

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Gorbachev,
A. L. Mikhailov, Stress concentration tensor for
the case of N -dimensional elastic space with a
spherical inclusion, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1.*
Mat. Mekh., 1993, Number 2, 78–83

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

March 23, 2025, 08:02:57



УДК 539.219.2

В. И. Горбачев, А. Л. Михайлов

ТЕНЗОР КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ N -МЕРНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Даже при простейших видах нагружения тела с концентратором вблизи концентратора реализуется сложное напряженное состояние, что приводит к мысли об использовании тензорных методов для описания явления концентрации напряжений. При этом напряжения $\underline{\sigma}$ в теле с концентратором можно выразить через напряжения $\underline{\tau}$ в теле без концентратора по формуле $\underline{\sigma} = \hat{A}\underline{\tau}$, где \hat{A} в общем случае определяющих соотношений является нелинейным оператором [1]. В упругом случае \hat{A} — интегральный оператор, который можно разложить в ряд по градиентам от напряжений $\underline{\tau}$ [2]. Коэффициентами этого ряда являются тензоры ранга $q+4$ ($q=0, 1, \dots$), которые называются тензорами концентрации q -го порядка. При $q>0$ они учитывают влияние градиентов q -го порядка от напряжений $\underline{\tau}$ на концентрацию напряжений.

Тензор концентрации нулевого порядка (в дальнейшем просто тензор концентрации) является тензором четвертого ранга и учитывает влияние только самих напряжений $\underline{\tau}$ на напряжения $\underline{\sigma}$. В общем случае он зависит от соотношения упругих свойств их материалов, а также от типа рассматриваемой краевой задачи. Однако если концентратор расположен достаточно далеко от границы тела и его характерные размеры существенно меньше характерных размеров тела, то зависимость от геометрии тела и типа краевой задачи практически не сказывается. Это заключение представляет собой принцип Сен-Венана. Следовательно, вместо реального конечного тела можно рассматривать бесконечное упругое тело с концентратором, а граничное условие на поверхности тела заменить требованием того, чтобы напряжения стремились к заданным постоянным значениям по мере удаления от концентратора [3].

Таким образом, задача вычисления тензора концентрации напряжений сводится к задаче о распределении напряжений в бесконечном упругом теле с концентратором при заданных постоянных напряжениях на бесконечности. Первая такая задача в полном объеме была рассмотрена Эшелби [4]. В предлагаемой нами работе найдено явное выражение для тензора концентрации напряжений в случае N -мерного упругого шарового включения в бесконечном N -мерном упругом пространстве.

1. Постановка задачи о тензоре концентрации. Рассмотрим бесконечную упругую среду с одиночным концентратором объема V^+ , ограниченного поверхностью S . Пусть \underline{J}^\pm и \underline{C}^\pm — взаимно обратные тензоры упругости и податливости материалов концентратора (+) и среды (—). На бесконечности задан постоянный тензор напряжений $\underline{\tau}$. Требуется найти напряжения $\underline{\sigma}$ в среде с концентратором.

Искомые напряжения являются решением следующей задачи:

$$\sigma_{ij,j}^\pm = 0, \quad \sigma_{ij}^\pm = C_{ijkl}^\pm \varepsilon_{kl}^\pm, \quad \varepsilon_{kl}^\pm = \Delta_{klmn} u_{m,n}^\pm \quad (x \in V^+ \cup V^-), \quad (1)$$

$$[u_i]_S = 0, \quad [\sigma_{ij} n_j]_S = 0, \quad \sigma_{ij}^- \rightarrow \tau_{ij} \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x_i x_i} \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Здесь Δ — единичный тензор четвертого ранга, \mathbf{n} — единичная нормаль к S , $[\sim]_S$ обозначает скачок заключенной в скобках величины.

Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$u_i(x) = v_i(x) + u_i^{(pq)}(x) e_{pq}, \quad (3)$$

где $u_i^{(pq)}$ — дополнительные перемещения, обусловленные наличием концентратора, а $v_i = e_{ij}x_j$ и $e_{ij} = J_{ijkl}^{-1} \tau_{kl} = \text{const}$ — перемещения и деформации в среде без концентратора.

Вводя дополнительные деформации $\varepsilon_{ij}^{(pq)} = \Delta_{ijkl} u_{k,l}^{(pq)}$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(pq)} = C_{ijkl} e_{kl}^{(pq)}$, получим из (3) формулы для деформаций и напряжений в среде с включением $\varepsilon_{ij} = B_{ijkl}(x) e_{kl}$, $\sigma_{ij} = A_{ijkl}(x) \tau_{kl}$; B_{ijkl} и A_{ijkl} — компоненты тензоров концентрации деформаций и напряжений:

$$B_{ijkl} = \Delta_{ijkl} + \varepsilon_{ij}^{(kl)}, \quad A_{ijkl} = (C_{ijpq} + \sigma_{ij}^{(pq)}) J_{pqkl}^{-1}. \quad (4)$$

Из (1), (2) следует задача для новых неизвестных величин:

$$\sigma_{i,j}^{(pq)\pm} = 0, \quad [u_i^{(pq)}]_S = 0, \quad [\sigma_{ij}^{(pq)} n_j]_S = \kappa_{ijpq} n_j,$$

$$\sigma_{ij}^{(pq)-} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \text{ где } \kappa_{ijpq} = C_{ijpq}^+ - C_{ijpq}^-.$$

Эшелби [4] показал, что $\sigma_{ij}^+ = \text{const}$, поэтому $\sigma_{ij}^{(pq)+} = \vartheta_{ijpq} = \text{const}$. При этом дополнительные перемещения внутри включения будут линейными функциями координат $u_i^{(pq)+} = J_{ijst}^+ \vartheta_{stpq} x_j$. В силу условия непрерывности дополнительных перемещений $u_i^{(pq)-}$ на границе контакта S

$$u_i^{(pq)-} = J_{ijst}^+ \vartheta_{stpq} y_i, \quad y \in S.$$

С другой стороны, дополнительные усилия на S будут равны $P_i^{(pq)} = \sigma_{ij}^{(pq)} n_j|_S = (\kappa_{ijpq} + \vartheta_{ijpq}) n_j$, где κ_{ijpq} постоянны.

Из этих рассуждений заключаем, что если на границе эллипсоидальной полости в бесконечной среде заданы перемещения граничных точек вида $u_i|_S = \gamma_{ij} y_j$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \text{const}$, то реактивный вектор усилий на границе полости определяется по формуле $P_i = \lambda_{ij} n_j(y)$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const}$. Верно и обратное утверждение.

Очевидно, что между тензорами γ и λ должна существовать связь, аналогичная закону Гука для упругих тел:

$$\underline{\lambda} = \underline{C}^{(f)} \underline{\gamma}, \quad \underline{\gamma} = \underline{J}^{(f)} \underline{\lambda}, \quad (5)$$

где $\underline{C}^{(f)}$ и $\underline{J}^{(f)}$ — взаимно обратные тензоры, имеющие размерность модулей упругости и податливости соответственно. Предположим, что тензор $\underline{C}^{(f)}$ нам известен, тогда, полагая в (5) $\underline{\lambda} = \underline{\kappa} + \underline{\vartheta}$, $\underline{\gamma} = \underline{J}^+ \underline{\vartheta}$, получим уравнения для $\underline{\vartheta}$, решением которых является

$$\underline{\vartheta} = (\underline{C}^{(f)} \underline{J}^+ - \underline{\Delta})^{-1} (\underline{C}^+ - \underline{C}^-). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) вместо $\sigma_{ij}^{(pq)-}$, найдем следующее выражение для тензора концентрации напряжений внутри эллипсоидального вклю-

$$\underline{A}^+ = [\underline{C}^+ + (\underline{C}^{(f)} \underline{J}^+ - \underline{\Delta})^{-1} (\underline{C}^+ - \underline{C}^-)] \underline{J}^-. \quad (7)$$

Итак, чтобы определить тензор концентрации напряжений в случае бесконечной среды с эллипсоидальной неоднородностью, фактически

нужно решить вспомогательную задачу для среды с эллипсоидальной полостью:

$$C_{ijkl}^{-} u_{k,lj} = 0, \quad u_i|_S = \gamma_{ij} y_j, \quad u_i \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из решения задачи (8) найдем перемещения, напряжения, вектор реактивных усилий на границе полости $P_i(y) = C_{ijkl}^{(f)} \gamma_{kl} n_j(y)$, а следовательно, и тензор $C^{(f)}$. По формуле (6) вычислим $\tilde{\varphi}$. Положив в решении задачи (8) $\tilde{\gamma} = J^+ \tilde{\varphi}$, получим дополнительные напряжения $\sigma_{ij}^{(pq)-}$ вне включения. Затем компоненты тензора концентрации напряжений A_{ijkl}^{-} вне включения найдем по формуле (4), которая примет вид $A_{ijkl}^{-} = \Delta_{ijkl} + \sigma_{ij}^{(pq)-} J_{pqkl}^{-}$.

2. Решение вспомогательной задачи. Обозначив через λ , μ параметры Ламе, через Δ — оператор Лапласа, из (8) получим

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu \Delta u_i &= 0, \\ u_i|_S &= \gamma_{ij} y_j, \quad u_i \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение задачи (9) ищем в форме, предложенной Треффцем [5]:

$$u_i = \varphi_i + C (r^2 - R^2) \varphi_{k,ki}, \quad (10)$$

где C — константа, R — радиус сферической полости, φ_i — гармонические функции, удовлетворяющие граничному условию и условию на бесконечности из формулы (9). Очевидно,

$$\varphi_i = \frac{R^N}{r^N} \gamma_{ik} x_k.$$

Учитывая тождество $x_j \varphi_{k,jl_1 \dots l_q} = -(N+q-1) \varphi_{k,l_1 \dots l_q}$ ($q \geq 0$) и подставляя (10) в уравнения равновесия, вычислим константу C :

$$C = \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{N\lambda + 2(N+1)\mu} = \frac{1}{4} \frac{1}{N+1 - (N+2)v}, \quad v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Дифференцируя (10), получим деформации, а затем и напряжения:

$$\sigma_{ij} = \frac{R^N}{r^N} \left(T_{ijkl}^* + \frac{r^2 - R^2}{r^2} 2\mu C Q_{ijkl} \right) \gamma_{kl}, \quad (11)$$

где $T_{ijkl}^* = \lambda(1 - 2NC) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl} - \lambda N(1 - 2NC) \delta_{ij} n_k n_l - 4\mu CN \delta_{kl} n_i n_j - 2\mu N(1 + 4C) \Delta_{ijst} \Delta_{smkl} n_i n_m + 4NC\mu(N+2) n_i n_j n_k n_l$;

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} &= N(N+2) \left[-\frac{1}{N+2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2\Delta_{ijkl}) + \delta_{ij} n_j \delta_{kl} + \delta_{ij} n_k n_l + \right. \\ &\left. + 4\Delta_{ijst} \Delta_{smkl} n_i n_m - (N+4) n_i n_j n_k n_l \right], \quad n_i = -\frac{x_i}{r}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зная напряжение (11), найдем P_i и, следовательно, $C_{ijkl}^{(f)}$:

$$C_{ijkl}^{(f)} = -\lambda \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} - 2\mu \alpha_2 \Delta_{ijkl}, \quad (13)$$

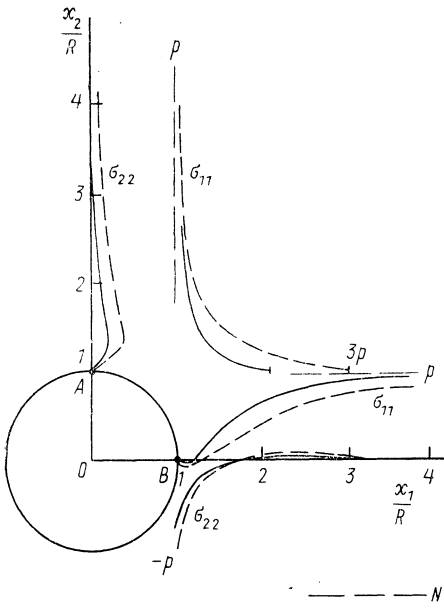


Рис. 1

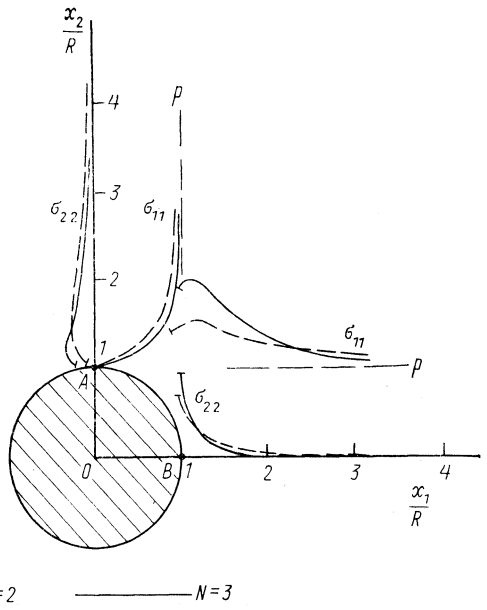


Рис. 2

где α_1 и α_2 — безразмерные константы:

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{\lambda} \frac{(N-2)\lambda + 2N\mu}{N\lambda + 2(N+1)\mu} = \frac{1-2\nu}{2\nu} \frac{N - (N+2)\nu}{N+1 - (N+2)\nu},$$

$$\alpha_2 = \frac{[N^2\lambda + 2\mu(N^2 - 2)]}{2[N\lambda + 2(N+1)\mu]} = \frac{N^2 - 2 - (N^2 - 4)\nu}{2[N+1 - (N+2)\nu]}.$$

3. Формулы для тензора концентрации. Подставляя тензор (13) в (7), найдем компоненты тензора концентрации напряжений внутри сферического включения:

$$A_{ijkl}^+ = A_1 \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 \left(\Delta_{ijkl} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (14)$$

где $A_1 = NK^+ \frac{1-\nu^-}{K^+ [1 + (N-2)\nu^-] + K^- (N-1)(1-2\nu^-)}$,

$$A_2 = N(N+2)\mu^+ \frac{1-\nu^-}{2\mu^+ [N+1 - (N+2)\nu^-] + \mu^- [N^2 - 2 - (N^2 - 4)\nu^-]},$$

здесь $K^\pm = 2\mu^\pm \frac{1 + (N-2)\nu^\pm}{N(1-2\nu^\pm)}$.

При $N=3$ выражения (13) в точности совпадают с аналогичными выражениями, полученными Дж. Эшелби [4], а также в более ранней работе А. М. Кривоглаза и А. С. Черевко [6].

Далее по правилам, изложенным в конце п. 1, найдем тензор концентрации A^- . Опуская подробности, приведем окончательное выражение для компонент тензора концентрации:

$$A_{ijkl}^- = \Delta_{ijkl} + \frac{R^N}{r^N} \left(A_{ijkl}^* + \frac{r^2 - R^2}{r^2} C^- \gamma_2 Q_{ijkl} \right), \quad (15)$$

где Q_{ijkl} определяются по формуле (12), а A_{ijkl}^* имеет вид

$$A_{ijkl}^* = \frac{1}{N} \left[-\frac{1-2\nu^-}{1+(N-2)\nu^-} \gamma_1 + \frac{1}{2} \frac{2(N+1)-(N+2)^2\nu^-}{N+1-(N+2)\nu^-} \gamma_2 \right] \delta_{ij}\delta_{kl} -$$

$$-\gamma_2 \Delta_{ijkl} + \frac{1}{2} \frac{N(N+2)\nu^-}{N+1-(N+2)\nu^-} \gamma_2 \delta_{ij} n_k n_l + \left[\frac{1-2\nu^-}{1+(N-2)\nu^-} \gamma_1 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \frac{(N+2)(1-2\nu^-)}{N+1-(N+2)\nu^-} \gamma_2 \right] n_i n_j \delta_{kl} + \frac{N(N+2)}{N+1-(N+2)\nu^-} \gamma_2 \left[(1-\nu^-) \times \right.$$

$$\left. \times \Delta_{ijst} \Delta_{smkl} n_t n_m - \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l \right],$$

$$\gamma_1 = \frac{K^+ - K^-}{K^+ + \alpha_f K^-}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \beta_f \mu^-}, \quad \alpha_f = \frac{\lambda^-}{K^-} \alpha_1^- + \frac{2\mu^-}{NK^-} \alpha_2^-, \quad \beta_f = \alpha_2^-.$$

4. Пример. На бесконечности вдоль оси x_1 действуют растягивающие напряжения $\tau_{11} = p$. В таблице представлены значения коэффициентов A_{ijkl}^- , вычисленных по формуле (15), для $N=2, 3$ в граничных точ-

	Сферическая пора		Сферическое жесткое включение	
	$N=2$	$N=3$	$N=2$	$N=3$
$A_{1111}^- (A)$	3	$\frac{3}{2} \frac{9-5\nu}{7-5\nu}$	$\nu \frac{9-5\nu}{7-5\nu}$	$\frac{3\nu}{2} \frac{1-5\nu}{(1+\nu)(4-5\nu)}$
$A_{2211}^- (A)$	0	0	$\frac{(1-\nu)(1-4\nu)}{3-4\nu}$	$\frac{3(1-\nu)(1-5\nu)}{2(1+\nu)(4-5\nu)}$
$A_{3311}^- (A)$	—	$\frac{3}{2} \frac{5\nu-1}{7-5\nu}$	—	$\frac{3\nu}{2} \frac{1-5\nu}{(1+\nu)(4-5\nu)}$
$A_{1111}^- (B)$	0	0	$(1-\nu) \frac{5-4\nu}{3-4\nu}$	$\frac{9(1-\nu)}{(1+\nu)(4-5\nu)}$
$A_{2211}^- (B)$	-1	$-\frac{3}{2} \frac{1+5\nu}{7-5\nu}$	$\nu \frac{5-4\nu}{3-4\nu}$	$\frac{9\nu}{(1+\nu)(4-5\nu)}$
$A_{3311}^- (B)$	—	$-\frac{3}{2} \frac{1+5\nu}{7-5\nu}$	—	$\frac{9\nu}{(1+\nu)(4-5\nu)}$

ках А и В при $x_2=1$ и $x_1=1$ соответственно. На рис. 1, 2 даны эпюры напряжений вдоль координатных осей для поры и абсолютно жесткого шара при $\nu=0,33$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победря Б. Е., Горбачев В. И. Концентрация напряжений и деформаций в композитах//Механ. композитных материалов. 1984. № 2. 207—214.
2. Горбачев В. И. Операторы концентрации напряжений и деформаций в упругих телах//Расчеты на прочность. Вып. 30. М., 1989. 124—130.

3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М., 1985.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., 1963.
5. Треффц Е. Математическая теория упругости. Л.; М., 1934.
6. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях твердой смеси // Физика металлов и металловедение. 1959. 8, вып. 2. 161—170.

Поступила в редакцию
24.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 539.3

Г. Л. Бровка, А. А. Ильюшин

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛИТ

Стержневые конструкции (фермы, рамы) [1] могут быть использованы не только непосредственно в технике, строительстве, но также и для моделирования основных характерных свойств подобных им более сложных конструкций и структур. В работе предлагается подход к построению осредненных континуальных моделей периодических структур с деформируемым твердым каркасом, основанный на приближении решетчатой конструкцией и реализованный для плоского случая на примере перфорированных плит (пластин). Построены определяющие соотношения осредненной модели континуума при конечных деформациях, в том числе при наличии распределенного в перфорациях давления, выражающие свойства некоторого анизотропного упругопластического тела. Получены уравнения движения, описывающие распространение малых и конечных возмущений. Даны оценки влияния геометрических параметров решетки на усредненные свойства модельной среды, включая модули упругости, плотность массы и скорости распространения возмущений.

1. Рассмотрим подход к построению моделей указанного типа для плоских и пологих элементов конструкций (плит, панелей, пластин) неоднородной двоякопериодической (в плане) структуры на примере однородных по толщине перфорированных плит с квадратно-гнездовым способом размещения отверстий. Предполагая диаметр отверстий достаточно большим по сравнению с толщиной простенков между ними, заменим перфорированную плиту (развертку пологой панели) плитой (слоем) решетчатой конструкции, составленной двоякопериодически расположенными (с периодом a) пластинами толщины h и ширины H с рамным сочленением. Ограничиваясь однородным по толщине напряженно-деформированным состоянием под воздействием нагрузок в плоскости плиты, будем рассматривать силовые характеристики (силы, моменты) отнесенными к единице длины вдоль перпендикулярного к плоскости плиты направления — погонные (постоянные по длине H) силы, моменты, усилия, что приводит к аналогии с задачами о плоских деформациях стержневой рамной конструкции.

Предполагая, что однородная плоская деформация элемента рамы, содержащего достаточное для усреднения число структурных ячеек периодичности, сопровождается аффинным преобразованием точек положения узлов рамы (рамных сочленений) с периодической на ячейках конфигурацией стержней, будем допускать продольные и изгибные деформации стержней (в плоскости рамы), не сопровождающиеся явлениями бифуркации (потери устойчивости). Считая реакции сопротивления стержней решетки растяжению (сжатию) и изгибу для про-