Л. Б. Шнеперман, Представления топологических полугрупп непрерывными преобразованиями, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 768–771

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Л. Б. ШНЕПЕРМАН

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП НЕПРЕРЫВНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

(Представлено академиком А. И. Мальцевым 3 VII 1965)

п.1. Представлением топологической полугруппы A_t (п.2) в топологическую полугруппу $A_{t'}'$ назовем непрерывное гомоморфное отображение A_t в $A_{t'}'$. Будем говорить, что топологическая полугруппа A_t представима в классе топологических полугрупп Σ, если существует представление A_t в какую-либо полугруппу из класса Σ. Если же существует топологический изоморфизм (п.2) A_t в какую-либо топологическую полугруппу из класса Σ, то будем говорить, что A_t i-представима в классе Σ.

В работе установлено, что каждая топологическая полугруппа i-представима в классе топологических полугрупп непрерывных преобразований топологических пространств (п.4). Найдены достаточные условия для i-представления топологических полугрупп в классе полугрупп непрерывных преобразований бикомпактов (п.7) и показано, что полная регулярность является необходимым условием такого представления (п.5). Далее установлено, что каждая бикомпактная топологическая полугруппа представима в классе полугрупп непрерывных преобразований компактов (п.8), а вместе с тем и в классе полугрупп непрерывных преобразований компактных подмножеств гильбертова кирпича (п.10). Показана достаточность системы таких представлений (п.9), что дает возможность решить проблему Улама (5) о построении универсальной бикомпактной топологической полугруппы (п.11).

п.2. Полугруппу A, на множестве элементов которой определена топология t, будем обозначать через A_t. В том случае, когда полугрупповая операция непрерывна относительно этой топологии, полугруппа A_t называется топологической. Полугруппа A_t называется бикомпактной, вполне регулярной и т. п., когда бикомпактно, вполне регулярно и т. п. ее топологическое пространство. Полугруппы A_t и $A_{t'}'$ называются топологически изоморфными, если существует отображение φ, которое является изоморфизмом алгебраических полугрупп A и A' и гомеоморфизмом их топологических пространств.

Пусть A_t — полугруппа с топологией t. Изоморфизм φ (алгебраической) полугруппы A на полугруппу A' индуцирует на множестве элементов полугруппы A' топологию, которая будет обозначаться через $\varphi(t)$.

п.3. Пусть X — топологическое пространство с топологией t и S — некоторая полугруппа непрерывных преобразований X. Топология t индуцирует на полугруппе S бикомпактно-открытую топологию ([2]). Именно, пусть $B_1, \ldots, B_n$; $U_1, \ldots, U_n$, где n — конечное число, подмножества из X; все B_i бикомпактные, а U_i открытые. Через $(B_1, \ldots, B_n; U_1, \ldots, U_n)$ будем обозначать множество всех преобразований $s \in S$, для которых $\forall_{1 \leqslant i \leqslant n} sB_i \subset U_i$. Систему всех множеств $(B_1, \ldots, B_n; U_1, \ldots, U_n)$ можно принять за базис открытых множеств топологии на S. Эту топологию всюду ниже будем обозначать через t. В том случае, когда X — компактное метрическое пространство, эта топология на S совпадает с естественной, порожденной метрикой на X.

Если полугруппа $S\hat{t}$ топологическая, то будем называть ее топологической полугруппой непрерывных преобразований пространства X.

Заметим, что полугруппа $S\hat{t}$ не всегда является топологической. В связи с этим интересна и важна.

Теорема 1. *Если X — бикомпакт, то полугруппа $S\hat{t}$ топологическая.*

Эта теорема позволяет говорить о полугруппе непрерывных преобразований бикомпакта, не указывая каждый раз на то, что она топологическая.

п.4. Пусть A_t — топологическая полугруппа. Не ограничивая общности рассуждений, всюду в дальнейшем будем считать, что A_t содержит единицу. В противном случае единицу e можно было бы присоединить к полугруппе A внешним образом ([3]), а к топологическому пространству A_t — как изолированную точку.

Каждому элементу $a \in A$ сопоставим непрерывное преобразование f_a пространства топологической полугруппы A_t:

$$\forall_{x \in A_t} f_a x = ax.$$

Очевидно, что относительно операции суперпозиции преобразований множество $F(A_t) = \bigcup_{a \in A} f_a$ является полугруппой непрерывных преобразований пространства топологической полугруппы A_t.

Известно, что отображение $\varphi(a) = f_a$ полугруппы A на полугруппу $F(A_t)$ является изоморфизмом ([3]). Этот изоморфизм индуцирует на полугруппе $F(A_t)$ топологию $\varphi(t)$ (п. 2). С другой стороны, на полугруппе $F(A_t)$ может быть построена бикомпактно-открытая топология $\hat{t}$ (п.3).

Лемма 1. *На полугруппе $F(A_t)$ топологии $\varphi(\hat{t})$ и $\hat{t}$ совпадают.*

Из леммы 1 непосредственно получаем

Следствие. *Полугруппа $F(A_t)$ топологическая.*

Из этой же леммы следует

Теорема 2. *Каждая топологическая полугруппа i-представима в классе топологических полугрупп непрерывных преобразований топологических пространств.*

Следствие. *Бикомпактная топологическая полугруппа i-представима в классе полугрупп непрерывных преобразований бикомпактов.*

п. 5. Естественно возникает вопрос об i-представлении топологических полугрупп в классе полугрупп непрерывных преобразований бикомпактов. Прежде всего отметим, что не каждая топологическая полугруппа i-представима в этом классе, на что указывает следующая

Теорема 3. *Полугруппа непрерывных преобразований бикомпакта вполне регулярна.*

п. 6. Найдем теперь некоторые достаточные условия для возможности i-представления топологических полугрупп в классе полугрупп непрерывных преобразований бикомпактов. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть X^* — максимальное бикомпактное расширение топологического пространства X. Если B — замкнутое, а U — открытое множество в X^*, $B \cap X$ и $X \setminus (U \cap X)$ функционально отделимы, то $B \subset U$.*

Из результатов ([1], [4]) может быть получена

Лемма 3. *Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство, X^* — его максимальное бикомпактное расширение, f — непрерывное отображение X в X^*. Тогда f можно распространить до непрерывного отображения f^* бикомпакта X^* в себя.*

п. 7. Пусть U — открытое, Y — произвольное множество пространства топологической полугруппы A_t и $a \in A$. Топологическую полугруппу A_t назовем сильно непрерывной слева, если всякий раз, когда aY и $A_t \setminus U$ функционально отделимы, существует такая окрестность V

точки a, что для любого $a' \in V$ замкнутые множества $\overline{a'Y}$ и $A_t \setminus U$ функционально отделимы.

Лемма 4. *Если A_t — вполне регулярная сильно непрерывная слева топологическая полугруппа, U — открытое, Y — произвольное множество ее топологического пространства и $f_a \in F(A_t)$ (п. 4) такое, что $\overline{f_a Y}$ и $A_t \setminus U$ функционально отделимы, то существует такая открытая окрестность V элемента f_a в $F\hat{t}(A_t)$, что для любого $f \in V$ замкнутые множества $\overline{fY}$ и $A_t \setminus U$ функционально отделимы.*

С помощью лемм 2, 3, 4 доказывается

Теорема 4. *Вполне регулярная сильно непрерывная слева топологическая полугруппа i-представима в классе полугрупп непрерывных преобразований бикомпактов.*

п. 8. Перейдем теперь к вопросу о представлениях бикомпактных топологических полугрупп.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 5. *Если полугруппа $A'_{t'}$ с отделимой топологией t' является образом бикомпактной топологической полугруппы A_t при непрерывном гомоморфном отображении, то $A_{t'}'$ — бикомпактная топологическая полугруппа.*

Пусть A_t — бикомпактная топологическая полугруппа, а φ — какое-то непрерывное отображение пространства A_t в отрезок $[0, 1]$. Каждому элементу a полугруппы A сопоставим непрерывное отображение φ_a пространства A_t в отрезок $[0, 1]$:

$$\forall_{x \in A} \varphi_a(x) = \varphi(xa).$$

Множество $J_\varphi = \{\varphi_a\} a \in A$ является метрическим пространством относительно метрики r:

$$r(\varphi_a, \varphi_b) = \max_{x \in A} |\varphi_a(x) - \varphi_b(x)|,$$

причем метрическое пространство J_φ компактно.

На компакте J_φ определим умножение:

$$\forall_{\varphi_a, \varphi_b \in J_\varphi} \varphi_a \cdot \varphi_b = \varphi_{ab}.$$

Тогда отображение $f(a) = \varphi_a$ топологической полугруппы A_t на J_φ будет непрерывным гомоморфизмом и, согласно лемме 5, полугруппа J_φ топологическая.

Из всего сказанного следует

Теорема 5. *Для любой бикомпактной топологической полугруппы существует представление в компактную метрическую полугруппу.*

п. 9. Будем говорить, что топологическая полугруппа A_t допускает достаточную систему представлений в классе топологических полугрупп Σ, если для любых двух элементов x, $y \in A_t$ существует представление f топологической полугруппы A_t в топологическую полугруппу из класса Σ, при котором $f(x) \neq f(y)$.

Теорема 6. *Бикомпактная топологическая полугруппа A_t допускает достаточную систему представлений в классе метрических компактных полугрупп.*

п. 10. Из результатов п. 4 непосредственно следует, что компактная метрическая полугруппа i-представима в классе полугрупп непрерывных преобразований компактов. В свою очередь, каждый компакт гомеоморфен некоторому подмножеству гильбертова кирпича. Вместе с теоремой 6 это дает следующую теорему:

Теорема 7. *Бикомпактная топологическая полугруппа A_t допускает достаточную систему представлений в классе полугрупп непрерывных преобразований компактных подмножеств гильбертова кирпича.*

п. 11. С. Улам ([5]) предложил следующую задачу: существует ли универсальная бикомпактная топологическая полугруппа, т. е. топологическая полугруппа A_t такая, что каждая бикомпактная топологическая полугруппа непрерывно изоморфна ее подполугруппе?

Из п. 10 непосредственно следует

Теорема 8. *Каждая бикомпактная топологическая полугруппа A_t топологически изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения всех полугрупп непрерывных преобразований компактных подмножеств гильбертова кирпича.*

Барнаульский государственный
педагогический институт

Поступило
28 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, УМН, 2, в. 1 (17) (1947). [2] R. Arens, J. Math., 68, 593 (1946). [3] Е. С. Ляпин, Полугруппы, М., 1960. [4] А. Д. Тайманов, Матем. сборн., 31 (73), № 2 (1952). [5] С. Улам, Нерешенные математические задачи, М., 1964.