А. П. Солдатов, Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 2001–2009

https://www.mathnet.ru/de8498

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.95

А. П. СОЛДАТОВ

ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ

Рассмотрим на комплексной плоскости $z=x+iy$ область D, ограниченную при $y>0$ и при $y<0$ гладкими дугами соответственно σ и γ с общими концами $z=0$, $z=1$. Предполагается, что прямые $x\pm y=\mathrm{const}$ пересекают γ некасательно. Зафиксируем произвольно $0<\tau<1$ и обозначим через γ_0, γ_1 и γ_2 три дуги, на которые разбивается γ прямыми $x\pm y=\tau$ (считая $z=k$ концом γ_k, $k=0, 1$).

В области D для уравнения Лаврентьева—Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{1}$$

рассмотрим задачу Дирихле

$$u|_{\sigma}=0, \tag{2}$$

$$u|_{\gamma}=f. \tag{3}$$

Решение $u(x, y)$ здесь понимается регулярным в том смысле, что функция $u\in C^1(D)\cap C^2(D^{\pm})$ и при $y\neq 0$ удовлетворяет уравнению (1).

Помимо задачи Дирихле рассмотрим еще пару задач, полученных освобождением данных Дирихле или, наоборот, дополнением их до данных Коши на дуге γ_2:

$$u|_{\gamma_0\cup\gamma_1}=f, \tag{3$^+$}$$

$$u|_{\gamma}=f,\ \ \partial u/\partial n|_{\gamma_2}=0. \tag{3$^-$}$$

Решение u каждой из этих трех задач подчиняется поведению

$$u(z)=O(1)\,|z|^{\lambda_0}\,|1-z|^{\lambda_1}, \tag{4}$$

где $\lambda_0\lambda_1<0$ в случае (3) и $\pm\lambda_k>0$, $k=0, 1$, в случае $(3)^{\pm}$. Кроме того, для задач (2), $(3)^{\pm}$ в определении регулярного решения уравнения (1) требование дифференцируемости снимается на множестве $l^{\pm}\subseteq D\cap\cap\{y\leqslant 0\}$, которое задается следующим образом. Множество l^+ состоит из двух отрезков характеристик $x\pm y=\tau$, а l^- является бесконечной ломаной, полученной многократным отражением характеристик от $x=0$ и γ, начиная с $x\pm y=\tau$.

При некоторых предположениях относительно σ и γ корректность задачи (2), $(3)^+$ впервые была установлена А. В. Бицадзе [1]. Основные результаты относительно задач (2), (3) и (2), $(3)^{\pm}$ анонсированы в [2, 3]. Развернутое их доказательство будет дано позднее в рамках общей задачи Римана—Гильберта для системы Лаврентьева—Бицадзе, соответствующей уравнению (1). В данной статье, учитывая принципиальный характер постановок этих задач, дадим прямое доказательство существования и единственности их решения для случая *канонической смешанной области* D, когда σ и γ являются соответственно дугами окружности и гиперболы. В частности, области $D^{\pm}=D\cap\cap\{\pm y>0\}$ полностью определяются своими углами $\theta^{\pm}$, $0<\theta^+<\pi$,

$0<\theta^-<\pi/4$, в точках $z=0$, $z=1$. Относительно обозначений используемых ниже пространств $H^n_{\mu,\lambda}$, $H^n_{\mu(\lambda)}$ см. [4].

Теорема 1. *Пусть* $f\in H^2_{\mu,\lambda}(\gamma)$, *где весовой порядок* $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1)$ *подчинен условиям*

$$\lambda_0\lambda_1<0,\ |\lambda_k|\theta^+<\pi/2. \tag{5}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2), (3) вида (4), причем оно принадлежит классу $H^2_{\mu,\lambda}(\bar D^\pm)$.

Доказательство. Рассмотрим на плоскости преобразование $(x,y)\to(\tilde x,\tilde y)$ по формулам

$$\tilde x+i\tilde y=\ln\,[(x+iy)/(1-(x+iy))],\ y\geqslant 0, \tag{6}$$

$$\tilde x\pm\tilde y=\ln\,[(x\pm y)/(1-(x\pm y))],\ y\leqslant 0.$$

Очевидно, оно осуществляет диффеоморфизм класса C^1 смешанной области $\{y>0\}\cup\{y\leqslant 0, 0<x\pm y<1\}$ на всю плоскость и инвариантно относительно уравнения (1). Каноническую область D это преобразование переводит на горизонтальную полосу $\tilde D$, заключенную между прямыми $\tilde y=\theta^+$ и $y=-\Delta$, где $\operatorname{th}\Delta=\operatorname{tg}\theta^-$. Соответственно условие (4) переходит в

$$\tilde u(\tilde x,\tilde y)=O(1)\rho_\lambda(\tilde x),\ \rho_\lambda(t)=\exp(\lambda_0 t)\,[1+\exp(\lambda_0 t+\lambda_1 t)]^{-1}. \tag{7}$$

Пространству $H^n_{\mu,\lambda}$ при преобразовании (6) отвечает [4] пространство функций вида (7), где $O(1)$ следует заменить условием принадлежности классу H^n_μ, т. е. классу функций, все производные которых до порядка n включительно принадлежат H_μ в замкнутой полосе. Удобно символ $H^n_{\mu,\lambda}$ сохранить и для данного пространства.

В дальнейшем все рассмотрения проводим в полосе $-\Delta<\tilde y<\theta^+$, опуская «волну» в обозначениях. Кроме того, используя растяжение плоскости, без ограничения общности можно считать, что $\theta^+=\pi/2$.

В полосе $D^-=\{-\Delta<y<0\}$ общее решение уравнения (1) дается формулой Даламбера:

$$u(x,y)=F(x+y)+G(x-y). \tag{8}$$

Условие регулярности $u(x,y)$ означает, что $F, G\in C^2$. В частности, отсюда легко вывести, что $u\in C^2$ в каждой из полос $\{0\leqslant y<\pi/2\}$, $\{-\Delta\leqslant y\leqslant 0\}$. Следовательно, в силу условий Коши—Римана сопряженная к u гармоническая функция $v(x,y)$ также принадлежит классу $C^2\{-\Delta\leqslant y<\pi/2\}$ и с учетом (8)

$$u(x,0)=F(x)+G(x),\ v_x(x,0)=-F'(x)+G'(x).$$

Другими словами, F и G связаны с аналитической в D^+ функцией $\Phi=u+iv$ соотношениями

$$2F=\operatorname{Re}(1+i)\Phi^+,\ 2G=\operatorname{Re}(1-i)\Phi^+, \tag{9}$$

где Φ^+ — граничное значение Φ на $\mathbf{R}$. Подставляя (8), (9) в краевое условие (3), совместно с (2) приходим к следующей краевой задаче для аналитической функции Φ:

$$\operatorname{Re}\Phi(x+i\pi/2)=0,\ x\in\mathbf{R}, \tag{10}$$

$$\operatorname{Re}\,[(1+i)\phi(x-\Delta)+(1-i)\Phi(x+\Delta)]=2f(x). \tag{11}$$

Аналогично $H_{\mu,\lambda}(\mathbf{R})$ введем весовое пространство $L_{2,\lambda}(\mathbf{R})$, оно состоит из функций $\varphi=\rho_\lambda\varphi_0$, для которых $\varphi_0\in L_2(\mathbf{R})$. Аналогичный смысл имеет весовое пространство Харди $E_{2,\lambda}$ для функций $\Phi(x+iy)$, принадлежащих $L_{2,\lambda}(\mathbf{R})$ равномерно по $0<y<\pi/2$. Это пространство используем как для аналитических, так и для гармонических функций.

Дальнейшие рассуждения опираются на следующие две леммы об аналогах интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(t)\,dt}{\operatorname{sh}(t-z)},\ 0<\operatorname{Im} z<\pi/2, \tag{12}$$

и сингулярного интеграла Коши

$$(S\varphi)(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(t)\,dt}{\operatorname{sh}(x-t)},\ x\in\mathbf{R}, \tag{13}$$

для полосы.

Лемма 1. *Оператор S ограничен в пространствах $L_{2,\lambda}$ и $H^n_{\mu,\lambda}$,* $|\lambda|=\max(|\lambda_0|,|\lambda_1|)<1$, $n=0,1,\ldots$ *Аналогично оператор I ограничен* $L_{2,\lambda}\to E_{2,\lambda}$, $H^n_{\mu,\lambda}\to H^n_{\mu,\lambda}$ *и имеет место формула Сохоцкого—Племеля*

$$\lim_{y\to 0}(I\varphi)(x+iy)=\varphi(x)+(S\varphi)(x),\ x\in\mathbf{R}. \tag{14}$$

Как обычно, для функций $\varphi\in L_{2,\lambda}$ сингулярный интеграл (13) и формула (14) понимаются для почти всех $x\in\mathbf{R}$.

Лемма 2. a) *Пусть* $\Phi\in E_{2,\lambda}$, $|\lambda|<1$, *и* $\Phi(x+iy)\to 0$ *при* $y\to\pi/2$. *Тогда $\Phi(z)$ единственным образом представляется в виде интеграла $I\varphi$ с действительной плотностью $\varphi\in L_{2,\lambda}$. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению $H^n_{\mu,\lambda}$.*

b) *Пусть функция $u(x,y)$ гармонична в полосе $0<y<\pi/2$, в обозначениях (7) имеет поведение $O(1)\rho_{\lambda+\varepsilon}$, $|\lambda|<1$, $\varepsilon>0$, и обращается в нуль на прямой $y=\pi/2$. Пусть, кроме того, при $\lambda>0$ выполнено условие*

$$\int\limits_{\mathbf{R}}u(x,0)\,dx=0. \tag{15}$$

Тогда с точностью до подходящей постоянной аналитическая функция Φ, $\operatorname{Re}\Phi=u$, принадлежит $E_{2,\lambda}$.

Доказательство этих лемм будет проведено после завершения доказательства теоремы. Обратимся к исходной задаче. Если u — регулярное решение уравнения (1) вида (7), то на основании леммы 2b) аналитическая функция Φ, $\operatorname{Re}\Phi=u$, принадлежит $E_{2,\lambda-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon>0$. Поэтому достаточно установить однозначную разрешимость задачи (10), (11) в классах $E_{2,\lambda}$ и $H^n_{\mu,\lambda}$, $n=0,1,\ldots$ Условие (5) на весовой порядок λ распадается на два:

$$0<\lambda_0<1,\ -1<\lambda_1<0, \tag*{(16)^0}$$

$$-1<\lambda_0<0,\ 0<\lambda_1<1, \tag*{(16)^1}$$

где учтено, что $\theta^+=\pi/2$. Полагая $e_0=1$, $e_1=-1$, эти условия можно записать в единой форме $|\delta|<1/2$ соответственно для $\delta=\lambda-e/2$ и $\delta=\lambda+e/2$.

Пусть выполнено первое из этих условий и для определенности $\Phi\in E_{2,\lambda}$. Тогда с учетом (10) к произведению $[(1-i)\exp(-z/2)]\Phi(z)\in E_{2,\delta}$, $\delta=\lambda-e/2$, можно применить лемму 2a) и представить его интегралом $2I\varphi$ с действительной плотностью $\varphi\in L_{2,\delta}$. Подставляя предельное значение $[(1-i)\exp(-x/2)]\Phi(x)=2\varphi(x)+2i(S\varphi)(x)$ в (11), в результате приходим к эквивалентному сингулярному уравнению $\varphi+T_0S\varphi=f_0$, где положено

$$(T_0\varphi)(x)=-\exp(-\Delta)\varphi(x-2\Delta),\ f_0(x)=\exp(-x/2)f(x-\Delta). \tag*{(17)^0}$$

Совершенно аналогично поступаем в случае (16)^1, применяя лемму 2a) к функции $[(1+i)\exp(z/2)]\Phi(z)\in E_{2,\delta}$, где $\delta=\lambda+e/2$. В этом случае получаем эквивалентное уравнение $\varphi+T_1S\varphi=f_1$, где положено

$$(T_1\varphi)(x)=\exp(-\Delta)\varphi(x-2\Delta),\ f_1(x)=\exp(x/2)f(x+\Delta). \tag*{(17)^1}$$

Таким образом, остается доказать обратимость операторов $1+TS$ в пространстве X, где X означает любой из символов $E_{2,\delta}$, $H^n_{\mu,\delta}$, $|\delta|<1/2$, $n=0, 1, \ldots$ В банаховом пространстве X соответственно двум его типам можно следующим образом ввести эквивалентные нормы:

$$|\varphi|=\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} r_i^{-2}\xi_i^2\right)^{1/2},\ \xi_i=|\varphi(t+i)|_{L_2(0,2\Delta)},$$

$$|\varphi|=\sup_i(r_i^{-1}\xi_i),\ \xi_i=|\varphi(t+i)|_{H^n_\mu[0,2\Delta]},$$

где $r_i=\exp(\delta_0 i\Delta)$ при $i\leqslant 0$ и $r_i=\exp(-\delta_1 i\Delta)$ при $i\geqslant 0$. С учетом (17) отсюда следует, что по отношению к так определенным нормам операторная норма T допускает оценку

$$\|T\|\leqslant \max_{k=0,1}\exp(-\Delta+2|\delta_k|\Delta)<1. \tag{18}$$

Рассмотрим в $L_1(\mathbf{R})$ класс L^0 функций, принадлежащих $L_{1,\delta}$ для всех $|\delta|<1/2$. Другими словами, $h\in L^0$ означает, что $\rho_{-\delta}h\in L_1$, $|\delta|<1/2$. Как легко проверить, для функций $h\in L_0$ оператор свертки $(h*\varphi)=\int h(x-t)\varphi(t)dt$ ограничен в X, а преобразование Лапласа $\hat{h}(\zeta)=\int\exp(-\zeta t)h(t)dt$ определено и аналитично в полосе $|\mathrm{Re}\,\zeta|<1/2$, причем $\hat{h}(\zeta)\to 0$ при $\mathrm{Im}\,\zeta\to\infty$. Если интеграл понимать как сингулярный, то это преобразование имеет смысл и для функции $s(t)=(\pi i\,\mathrm{sh}\,t)^{-1}$ и дается формулой [5]:

$$\hat{s}(\zeta)=\mathrm{tg}\,(\pi\zeta/2),\ |\zeta|<1/2. \tag{19}$$

Обратимся к оператору $1+TS$. Согласно (13), (17), операторы S и T коммутируют и в силу (18) оператор $1+T^2$ обратим. Поэтому

$$1-(TS)^2=(1+T^2)(1-R),\ R=T^2(1+T^2)^{-1}(1+S^2). \tag{20}$$

Действуя этими операторами на функции $\varphi\in L_2$ с компактным носителем, с учетом (19) и известной связи преобразования Лапласа со сверткой приходим к соотношению

$$[1-q^2\mathrm{tg}^2(\pi\zeta/2)]\hat{\varphi}(\zeta)=(1+q^2)[\hat{\varphi}(\zeta)-(R\hat{\varphi})(\zeta)],\ q=\exp(-\Delta\pm 2\Delta\zeta),$$

где верхний (нижний) знак соответствует $T=T_1$ $(T=T_0)$. Следовательно,

$$(R\hat{\varphi})(\zeta)=\hat{h}(\zeta)\hat{\varphi}(\zeta),\ \hat{h}(\zeta)=q^2(1+q^2)^{-1}[\cos(\pi\zeta/2)]^{-2},$$
$$\hat{h}(\zeta)\neq 1,\ |\mathrm{Re}\,\zeta|<1/2, \tag{21}$$

с функцией $h\in L^0$. В частности, $R\varphi=h*\varphi$ для рассматриваемых функций φ. В силу соображений плотности последнее равенство справедливо для всех $\varphi\in L_{2,\delta}$ и, следовательно, для всех $\varphi\in X$. Из (21) и известной теоремы Винера выводим, что $[1-\hat{h}(\zeta)]^{-1}=1-\hat{g}(\zeta)$ с функцией $g\in L^0$. В свою очередь это означает, что оператор $1-R$ обратим с обратным $\varphi\to\varphi-g*\varphi$. На основании (20) отсюда приходим к обратимости оператора $1+TS$.

Доказательство леммы 1. Представим $I\varphi$ в виде суммы $I_0\varphi+I_1\varphi$, полагая в (12)

$$[\pi i\,\mathrm{sh}\,(t-z)]^{-1}=g_0(t-x,y)/\pi i(t-z)+g_1(t-x,y),$$

где функция $g_0(x,y)\in C^\infty$ и тождественно равна 1 (равна 0) при $x^2+y^2\leqslant 1$ $(x^2+y^2\geqslant 4)$. Утверждение леммы относительно $I_0\varphi$, включая формулу (14), является следствием известных свойств интеграла типа Коши [6, 7]. Что касается второго слагаемого $I_1\varphi$, то при $|\nu|<1$ функция $\exp(-\nu x)g_1(x,y)$ вместе со всеми своими производными принадлежит $L_1(\mathbf{R})$ равномерно по $0\leqslant y\leqslant\pi/2$. Отсюда утверждения леммы об ограниченности I_1 выводятся непосредственно. Аналогичным образом рассматривается и сингулярный интеграл (13).

Доказательство леммы 2. a) В силу леммы 1 достаточно установить, что однородная задача $\operatorname{Im}\Phi(x+\pi i/2)=0$, $\operatorname{Re}\Phi(x)=0$ в классе $E_{2,\lambda}$, $|\lambda|<1$, имеет только тривиальное решение. Пусть Φ — решение этой задачи и $\tilde{\Phi}(z)=\Phi(\ln z)$. Тогда функция $\tilde{\Phi}$ аналитически продолжается на всю плоскость, за исключением $z=0$, и интегралы

$$\int_0^1 |\tilde{\Phi}(re^{i\theta})|^2 r^{-2\lambda_0-1}dr, \quad \int_0^1 |\tilde{\Phi}(1/re^{i\theta})|^2 r^{-2\lambda_1-1}dr$$

равномерно ограничены по $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Следовательно, $z=0$ является устранимой особой точкой для функций $\tilde{\Phi}(z)$ и $\tilde{\Phi}(1/z)$, что влечет за собой $\phi=0$.

b) В силу принятых предположений $u\in E_{2,\lambda}$. Пусть $\varphi(t)=u(t,0)$ и $\lambda_0\lambda_1<0$. Положим $\Phi=I_{\pm}\varphi$, $\pm\lambda_0>0$, $\mp\lambda_1<0$, где $I_{\pm}$ получается подстановкой в подынтегральное выражение (12) множителя $\exp(\pm(z-t))$. На основании леммы 1 функция $\Phi\in E_{2,\lambda}$ и гармоническая функция $u_0=u-\operatorname{Re}\Phi$ обращается в нуль на граничных прямых. Как и в а), отсюда выводим тождество $u\equiv 0$. При $\lambda<0$ запишем $\varphi=\varphi_++\varphi_-$, где $\varphi_+(t)\equiv 0$ при $t\leqslant 0$, и положим $\Phi=I_+\varphi_++I_-\varphi_-\in E_{2,\lambda}$. Как и выше, убеждаемся, что $\operatorname{Re}\Phi=u$. Пусть, наконец, $\lambda>0$ и выполнено условие (15). Тогда можно воспользоваться обоими интегралами $I_{\pm}\varphi$, которые в силу (15) совпадают. Таким образом, $\Phi=I_{\pm}\varphi\in E_{2,\lambda}$, $\operatorname{Re}\Phi=u$.

Обратимся к задачам (2), $(3)^{\pm}$. Данные Коши на γ_2 однозначно определяют решение $u(x,y)$ задачи (2), $(3)^-$ в подобласти D^-, заключенной между двумя отрезками характеристик, составляющими l^+. Вычитая из u подходящее решение уравнения (1), всегда можно добиться, чтобы $f|_{\gamma_2}=0$ и, следовательно, $u\equiv 0$ в указанной подобласти. Для единообразия в случае $(3)^+$ функцию f предполагаем продолженной (с сохранением непрерывности) на γ_2. В дальнейшем эти предположения относительно f считаются выполненными.

Напомним [4], что пространство $H^n_{\mu(\nu)}=H^n_{\mu(\nu)}(G,F)$ получается расширением $H^n_{\mu,\nu}$ гладкими функциями. Очевидно, это расширение конечномерно и норма в $H^n_{\mu(\nu)}$ наследуется с $H^n_{\mu,\nu}$. При $\nu<n$ класс $H^n_{\mu(\nu)}$ состоит из функций, производные n-го порядка которых принадлежат $H_{\mu,\nu-n}$, при $\nu=\mu+n$ он совпадает с $H^n_\mu=H^n_\mu(G)$. Можно также рассмотреть комбинированный случай пространства $H^n_{\mu,\lambda(\nu)}=H^n_{\mu,\lambda(\nu)}(G;F_1,F_2)$, элементы которого принадлежат $H^n_{\mu,\lambda}$ в окрестности F_1 и $H^n_{\mu(\nu)}$ в окрестности F_2. Для краткости точки множества F_1 (F_2) называем λ- (ν-) точками.

Применительно к задачам (2), $(3)^{\pm}$ роль λ-точек играют $z=0$, $z=1$, а ν-точек — вершины ломаных $l^{\pm}$, причем весовой порядок ν считается скаляром. В случае знака — определение пространства $H^n_{\mu,\lambda(\nu)}$ требует уточнения, поскольку множество вершин l^- бесконечно. При $\lambda\neq 0$ оно строится, исходя из $H^n_{\mu,0(\nu)}$, с помощью весовой функции $\rho(t)=t^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1}$ так же, как выше. Что касается $H^n_{\mu,0(\nu)}$, то воспользуемся преобразованием (6), которое, как было отмечено, переводит $H^n_{\mu,\lambda}$ на H^n_μ. Пусть для определенности функции φ рассматриваются на γ, при подстановке (6) они переходят в функции $\varphi(\tilde{x})=\varphi(\tilde{x},-\Delta)$ на прямой $\tilde{y}=-\Delta$. При этом множеству $l^-\cap\gamma$ вершин ломаной l^- на γ соответствует периодическое множество $\{\tilde{x}_k=\tilde{x}_0+2k\Delta,\ k=0,\pm 1,\dots\}$. По определению пространство $H^n_{\mu,0(\nu)}(\gamma)$ состоит из функций φ, для которых последовательность $\tilde{\varphi}_k(t)=\tilde{\varphi}(t+2k\Delta)$, $k=0,\pm 1,\dots$, равномерно ограничена в $H^n_{\mu(\nu)}[\tilde{x}_0,\tilde{x}_1]$.

Теорема 2. *Пусть $f\in H^2_{\mu,\lambda(\nu)}(\gamma)$ с ν-точками из $\gamma\cap l^{\pm}$, причем* *весовые порядки λ и ν подчинены условиям*

$$0<(\pm\lambda_k)\theta_k^+<\pi/2,\ 0<\nu<1/2. \qquad (22)^{\pm}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2), (3)$^{\pm}$ вида (4), причем оно принадлежит $H^2_{\mu,\lambda(\nu)}(\gamma)$ с ν-точками из $l^{\pm}\cap\{y=0\}$.

Доказательство. Как и в случае теоремы 1, все рассмотрения (с сохранением обозначений) можно вести в полосе $0<y<\pi/2$. Преобразование (6) переводит точку τ в $\tilde{\tau}=\ln[\tau/(1-\tau)]$. Параллельным переносом вдоль оси x всегда можно добиться, чтобы $\tilde{\tau}=0$. В этом случае γ_2 совпадает с отрезком $\{|x|\leqslant\Delta,\ y=-\Delta\}$ и в представлении (8) краевому условию (3)$^+$ соответствует соотношение $F(x-\Delta)+G(x+\Delta)=$ $=f(x)$, $|x|\geqslant\Delta$. Аналогичным образом дополнительные условия в (3)$^-$, где, напомним, $f=0$ на γ_2, переходят в соотношения $F(x-\Delta)\pm G(x+\Delta)=$ $=0$, $|x|\leqslant\Delta$. С учетом (9) в результате приходим к краевой задаче для аналитической функции $\Phi=u+iv$, определяемой краевыми условиями (10) и соответственно

$$\operatorname{Re}[(1+i)\Phi(x-\Delta)+(1-i)\Phi(x+\Delta)]=2f(x),\ |x|\geqslant\Delta, \qquad (23)^+$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}[(1+i)\Phi(x-\Delta)+(1-i)\Phi(x+\Delta)]=2f(x),\ |x|\geqslant\Delta,\\ \operatorname{Re}(1+i)\Phi(x)=0,\ -2\Delta\leqslant x\leqslant 0,\ \operatorname{Re}(1-i)\Phi(x)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2\Delta.\end{array}\right. \qquad (23)^-$$

В качестве следствия (23)$^-$ отметим, что функция $\sqrt{z}\Phi(z)$ аналитически продолжается в окрестность точки $z=0$ и в этой точке обращается в нуль. Поэтому, предполагая выполненным условие (15) для решения задачи (2), (3)$^-$, на основании леммы 2b) решение задачи (10), (23)$^{\pm}$ можно разыскивать в классе

$$(\sqrt{\operatorname{sh} z})^{\pm 1}\Phi(z)\in E_{2,\delta},\ \delta=\lambda\mp(1/2). \qquad (24)^{\pm}$$

Здесь учтено, что в обозначениях (7) функция $\operatorname{sh} z$ ведет себя как $\rho_{-1}(z)$ в окрестности ∞. Заметим, что в силу (22), где, напомним, $\theta^+=\pi/2$, весовой порядок δ в (24) удовлетворяет условию $|\delta|<1/2$.

На основании (10), (24) и леммы 2a) имеем представление

$$(1\pm i)(\sqrt{\operatorname{sh} z})^{\pm 1}\Phi(z)=2(I\varphi)(z) \qquad (25)^{\pm}$$

с действительной плотностью $\varphi\in L_{2,\lambda}$. Подставляя его в (23)$^{\pm}$ и используя (14), в результате приходим к эквивалентному сингулярному уравнению $\varphi+T_{\pm}S\varphi=f_{\pm}$, где положено

$$\left.\begin{array}{l}(T_+\varphi)(x)=\pm((\operatorname{sh} x)/\operatorname{sh}(x\pm 2\Delta))^{1/2}\varphi(x\pm 2\Delta),\\ f_+(x)=\pm|\operatorname{sh} x|^{1/2}f(x\pm\Delta),\ \pm x>0,\end{array}\right. \qquad (26)^+$$

и соответственно

$$\left.\begin{array}{l}(T_-\varphi)(x)=\mp((\operatorname{sh}(x\mp 2\Delta))/\operatorname{sh} x)^{1/2}\varphi(x\mp 2\Delta),\\ f_-(x)=\pm|\operatorname{sh} x|^{-1/2}f(x\mp\Delta),\ \pm x>2\Delta,\\ (T_-\varphi)(x)=f_-(x)=0,\ |x|<2\Delta.\end{array}\right. \qquad (26)^-$$

Покажем, что операторы $1+T_{\pm}S$ обратимы в пространстве $L_{2,\delta}$, $|\delta|<1/2$. Относительно скалярного произведения в L_2 пространства $L_{2,\pm\delta}$ взаимно сопряженные и, как видно из определений (13), (26), справедливы соотношения $S'=-S$, $T'_{\pm}=-T'_{\mp}$. Следовательно, достаточно установить обратимость операторов $1+TS$, $1+ST$ в пространстве $L_{2,\delta}$, $\delta_0+\delta_1\geqslant 0$. Поскольку в этом случае $L_{2,\delta}$ совпадает с пересечением $L_{2,\delta'}\cap L_{2,\delta''}$, где $\delta'_0=\delta_0$, $\delta'_1=-\delta_0$, $\delta''_0=-\delta_1$, $\delta''_1=\delta_1$, без ограничения общности можно считать, что $\delta_0=-\delta_1$. Тогда $L_{2,\delta}$ состоит из функций φ, для которых $\exp(-\delta_0 t)\varphi(t)\in L_2$. Поэтому норма оператора свертки (13) в пространстве $L_{2,\delta}$ вычисляется с помощью преобразования Лапласа (19) его ядра по формуле $\|S\| \leqslant \sup_{\operatorname{Re}\zeta=\delta_0} |\operatorname{tg}(\pi\zeta/2)| \leqslant 1$. С другой стороны, непосредственно из определений (26) видно, что для операторных норм $T=T_\pm$ справедлива аналогичная (18) оценка. Таким образом, нормы операторов TS, ST строго меньше единицы и потому операторы $1+TS$, $1+ST$ обратимы.

Дальнейшие рассуждения проведем для каждого из знаков $\pm$ отдельно. По предположению теоремы правая часть f в $(2)^+$ принадлежит $H^2_{\mu,\lambda(\nu)}(\gamma)$ с парой ν-точек, составляющих $l^+\cap\gamma$. С учетом условия на ν в (22) отсюда следует, что функция $f_+(x)$ в $(26)^+$ принадлежит $H^2_{\mu,\delta}$, $\delta=\lambda-1/2$, вне любой окрестности точки $x=0$ и

$$f_+(x)=c_\pm|x|^{1/2}+f_0(x),\ \pm x>0, \tag{27}$$

в окрестности $x=0$, где $c_\pm=\mathrm{const}$, $f_0\in H^2_{\mu,\nu+1/2}$.

Поскольку $f_+\in L_{2,\delta'}$ с любым $\delta'<\delta$, по доказанному выше существует единственное решение $\varphi\in L_{2,\delta'}$ уравнения $\varphi+T_+S\varphi=f_+$. Утверждается, что это решение обладает теми же свойствами гладкости, что и f_+. Так как операторы S и T симметричны относительно преобразования $\varphi(t)\to\tilde\varphi(t)=\varphi(-t)$ в том смысле, что $(S\varphi)^\sim=-S(\varphi^\sim)$, $(T\varphi)^\sim=-T(\varphi^\sim)$, этот факт достаточно установить на полуоси $x\leqslant0$. Для этого введем последовательность гладких функций

$$\chi_k(t)=\chi(t+2\Delta k),\ k=1,2,\dots, \tag{28}$$

где $\chi(t)\equiv1$ при $t\leqslant0$ и $\chi(t)\equiv0$ при $t\geqslant2\Delta$. С учетом (17) имеем соотношения $\chi_k\chi_{k-1}=\chi_k$, $T_0\chi_k=\chi_{k-1}T_0$, $T_1\chi_k=\chi_{k+1}T_1$, где χ_k рассматривается как оператор умножения $\varphi\to\chi_k\varphi$. Совместно с $(26)^+$ отсюда

$$\begin{gathered}\chi_kT_+=T_0\chi_k+a_kT_0\chi_k,\\ a_k(t)=\chi_k(t)\left((\operatorname{sh}t)/\operatorname{sh}(t-2\Delta)\right)^{1/2}\exp\Delta-\chi_{k-2}(t).\end{gathered} \tag{29}$$

Следовательно, равенство $\chi_k(\varphi+T_+S\varphi)=\chi_kf_+$ можно представить в форме

$$(1+T_0S+a_kT_0S)(\chi_k\varphi)=\chi_kf_++(S\chi_k-\chi_kS)\varphi. \tag{30}$$

Поскольку $(S\chi_k-\chi_kS)\varphi\in H^2_{\mu,\delta}$, $\delta=\lambda-1/2$, для любой $\varphi\in L_{2,\delta'}$, $\delta'<\delta$, правая часть уравнения (30) принадлежит $H^2_{\mu,\delta}$. Как установлено при доказательстве теоремы 1, оператор $1+T_0S$ обратим в $H^2_{\mu,\delta}$. Согласно (29), последовательность $a_k\to0$ при $k\to0$ по H^2_μ-норме и, значит, $a_kT_0S\to0$ по операторной норме пространства $H^2_{\mu,\delta}$. Следовательно, при достаточно больших k оператор $1+T_0S+a_kT_0S$ обратим и решение $\chi_k\varphi$ уравнения (30) принадлежит $H^2_{\mu,\delta}$.

С учетом (28) отсюда заключаем, что функция φ принадлежит $H^2_{\mu,\lambda-1/2}$ в окрестности $-\infty$ и классу $H^2_{\mu,\mathrm{loc}}$ на интервале $(-\infty,-2k\Delta)$ в том смысле, что $\varphi\in H^2_\mu(I)$ для любого компакта I из этого интервала. Следовательно, последним свойством обладает и $S\varphi$. Поэтому $\varphi=f_+-T_+S\varphi\in H^2_{\mu,\mathrm{loc}}$ на интервале $(-\infty,-2k\Delta+2\Delta)$. Повторяя эту процедуру, убеждаемся, что $\varphi\in H^2_{\mu,\mathrm{loc}}$ на интервале $(-\infty,0)$. Поскольку $H^2_\mu\subseteq H^2_{\mu(\nu+1/2)}$, в действительности функция $\varphi=f_+-T_+S\varphi$ в окрестности $x=0$ имеет аналогичное (27) поведение.

Таким образом, на основании $(25)^+$ и леммы 1 заключаем, что $\Phi\in H^2_{\mu,\lambda}$ вне любой окрестности точки $z=0$ и $\Phi(z)=(1+i)cz^{-1/2}+\Phi_0(z)$, $c=\mathrm{const}$; $\Phi_0\in H^2_{\mu(\nu)}$ в окрестности $z=0$. В силу $(23)^+$ постоянная $c\in\mathbf{R}$ и является линейным функционалом от f, который обозначим $c(f)$. Таким образом, при выполнении условия $c(f)=0$ решение Φ задачи (10), $(23)^+$ принадлежит пространству $H^2_{\mu,\lambda(\nu)}$.

Рассмотрим гармоническую функцию $u_0\in H^2_{\mu,\lambda(\nu)}(D^+)$, которая удовлетворяет краевому условию (10) и для которой условие (15) нарушено.

Пусть f_0 соответствует правой части $(23)^+$ по отношению к Φ_0, $\operatorname{Re}\Phi_0=u_0$. Утверждается, что $c(f_0)\neq 0$.

В самом деле, предположим противное. Тогда найдется решение $\Phi_0^{\sim}\in H^2_{\mu,\lambda(\nu)}$ задачи (10), $(23)^+$ с правой частью f_0. Рассмотрим разность $\Phi=\Phi_0^{\sim}-\Phi_0$, которая является решением однородной задачи (10), $(23)^+$. Очевидно, производная $\Phi'(z)$ также является решением этой однородной задачи и принадлежит классу $(24)^+$ (с заменой λ на $\lambda-\varepsilon$, $\varepsilon>0$). Следовательно, $\Phi'\equiv 0$, что невозможно, поскольку по построению условие (15) для $u=\operatorname{Re}\Phi$ нарушено.

Пусть теперь $c(f)\neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $c(f_0)=c(f)$. Тогда по доказанному выше существует (единственное) решение Φ_1 задачи (10), $(23)^+$ с правой частью $f_1=f-f_0$, и $u=u_0+$ $+u_1$, $u_1=\operatorname{Re}\Phi_1$, является искомым решением исходной задачи (2), $(3)^+$.

Переходим к случаю знака $-$. Согласно $(26)^-$, функция $f_-(x)\in$ $\in H^2_{\mu,\delta(\nu)}$, $\delta=\lambda+1/2$, по отношению к ν-точкам $x=0$, $\pm 2\Delta$, $\pm 4\Delta, \ldots$ Рассмотрим решение $\varphi\in L_{2,\delta'}$, $\delta'<\delta$, уравнения $\varphi+T_-S\varphi=f_-$. Утверждается, что $\varphi\in H^2_{\mu,\delta(\nu)}$.

Как и выше, все рассмотрения можно провести только для полуоси $x\leqslant 0$. Согласно $(26)^-$, функции f_- и $T_-S\varphi$ обращаются в нуль на интервале $(-2\Delta, 2\Delta)$ и, значит, этим свойством обладает и φ. Поэтому $S\varphi\in H^2_{\mu,\mathrm{loc}}$, так что $\varphi=f_--T_-S\varphi\in H^2_{\mu,\mathrm{loc}}$ на интервале $(-4\Delta, -2\Delta)$. Рассматривая уравнение $\varphi=f_--T_-S\varphi$ в окрестности $x=-\Delta$, убеждаемся, что $\varphi\in H^2_{\mu(\nu)}$ в этой окрестности. Повторяя эту процедуру, приходим к заключению, что $\varphi\in H^2_{\mu(\nu)}$ на каждом компактном отрезке прямой. Далее воспользуемся рассуждениями, использованными в предыдущем случае. Аналогично (29) имеем

$$\chi_k T_-=T_1\chi_{k-1}+b_kT_1\chi_{k-1},\ b_k(t)=\chi_{k-1}(t)\left(\frac{\operatorname{sh}(t+2\Delta)}{\operatorname{sh}t}\right)^{1/2}\exp\Delta-$$
$$-\chi_{k-1}(t). \tag{31}$$

Следовательно, равенство $\chi_k(\varphi+T_-S\varphi)=\chi_kf_-$ можно представить в форме

$$(1+T_1S+b_kT_1S)(\chi_{k-1}\varphi)=\chi_kf_-+(S\chi_{k-1}-\chi_{k-1}S)\varphi+(\chi_{k-1}-\chi_k)\varphi. \tag{32}$$

Утверждения леммы 1 сохраняют свою силу (с тем же доказательством) и по отношению к пространству $H^n_{\mu,\delta(\nu)}$, где $|\delta|<1$, $0<\nu<1$. Это же касается и доказательства обратимости оператора $1+T_1S$, которое в равной мере применимо и к данному пространству. В силу (31) последовательность $b_k\to 0$ при $k\to\infty$ по H^2_μ-норме, поэтому, как и ранее, отсюда следует обратимость оператора $1+T_1S+b_kT_1S$ в пространстве $H^2_{\mu,\delta(\nu)}$.

Все три слагаемых в правой части (32) принадлежат $H^2_{\mu,\delta(\nu)}$. Для первого из них это справедливо по условию теоремы, второе слагаемое принадлежит $H^2_{\mu,\delta}$ для любого $\varphi\in L_{2,\delta'}$, $\delta'<\delta$, а для третьего это верно, поскольку $\chi_{k-1}-\chi_k$ имеет компактный носитель и $\varphi\in H^2_{\mu(\nu)}$ на каждом компактном отрезке прямой. Таким образом, решение $\chi_{k-1}\varphi$ уравнения (32) принадлежит $H^2_{\mu,\delta(\nu)}$ и, следовательно, это верно и по отношению к φ. Согласно $(25)^-$, отсюда $\Phi\in H^2_{\mu,\lambda(\nu)}$, что завершает доказательство теоремы.

Приведенное доказательство позволяет провести рассмотрения и для $f\in H^2_{\mu,\lambda(\nu)}$, $1/2<\nu<2+\mu$. Пусть $\nu+1/2$ не целое, тогда возможны два случая: *i*) $1/2<\nu<3/2$ и *ii*) $3/2<\nu<\min(5/2, 2+\mu)$. В обоих случаях аналогично предыдущему приходим к заключению, что решение $u(z)$

задачи (2), $(3)^+$ в окрестности точки $z=\tau$ представимо в виде

$$u(z)=\operatorname{Re}\left[(1+i)(a+bz)(z-\tau)^{1/2}+\Phi_0(z)\right],\ \operatorname{Im} z\geqslant 0, \qquad (33)$$

с некоторыми $a, b\in\mathbf{R}$, $\Phi_0\in H^2_{\mu(\nu)}$. Коэффициенты a и в случае $ii)$ b определяются по f однозначно и являются линейными функционалами. Таким образом, выполнение условий ортогональности $a=0$ и $a=b=0$ соответственно случаям $i)$ и $ii)$ необходимо и достаточно для принадлежности u классу $H^2_{\mu,\lambda(\nu)}(D^+)$.

Для задачи (2), $(3)^-$ аналогичное (33) представление, где множитель $1+i$ нужно заменить $1-i$, очевидным образом справедливо с функцией Φ_0, аналитически продолжающейся в окрестность $z=\tau$. Анализ доказательства теоремы 2 показывает, что и для этой задачи выполнение условий ортогональности $a=0$ и $a=b=0$ соответственно случаям $i)$ и $ii)$ необходимо и достаточно для принадлежности u классу $H^2_{\mu,\lambda(\nu)}(D^+)$.

Заметим, что при $\nu>1$ класс $H^2_{\mu(\nu)}$ вкладывается в C^1. Поэтому выполнение условия ортогональности $a=0$ обеспечивает принадлежность решения u каждой из задач (2), $(3)^\pm$ классу C^1 в смешанной области D. Аналогично при $\nu>2$ выполнение двух условий ортогональности $a=b=0$ влечет за собой $u\in C^2(D\cap\{\pm y\geqslant 0\})$.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. (Итоги науки). М., 1959.
2. Солдатов А. П. // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 696—698.
3. Солдатов А. П. // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 1. С. 16—18.
4. Солдатов А. П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М., 1969. Т. 1.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
7. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.; Л., 1952.

Новгородский государственный университет

Поступила в редакцию 16 февраля 1994 г.