math., № 74 (1968), Berlin, Springer-Verlag.
8. H. Grauert, L. Gerritzen, Die Azyklizität der affinoider Überdeckungen. Global Analysis, Papers in Honour of Kodaira, University of Tokyo Press, Princeton University Press.
9. O. Goldman, N. Iwahori, The space of p -adic norms, Acta math., 109, № 3—4 (1963), 137—177.
10. H. Jacquet, R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lect. Notes Math., № 114 (1970), Berlin, Springer-Verlag.
11. R. Kiehl, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Invent. Math., 2 (1967), 119—214.
12. R. Kiehl, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Invent. Math., 2 (1967), 256—273.
13. J. Lubin, J. Tate, Formal moduli for one-parameter formal Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), 49—60.
14. I. I. Piateckii-Shapiro, Zeta-functions of modular curves (препринт), Москва, институт прикладной математики, 1972.