А. И. Бобенко, О периодических конечнозонных решениях уравнения Sine-Gordon,

Функц. анализ и его прил., 1984, том 18, выпуск 3, 73–74

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 73—74.

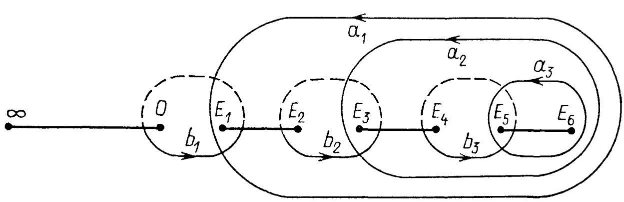
УДК 517.43 + 519.46

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON

А. И. Бобенко

В настоящее время в рамках теории конечнозонного интегрирования построены широкие классы решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Однако вопрос о выделении физически интересных периодических решений в континуальных моделях (при $g > 1$) практически не изучен. Общие конечнозонные решения рода g уравнения Sine-Gordon (SG) $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$ параметризуются $3g - 1$ независимыми параметрами [1, 2]; условие периодичности приводит дополнительно к $g - 1$ ограничению. В случае $g = 2$ четырехпараметрический класс периодических решений уравнения SG дает известный анзац Лэмба [3, 4, 8]. В настоящей работе, используя технику редукции тэта-функций Римана [5], строится шестипараметрическое семейство периодических решений при $g = 3$.

Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность $\Gamma_3\ \omega^2 = z \prod_{i=1}^{2g} (z - E_i)$ $(g = 3)$ с указанным выбором базиса циклов (см. рисунок).



$\Omega_1(P)$, $\Omega_2(P)$, $P \in \Gamma$ — нормированные абелевы интегралы второго рода с особенностями в точках $z = 0$ и $z = \infty$:

$$\Omega_j(P) \to z^{1/2}/4 + \ldots, \quad z \to \infty, \quad \Omega_j(P) \to (-1)^j z^{-1/2}/4 + \ldots, \quad z \to 0, \ j = 1, 2;$$

$\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ — соответственно векторы их b-периодов. Пусть цикл C, обходящий разрез $[0, \infty]$ на Γ, равен $C = \sum_{i=1}^{g} m_i a_i$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{2}{i} \ln \left\{ \frac{\Theta((\mathbf{V}x + \mathbf{W}t)/2\pi + \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{M})}{\Theta((\mathbf{V}x + \mathbf{W}t)/2\pi + \boldsymbol{\zeta})} \right\}, \tag{1}$$

где $\mathbf{M} = {}^1/_2 (m_1, \ldots, mg)$, $\Theta(z)$ — тэта-функция Римана, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{C}^g$.

Пусть кривая Γ_3 допускает автоморфизм λ: $(z, \omega) \to (z^{-1}, \omega)$, т. е. $E_{7-k} = E_k^{-1}$, $k = 1, \ldots, 6$. Известен [6] следующий факт: если Γ рода $g = 2\hat{g} + n - 1$ обладает инволюцией λ с n парами неподвижных точек, то g-мерная тэта-функция Римана кривой Γ выражается через $\hat{g}$-мерную тэта-функцию Римана кривой Γ/λ и $(\hat{g} + n - 1)$-мерную тэта-функцию Прима.

В нашем случае ($\Gamma = \Gamma_3$, $\hat{g} = 2$, $n = 0$) удобно применить технику работы [5], основанную на теореме Аппеля [7]. В каноническом базисе $H_1(\Gamma)$, указанном на рисунке, автоморфизм λ имеет следующее представление:

$$\mathbf{b} = \Lambda\lambda\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = (\Lambda^t)^{-1} \lambda\mathbf{a}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

(равенство в $H_1(\Gamma)$). Здесь $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — циклы рис. 1, $\lambda\,\mathbf{b}$, $\lambda\mathbf{a}$ — циклы, получающиеся из них под действием инволюции λ. Удобнее действовать в другом каноническом базисе $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$: $\mathbf{b}' = \Phi\mathbf{b}$, $\mathbf{a}' = (\Phi^t)^{-1}\,\mathbf{a}$. Здесь $\mathbf{b}' = \Lambda'\lambda\mathbf{b}'$, $\mathbf{a}' = (\Lambda'^t)^{-1}\,\lambda\mathbf{a}'$, $\Lambda' = \Phi\Lambda\Phi^{-1}$;

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично [5] получаем ограничение на матрицу периодов в базисе $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $B = \Lambda' B \Lambda'^t$, откуда

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \delta & 2\delta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$\Omega_1(P) = -\Omega_1(\lambda P)$, $\Omega_2(P) = \Omega_2(\lambda P)$, так как у этих нормированных интегралов второго рода одинаковые особенности. Следовательно, совпадают и векторы их b-периодов

$$\mathbf{V} = -\Lambda'\mathbf{V},\quad \mathbf{W} = \Lambda'\mathbf{W},\quad \mathbf{V} = (0,\ v,\ 2v),\qquad \mathbf{W} = (w_1,\ w_2,\ 0). \tag{3}$$

К тэта-функции Римана, определяемой B-матрицей (2), можно применить теорему Аппеля [5, 7]

$$\Theta(\mathbf{x}\,|\,B) = \Theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{matrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \end{matrix}\,\middle|\, A\right)\theta\,[0\,|\,0]\,(x_3\,|\,2\delta) + \\ + \Theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{matrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \end{matrix}\,\middle|\, A\right)\theta\,[1/2\,|\,0]\,(x_3\,|\,2\delta), \tag{4}$$

где $\theta\,[\alpha\,|\,\beta]\,(\mathbf{x}\,|\,B)$ — тэта-функция Римана с характеристиками α, β; $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$;

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 4\gamma - 2\delta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Цикл C, обходящий разрез $[0, \infty]$, равен $C = a_2 = a_1' + a_2'$, поэтому $\mathbf{M} = 1/2\,(1,1,0)$. Подставляя (2) — (5) в формулу (1), получаем решение уравнения SG

$$u(x,t) = \frac{2}{i}\ln\left\{\left(\Theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{matrix} z_1 + 1/2 \\ z_2 \end{matrix}\,\middle|\, A\right)\theta\,[0\,|\,0]\,(z_3\,|\,2\delta) - \right.\right. \\ \left. - \Theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{matrix} z_1 + 1/2 \\ z_2 \end{matrix}\,\middle|\, A\right)\theta\,[1/2\,|\,0]\,(z_3\,|\,2\delta)\right)\Big/\left(\Theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\,\middle|\, A\right)\theta\,[0\,|\,0]\,(z_3\,|\,2\delta) + \right. \\ \left.\left. + \Theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\,\middle|\, A\right)\theta\,[1/2\,|\,0]\,(z_3\,|\,2\delta)\right)\right\}, \tag{6}$$

где $z_1 = w_1 t/2\pi + \zeta_1$, $z_2 = w_2 t/\pi + 2\zeta_2 - \zeta_1$, $z_3 = vx/\pi + \zeta_3$. В выражении (6) от x зависит только одномерная тэта-функция, следовательно, решение (6) — периодическое.

В описанной ситуации можно применить технику редукции абелевых интегралов к эллиптическим, предложенную в работе [9]. При этом, оказывается, что один абелев интеграл первого рода редуцируется до эллиптического, а два других — до интегралов кривой рода $g = 2$, константы v, δ — эллиптические, а w_1, w_2, α, β, γ выражаются в терминах кривой рода $g = 2$.

Пользуясь результатами работы [8], легко из (6) выделить вещественные периодические конечнозонные решения рода $g = 3$.

Автор благодарен В. Б. Матвееву и М. В. Бабичу за полезные обсуждения.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Козел В. А., Котляров В. П.*— ДАН УССР, 1976, сер. А, № 10, с. 878—881. 2. *Matveev V. B.* Preprint 373. Wroclaw University, 1976. 3. *Белоколос Е. Д., Энольский В. З.*— ТМФ, 1982, т. 53, № 2, с. 271—282. 4. *Forest G., McLaughlin D. W.*— J. Math. Phys., 1982, v. 23, № 2, p. 1248—1277. 5. *Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б.*— ДАН СССР, 1983, т. 272, № 1, с. 13—17. 6. *Fay J.*— Lect. Notes in Math., 1973, № 352. 7. *Appel P.*— Bull. Soc. Math. France, 1882, v. 10, p. 59—67. 8. *Дубровин Б. А., Натанзон С. М.*— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 1, с. 27—43. 9. *Белоколос Е. Д., Энольский В. З.*— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 89.

Ленинградское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию
1 ноября 1983 г.