Е. Г. Голузина, В. В. Жук, Г. В. Кузьмина, Н. А. Широков, Николай Андреевич Лебедев и Ленинградская школа теории функций (50–70 гг.), *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 5–19

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

НИКОЛАЙ АНДРЕЕВИЧ ЛЕБЕДЕВ И ЛЕНИНГРАДСКАЯ ШКОЛА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ (50—70 гг.)

Николай Андреевич Лебедев родился 8 августа 1919 г. в деревне Красновочка Оленинского района Калининской (теперь Тверской) области в семье железнодорожного служащего.

В 1937 г. Н. А. Лебедев окончил среднюю школу и поступил в Ленинградский университет. В 1941 г. Николай Андреевич, окончив 4-й курс математико-механического факультета, вступил в Народное ополчение, откуда в июле 1941 г. был направлен для обучения в Ленинградскую Военно-Воздушную Академию (теперь: Военный Инженерно-Космический Университет имени А. Ф. Можайского). В 1944 г. после окончания инженерного факультета Н. А. Лебедев был оставлен в Академии в качестве преподавателя математики. В 1946 г. после возвращения Академии в Ленинград из эвакуации Н. А. окончил полный курс ЛГУ.

В Академии Николай Андреевич проявил себя как блестящий педагог, его лекции отличались мастерством изложения, глубиной и строгостью содержания. Н. А. Лебедев проводил большую научно-консультационную работу со слушателями и преподавателями Академии. Уже здесь в полной мере проявились характерные для всей его научной деятельности большая изобретательность и способность решать разнообразные математические задачи простым и изящным путем.

В Академии работали Сергей Михайлович Лозинский и многие другие известные ленинградские математики. С. М. Лозинский одним из первых обратил внимание на математические способности Н. А. Лебедева и в дальнейшем играл большую роль в его судьбе. По совету Сергея Михайловича, Н. А. Лебедев начал посещать семинар по геометрической теории функций (ГТФ), руководимый Геннадием Михайловичем Голузиным, являющимся уже в те годы ученым с мировым именем. Вместе с Н. А. Лебедевым семинар Г. М. Голузина посещал Исаак Моисеевич Милин. Участие в работе семинара Г. М. Голузина и личные научные контакты с Геннадием Михайловичем определили научные интересы Н. А. Лебедева и И. М. Милина: ГТФ стала главным делом их жизни. Начиная с этого времени Н. А. Лебедева и И. М. Милина связывала тесная дружба, чему немало способствовала общность их научных интересов. В начале 1951 г. Н. А. Лебедев и И. М. Милин защитили на Ученом совете ЛГУ кандидатские диссертации по ГТФ (по указанию Г. М. Голузина – в один и тот же день), эти диссертации были утверждены ВАК в том же году.

С 1951 г. одновременно с преподаванием в Академии Н. А. Лебедев работает на кафедре математического анализа Ленинградского университета. С этого времени Николай Андреевич неразрывно связан с университетом. После смерти Г. М. Голузина в 1952 г. Н. А. Лебедев стал постоянным руководителем семинара по ГТФ, созданного Г. М. Голузиным. В 1955 г. Н. А. защитил докторскую диссертацию. В 1957 г. ему было присвоено звание профессора. После своей демобилизации в ноябре 1968 г. и до конца жизни Н. А. Лебедев – профессор кафедры математического анализа Ленинградского университета.

В своей научной деятельности Н. А. Лебедев был достойным продолжателем традиций Петербургской-Ленинградской математической школы. Его исследования оказали большое влияние на развитие ГТФ в нашей стране. В ГТФ рассматриваются общие классы функций, определенных в односвязных или многосвязных областях или на римановых поверхностях, и своеобразие ГТФ определяется тем фактом, что эта теория концентрирует внимание на указанных классах функций, как на классах отображений, значительно в большей мере, чем на представлении этих функций в аналитической форме. По этой причине все методы ГТФ являются в основном геометрическими. Существенная роль в общей проблематике ГТФ принадлежит однолистным функциям.

Начало научной деятельности Н. А. Лебедева пришлось на первую половину 50-х гг. прошлого века. ГТФ в этот период времени оставалась относительно молодой наукой. Основными методами ГТФ были метод площадей и тесно связанный с ним метод контурного интегрирования, метод параметрических представлений Лёвнера – первый неэлементарный метод ГТФ, вариационные методы: методы граничных и внутренних вариаций, созданные М. Шиффером, и метод внутренних вариаций, созданный в 1946-47 гг. Г. М. Голузиным. Метод экстремальной метрики и метод симметризации, являющиеся мощными современными методами ГТФ, были созданы позднее[1].

Большую роль в создании и развитии методов ГТФ в первые десятилетия ее существования сыграла гипотеза Бибербаха (ГБ): в 1916 г. Л. Бибербах высказал предположение, что в классе S функций $f(z)$, регулярных и однолистных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и имеющих в окрестности точки $z = 0$ разложение вида

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots ,$$

справедливо неравенство

$$|c_n| \leqslant n, \quad n = 2, 3, \dots , \tag{1}$$

и равенство в (1) при каждом $n \geqslant 2$ достигается только для функций Кёбе $K_\varepsilon(z) = z(1 - \varepsilon z)^{-2}$, $|\varepsilon| = 1$. Функции $K_\varepsilon(z)$ отображают круг U на всю плоскость с радиальным разрезом, функции Кёбе и $f(z) \equiv z$ образуют самые симметричные элементы S. Именно ГБ послужила стимулом для создания К. Лёвнером в 1923 г. метода параметрических представлений, сам Лёвнер доказал неравенство (1) в случае $n = 3$ (при $n = 2$ неравенство (1) было доказано еще Бибербахом). При $n = 4$ неравенство (1) впервые было доказано лишь в 1955 г. при помощи метода вариаций. Большая роль в развитии и распространении метода Лёвнера принадлежит Г. М. Голузину.

Уже в первых своих работах Н. А. Лебедев внес большой вклад в развитие метода параметрических представлений Лёвнера и вариационного метода Г. М. Голузина. Как известно, многие

[1]Известная монография Дж. Дженкинса, посвященная детальному изложению теории и приложений метода экстремальной метрики, была впервые опубликована издательством “Шпрингер” в 1958 г. и переведена на русский язык в 1962 г. Даже после выхода в свет этой монографии метод экстремальной метрики получил признание далеко не сразу. Метод симметризации, как метод ГТФ, в 50-х гг. также еще не получил широкого распространения. К числу первых публикаций, содержащих систематическое изложение результатов, полученных при использовании метода симметризации, относятся упомянутая выше монография Дженкинса и монография В. К. Хеймана “Многолистные функции”, опубликованная издательством Кембриджского университета в 1958 г. и переведенная на русский язык в 1960 г.

экстремальные задачи ГТФ представляют собой вопросы вариационного исчисления в целом для неявных функционалов трансцендентного характера на нелинейных классах функций, в которых речь идет о нахождении точных оценок для исследуемых функционалов. Н. А. Лебедев разработал формы методов ГТФ с целью нахождения множеств значений указанных функционалов. Преимущества этого подхода очевидны: знание множеств значений функционалов позволяет сводить вопросы получения отдельных оценок для этих функционалов к вопросам чистого анализа. К началу 50-х гг. было получено сравнительно немного результатов о множествах значений основных функционалов в классах однолистных функций. К ним относятся результаты Х. Грунского о множестве значений $\log f(z_0)$ и $\log\{z_0^2 f'(z_0)/f(z_0)^2\}$ в классе S (1939 г.), А. Града о множестве значений $\log f'(z_0)$ в этом же классе функций (1950 г.). Н. А. Лебедев предложил вариант вариационного метода Г. М. Голузина, позволяющий находить множества значений функционалов и систем функционалов в классах однолистных функций. Таким путем Николай Андреевич получил ряд окончательных результатов в столь трудном вопросе, как нахождение множества значений

$$\log\{z_0^\lambda f'(z_0)^{1-\lambda}/f(z_0)^\lambda\},$$

где λ – произвольный вещественный параметр, в классе S [6]. К методу вариаций Н. А. обращался и в последующие годы. Отметим весьма изящное применение этого метода к задаче о множестве значений $f(z_0)$ в классе однолистных функций Бибербаха–Эйленберга в его работе [9].

Продолжая исследования Г. М. Голузина, посвященные методу Лёвнера, Н. А. Лебедев получил новые результаты общего характера в теории указанного метода, что позволило ему определить множества значений системы $\{\alpha, \log(f(z_0)/z_0)\}$ в классе S_1 регулярных и однолистных в круге U функций $f(z)$ с разложением вида $f(z) = \alpha z + \alpha_2 z^2 + \dots$, $|f(z)| < 1$ в U, и

$$\log\{z_0 f'(z_0)/f(z_0)\}, \quad \log\{\alpha z^2 f'(z_0)/f(z_0)^2\}, \quad \log\{\alpha f'(z_0)\}$$

в классе $S_1(|f(z_0)|)$ функций из S_1 с фиксированным значением $|f(z_0)|$ [7]. При надлежащем предельном переходе отсюда вытекают результаты о множествах значений соответствующих функционалов в классе S.

Еще в своих ранних работах Николай Андреевич [3] (см. также [18]) исследовал возможность сочетания метода вариаций и параметрического метода Лёвнера. Позднее П. П. Куфаревым был создан вариационно-параметрический метод, с помощью которого томской математической школой был решен ряд трудных задач ГТФ.

В 50-х гг. в ГТФ возник интерес к исследованию классов систем функций, реализующих отображения на неналегающие области. Наряду с исследованием множеств значений функционалов и систем функционалов, эта проблематика также в большой мере обязана своим развитием Н. А. Лебедеву. Он ввел в рассмотрение и исследовал весьма общие объекты. Ограничимся одним примером [14, 45] для случая односвязных областей. Пусть $\{D_k\}_{k=0}^{k=n}$ – система произвольных односвязных областей w-сферы, не имеющих попарно общих точек и содержащих соответственно различные точки a_k. Обозначим через $w = f_k(z)$, $f_k(0) = a_k$, однолистное конформное отображение круга U на область D_k. Множество всех систем $\{f_k(z)\}_{k=0}^{k=n}$ из $n+1$ таких функций назовем классом $\mathfrak{M}(a_0, \ldots, a_n)$. В эту схему попадают многие известные классы функций. Например, если $f(z) \in S$, то система $\{f(z), [f(1/z)]^{-1}\}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(0, \infty)$. Данное определение естественным образом распространяется на случай многосвязных областей, и соображения, касающиеся сведения ряда задач для отдельных классов функций, заданных в односвязных областях, к классу $\mathfrak{M}(a_0, \ldots, a_n)$, имеют место и для классов функций, рассматриваемых в многосвязных областях.

При исследовании экстремальных задач в такой постановке Н. А. Лебедев обратился к методу площадей. Этот метод – первый по времени своего возникновения метод ГТФ – основывается на принципе площадей: площадь неотрицательна. Среди методов ГТФ он играет особую роль: метод площадей приводит к некоторому результату (возможно, неокончательному) и в тех случаях, когда другие методы не удается применить. В сложных вопросах ГТФ, как правило, используется несколько (или даже все) из методов ГТФ и метод площадей успешно сочетается с другими методами.

Весьма общая и эвристическая форма метода площадей в основном была разработана Н. А. Лебедевым уже в его фундаментальном исследовании 1961 г. [14] и получила дальнейшее развитие в его работах [25, 28], а также в совместных с Л. Л. Громовой статьях [32, 33, 40]. К числу результатов в [14] относятся теоремы типа теорем искажения в классе $\mathfrak{M}(a_0, \dots, a_n)$, неравенство для произведения $\prod_{k=0}^{n} |f'_k(0)|^{\gamma_k^2}$ в этом классе (это неравенство переносит на случай комплексных значений γ_k известное ранее неравенство для вещественных γ_k), изящное неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_0(e^{it})|^2 dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_1(e^{it})|^{-2} dt \leqslant 1$$

в классе $\mathfrak{M}(0, \infty)$. Примечательно, что позднее многими авторами и разными методами были получены результаты, которые оказывались следствиями результатов в [14].

Итогом многолетнего труда Н. А. Лебедева является его монография [45], вышедшая из печати в 1976 г. В ней дается строгое изложение огромного фактического материала и все приводимые результаты получены при помощи одного метода исследования – весьма общей и эвристической формы метода площадей, разработанной ее автором. В мировой литературе по теории функций крайне мало примеров такого рода.

Нужно сказать, что свойственная Николаю Андреевичу изобретательность в выборе простых путей решения трудных задач проявилась при решении самых разных вопросов ГТФ. К числу таких работ, кроме упомянутых выше, относятся, например, его работа о параметрическом представлении функций, регулярных и однолистных в кольце [5], исследование Н. А. Лебедева и Г. А. Согомоновой [10] вопроса, связанного с классической задачей Каратеодори–Фейера, совместные работы Н. А. Лебедева с В. А. Андреевой и А. В. Стовбун [13] и с И. А. Александровым [27], посвященные классам функций, представимых интегралом Стилтьеса, работа И. Е. Базилевича и Н. А. Лебедева [19] о дисперсии коэффициентов p-листных функций, работа Н. А. Лебедева [43], дающая интересное дополнение к теореме регулярности Хеймана.

Наряду с геометрической теорией функций большая роль в творчестве Н. А. Лебедева принадлежит и конструктивной теории функций (КТФ). Наряду с другими соображениями, Н. А. внес в эту науку многие идеи и методы ГТФ.

Постоянный интерес к теории аппроксимации возник у Николая Андреевича, по-видимому, в середине 50-х годов, когда Владимир Иванович Смирнов перепоручил ему чтение своего курса по конструктивной теории функций на математико-механическом факультете ЛГУ. Затем в результате долгой совместной работы с Владимиром Ивановичем появилась классическая монография В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [16], посвященная теории аппроксимации в комплексной области. Это была первая непереводная книга на русском языке по этой проблематике. Наряду с начальными фактами теории, в ней содержится изложение значительной части самых современных на тот момент времени результатов о приближении в комплексной области, включая фундаментальные достижения С. Н. Мергеляна и А. Г. Витушкина. Большое число доказательств, приведенных в книге, было упрощено по сравнению с авторскими вариантами, а ряд утверждений был существенно усилен. Чтобы охарактеризовать объем творческой работы, проделанной здесь Н. А. Лебедевым, можно в качестве примера привести его результат, цитируемый в [16, с. 101] и использованный при изложении трудных теорем С. Н. Мергеляна.

Если $\omega_E(f,\delta)$ – модуль непрерывности комплекснозначной функции f, заданной на множестве E комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то положим

$$\omega_{E,f}(\delta) = \sup_{\substack{y\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant \delta}} \left\{ \frac{x}{x+y}\,\omega_E(f,\delta+y) + \frac{y}{x+y}\,\omega_E(f,\delta-x) \right\}.$$

Пусть K – компакт в $\mathbb{C}$, комплекснозначная функция f задана на K. Тогда существует продолжение f_* функции f на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, для которого выполняется условие

$$|f_*(z)| \leqslant \max_K |f(z)|, \quad z\in\mathbb{C}, \quad \omega_{\mathbb{C},f_*}(\delta) = \omega_{K,f}(\delta).$$

Сложность и тонкость этого, казалось бы, технического факта вполне осознаются лишь при чтении его доказательства, опубликованного в работе [15], а его польза наглядна при изучении последующих теорем в [16], где применяется эта естественная лемма.

В настоящее время книга В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [16] является классикой, обязательной для изучения каждым, кто собирается заниматься исследованиями в ГТФ, и справочником, постоянно используемым специалистами.

Дальнейший интерес Н. А. Лебедева относился к конструктивному описанию классов функций на континуумах в терминах полиномиальных приближений. В конце 50-х – начале 60-х гг. В. К. Дзядык и его школа построили теорию, описывающую гладкость функции, заданной на континууме и аналитической в его внутренности, скоростью взвешенных полиномиальных приближений. Их утверждения относились к континуумам, граница которых состоит из конечного количества C^2-гладких дуг, образующих между собой ненулевые внешние и внутренние углы.

Благодаря принципиально новой идее Николая Андреевича, удалось кардинально усилить так называемые обратные теоремы: все ограничения на границу континуума были сняты, соответствующие утверждения были усилены самим Николаем Андреевичем [21], а затем в сотрудничестве с П. М. Тамразовым [26, 31]. При этом в работе [31] Н. А. Лебедев и П. М. Тамразов установили обратные теоремы для регулярных компактов комплексной плоскости, т.е. в самом общем возможном случае.

Н. А. Лебедев понимал излишнюю ограничительность условий, налагаемых В. К. Дзядыком и его учениками на континуум K, и в случае прямых теорем. Н. А. Широкову, работавшему совместно с ним над этим вопросом, Николай Андреевич неоднократно высказывал недовольство разрывом в общности результатов для прямых и обратных утверждений. Оказалось, что прямые теоремы в определенном смысле труднее обратных. Благодаря новым соображениям удалось на первых порах несколько ослабить ограничения по сравнению со случаем В. К. Дзыдыка: конечное число кривых класса C^2 было заменено в геометрических терминах на конечное число кривых класса $C^{1+\varepsilon}$ [36]. Как и во всей своей математической деятельности, Н. А. щедро создавал новые идеи в теории приближений и делился ими с учениками.

Сформулируем проблему, которую Н. А. Лебедев неоднократно поднимал при обсуждении вопросов теории приближений, но которая нигде не была им опубликована. В ней отражается стиль его математического творчества, в котором уделяется большое внимание изучению глубоких конкретных фактов.

Пусть K_β – континуум, ограниченный двумя дугами окружностей одного радиуса, пересекающимися в точках 0 и 1 и образующих в этих точках внешние углы, равные β, $0 < \beta < 2\pi$, и пусть функция f аналитична внутри K_β и удовлетворяет условию

$$|f(z)-f(\zeta)| \leqslant |z-\zeta|^\alpha, \quad z,\zeta \in K_\beta, \quad 0<\alpha<1.$$

Пусть, далее, $\rho_h(z)$ – стандартное расстояние до линии уровня. Найти наилучшую постоянную $C(\alpha,\beta)$, для которой можно подобрать полином $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ со свойством

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant C(\alpha,\beta)\rho^\alpha_{1/n}(z), \quad z \in \partial K_\beta.$$

После окончания работы над своей книгой, посвященной методу площадей [45], Николай Андреевич намеривался подготовить второе издание монографии [16] и тем самым выполнить давнишнее желание Владимира Ивановича. Кроме того, он предполагал написать монографию о методе вариаций в теории однолистных функций. Этим планам не суждено было осуществиться.

С 1952 г. и до конца своей жизни Н. А. Лебедев руководил Ленинградским семинаром по ГТФ. Этот семинар выполнял разнообразные функции и объединял различных участников. На семинаре регулярно делались сообщения о новых результатах, опубликованных в иностранных журналах, докладывались результаты последних исследований участников семинара, студенческие дипломные работы, а также заслушивались доклады математиков, приезжавших из других городов страны.

Николай Андреевич был идеальным руководителем семинара. Он живо интересовался любым сообщением, ему доставляло удовольствие заранее угадывать путь доказательства, данного автором, в ряде случаев им тут же предлагалось другое доказательство. Н. А. делился с присутствующими своими соображениями по поводу содержания доклада, его комментарии всегда были интересны, в них проявлялись присущие ему быстрота и ясность мышления и изящество логических построений. В то же время он всегда относился с уважением к докладчику, будь то студент или сложившийся специалист, Н. А. умел распознавать в молодых математиках будущих ученых.

Таким же Николай Андреевич запомнился участникам городского семинара по КТФ, этот семинар Н. А. регулярно посещал, начиная с 1964 г.

Н. А. Лебедева отличали большая трудоспособность и творческая отдача. Его лекции – а читал он их великое множество и по самым разным предметам – всегда были тщательно продуманы.

С присущей ему добросовестностью он относился и к рецензированию научных статей, которые присылались ему в большом количестве редакциями журналов, часто в результате "рецензирования" Николая Андреевича первоначальные варианты статей значительно преображались. Во многом благодаря личному участию Н. А. Лебедева в 1966 г. вышло 2-ое издание монографии Г. М. Голузина "Геометрическая теория функций комплексного переменного". Это издание дополнено оригинальными работами Г. М. Голузина и обширной обзорной статьей, описывающей современное состояние ГТФ, Н. А. является одним из автором этого обзора.

Н. А. Лебедев пользовался большим авторитетом среди математической общественности, а возглавляемый им семинар играл роль координационного центра по ГТФ. Трудно указать кандидатскую или докторскую диссертацию по ГТФ того периода времени, которая не докладывалась бы на Ленинградском семинаре. Под руководством Н. А. Лебедева была защищены 24 кандидатские диссертации. В действительности же, благодаря своему темпераменту и готовности оказать всяческую поддержку начинающим математикам, Н. А. оказал решающее влияние на научную судьбу значительно большего числа молодых специалистов.

В 1985 г. математический мир отмечал первую годовщину доказательства гипотезы Бибербаха, полученного американским аналитиком Луи де Бранжем. Это доказательство оказалось совершенно неожиданным и может быть причислено к самым удивительным математическим достижениям XX века. Существенная роль в доказательстве де Бранжа принадлежит следующему результату, установленному в 1967 г. совместно Н. А. Лебедевым и И. М. Милиным. В классе S справедливо неравенство

$$|c_{n+1}| \leqslant (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\}. \qquad (2)$$

Здесь γ_k – логарифмические коэффициенты функции $f(z) \in S$, определяемые разложением

$$\log\frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k z^k .$$

Равенство в (2) имеет место только в случае $\gamma_k = \eta^k/k$, $k = 1,\dots,n$, $|\eta| = 1$.

Неравенство (2) получило известность как второе неравенство Лебедева–Милина. Для функции Кёбе в (2) имеет место равенство . Из неравенства (2) и утверждения о случаях равенства в (2) непосредственно следует, что если для каждой функции $f \in S$ при всех $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k|\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\frac{1}{k}, \tag{3}$$

то справедливы неравенства (1), причем равенства в них достигаются только для функций $K_\varepsilon(z)$, т.е. справедлива ГБ. Де Бранж воспользовался указанной связью и доказал неравенство (3): он установил общее усредняющее неравенство для начальных коэффициентов ограниченных функций из класса S, из которого неравенство (3) получается в результате предельного перехода. Примечательно, что при доказательстве ГБ де Бранж использовал метод Лёвнера – тот самый метод, который был создан Лёвнером для получения оценок начальных коэффициентов в классе S.

Луи де Бранж докладывал свое доказательство ГБ весной 1984 г. на Ленинградском (теперь Санкт-Петербургском) семинаре по ГТФ. Этот семинар, созданный Г. М. Голузиным и в течение 30 лет руководимый Н. А. Лебедевым, сыграл существенную роль в проверке первоначального доказательства де Бранжа и его публикации[2]. Так, усилиями аналитиков различных поколений и разных стран была завершена почти 70-летняя история существования одной из самых красивых математических гипотез.

Е. Г. Голузина,
В. В. Жук,
Г. В. Кузьмина,
Н. А. Широков

[2] Первоначальное доказательство де Бранжа было опубликовано в серии “Препринты ЛОМИ” (L. de Branges, A proof of the Bieberbach Conjecture, Steklov Math. Inst. Leningrad Department, LOMI Preprints, E-5-84 (1984)). В настоящее время этот препринт является библиографической редкостью. Несколько переработанный вариант первоначального доказательства де Бранжа приводится в статье: O. M. Fomenko and G. V. Kuz’mina, The last 100 days of the Bieberbach conjecture, Math. Intelligencer 8, No. 1 (1986), 40–47.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ Н. А. ЛЕБЕДЕВА

1. *О коэффициентах некоторых классов аналитических функций*, Докл. АН СССР **67** (1949), 221–223 (совм. с И. М. Милиным).
2. *О коэффициентах некоторых классов аналитических функций*, Мат. сб. **28(70)** (1951), 359–400 (совм. с И. М. Милиным).
3. *Метод вариаций в конформном отображении*, Докл. АН СССР **76** (1951), 25–27.
4. *К теории конформных преобразований круга на неналегающие области*, Докл. АН СССР **103** (1955), 553–555.
4. *О параметрическом представлении функций, регулярных и однолистных в кольце*, Докл. АН СССР **103** (1955), 767–768.
5. *Мажорантная область для выражения* $I = \log\{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}/f(z)^\lambda\}$ *в классе* S, Вестн. ЛГУ, No. 8, сер. мат., физ. и химии, вып. 3 (1955), 29–41.
6. *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге*, Вестн. ЛГУ, No. 11, сер. мат., физ. и химии, вып. 4 (1955), 3–21.
7. *К теории конформных преобразований круга на неналегающие области*, Успехи мат. наук **11** (1956), 249–250.
8. *Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях*, Докл. АН СССР **115** (1957), 1070–1073.
9. *Об одном методе получения некоторого вида оценок для регулярных в круге функций*, Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1959), 5–19 (совм. с Г. А. Согомоновой).
10. *Об одном способе аналитического продолжения степенных рядов*, Докл. АН СССР **125** (1959), 730–732.
11. *Принцип площадей в задаче о неналегающих областях*, Докл. АН СССР **132** (1960), 758–761.
12. *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1961), 8–22 (совм. с В. А. Андреевой и А. В. Стовбун).
14. *Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **60**(1961), 211–231.
15. *О распространении комплексных функций*, Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. 3 (1963), 61–68.
16. *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, М.-Л., 1964 (совм. с В. И. Смирновым).

17. *Об одном неравенстве*, Вестн. ЛГУ, No. 19, сер. мат., мех. и астр., вып. 4 (1965), 157–158 (совм. с И. М. Милиным).
18. *Методы и результаты геометрической теории функций*, Добавление к кн.: Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, изд. 2-ое, М., 1966, 532–626 (совм. с Ю. Е. Аленицыным и Г. В. Кузьминой).
19. *О дисперсии коэффициентов функций, p-листных в среднем*, Мат. сб. **71** (1966), 227–235 (совм. с И. Е. Базилевичем).
20. *Об обратных теоремах равномерного приближения.* Тезисы кр. научн. сообщений Междунар. конгресса математиков, Секция 4, М., 1966, 62.
21. *Об обратных теоремах равномерного приближения*, Докл. АН СССР **171** (1966), 788–790.
22. *Приложения принципа площадей к задачам о неналегающих конечносвязных областях*, Докл. АН СССР **167** (1966), 26–29.
23. *Некоторые достаточные условия однолистности регулярных функций*, Вестн. ЛГУ, No. 1, сер. мат., мех. и астр., вып. 1 (1967), 40–51 (совм. с Л. В. Мамай).
24. *Владимир Иванович Смирнов и математика в Ленинградском университете за 1917–1967 годы*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1967), 7–18 (совм. с С. М. Лозинским).
25. *Дополнение к статье "Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях"*, Вестн. ЛГУ, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1967), 64–73.
26. *Об обратных теоремах равномерного приближения на замкнутых множествах комплексной плоскости*, Докл. АН СССР **179** (1968), 1046–1049 (совм. с П. М. Тамразовым).
27. *К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интегралов Стилтьеса*, Тр. Мат. ин-та СССР **94** (1968), 79–89 (совм. с И. А. Александровым).
28. *О теоремах площадей для неналегающих конечносвязных областей*, I, Вестн. ЛГУ, No. 19, сер. мат., мех. и астр., вып. 4 (1968), 44–58 (совм. с Л. Л. Громовой).
29. *Об одном обобщении модуля непрерывности*, Вестн. ЛГУ, No. 1, сер. мат., мех. и астр., вып. 1 (1969), 29–34 (совм. с В. А Барановой).
30. *О чебышевском приближении функций, непрерывных на компактных множествах комплексной плоскости*, Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. 3 (1969), 39–50 (совм. с

И. Ю. Рыжаковым).

31. *Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости*, Изв. АН СССР, сер. мат. **34**, No. 6 (1970), 1340–1390 (совм. с П. М. Тамразовым).
32. *О ненелегающих областях, лежащих в круге*, Вестн. ЛГУ, No. 19, сер. мат., мех. и астр., вып. 4 (1969), 7–12 (совм. с Л. Л. Громовой).
33. *О теоремах площадей для неналегающих конечносвязных областей*. I, Вестн. ЛГУ, No. 1, сер. мат., мех. и астр., вып. 1 (1970), 18–29 (совм. с Л. Л. Громовой).
34. *Обобщение одного неравенства П. Гарабедяна и М. Шиффера*, Вестн. ЛГУ, No. 19, сер. мат., мех. и астр., вып. 4 (1970), 41–45 (совм. с Л. В. Мамай).
35. *Монотонные выпуклые матричные функции потерь в статистике*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **112** (1971), 291–299 (совм. с Ю. В. Линником и А. Л. Рухиным).
36. *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами*, Известия АН Арм. ССР **6**, No. 4 (1971), 331–341 (совм. с Н. А. Широковым).
37. *О вариационной формуле Г. М. Голузина*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **24** (1972), 173–182 (совм. с Динь ван Фьеу).
38. *Некоторые следствия из неравенства Грунского*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1972), 45–55.
39. *Юрий Евгеньевич Аленицын (к шестидесятилетию со дня рождения)*, Успехи мат. наук **27**, No. 5 (1972), 265–270 (совм. с И. Е. Базилевичем, И. М. Милиным, Г. И. Петрашенем, В. И. Смирновым, В. А. Тартаковским).
40. *О неналегающих областях, лежащих в круге*. II, Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. 3 (1973), 25–36 (совм. с Л. Л. Громовой).
41. *Оценка числа нулей функций некоторого класса, содержащего моносплайны*, Мат. заметки **16**, No. 1 (1974) (совм. с С. М. Лозинским).
42. *Об одной лемме Г. М. Голузина*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **44** (1974), 7–16 (совм. с В. А. Барановой).
43. *К теореме регулярности Хеймана*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **44** (1974), 93–99.
44. *О некоторых следствиях из неравенства Грунского и из основ-*

ной теоремы площадей, Зап. научн. семин. ЛОМИ **44** (1974), 100–126 (совм. с Динь ван Фьеу).
45. *Принцип площадей в теории однолистных функций*, М., 1975.
46. *О произведении степеней конформных радиусов неналегающих областей*, в сб.: Труды, посвященные шестидесятилетию академика Л. Илиева, София, 1975, 113–129.
47. *Об оценках линейных функционалов на классах ограниченных функций с ограниченной n-ой производной*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1977), 48–51.
48. *Об интегралах Коши–Фруллани*, Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. 3 (1977), 48–52.
49. *Об одной постановке задачи чебышевского приближения*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1979), 26–32.
50. *О некоторых экстремальных задачах в классе Базилевича*, Вестн. ЛГУ, No. 19, сер. мат., мех. и астр., вып. 4 (1979), 47–49 (совм. с В. В. Старковым).
51. *Об однолистности одного класса функций*, Вестн. ЛГУ, No. 1, сер. мат., мех. и астр., вып. 1 (1981), 113–115.
52. *Область значений одного функционала в классе ограниченных однолистных функций*, Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. 3 (1981), 33–37.
53. *Однолистная функция*, в кн.: Математическая энциклопелия, т. 3, М., 1982, 1163–1168.
54. *Методы и результаты теории однолистных функций*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **125** (1983), 5–21.
55. *Дополнение к статье Г. В. Кузьминой “К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей”*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **125** (1983), 22–23.