А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, Модули Бейкера – Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных, *Дальневост. матем. журн.*, 2012, том 12, номер 1, 20–34

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2012. Том 12. № 1. С. 20–34

УДК 517.957
MSC2010 14K25

© А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов[1]

Модули Бейкера – Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных

К 50-летию Искандера Асановича Таймановова

В работе дается обзор результатов, связанных с коммутативными кольцами дифференциальных операторов в частных производных. Мы показываем, что n-мерному коммутативному кольцу дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами (с некоторыми ограничениями) отвечает модуль Бейкера – Ахиезера на спектральном алгебраическом многообразии. В работе также показано, что на спектральном многообразии существует семейство когерентных пучков без кручения специального вида. Наличие таких пучков — это сильное ограничение на структуру спектрального многообразия, в частности, наличие таких пучков позволяет найти индекс n-кратного самопересечения "бесконечно удаленного" дивизора.

Ключевые слова: *коммутирующие дифференциальные операторы, спектральные многообразия, модули Бейкера – Ахиезера.*

1. Введение

Задача классификации коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами решена Кричевером [1, 2]. Напомним, что для колец обыкновенных дифференциальных операторов ранга 1 совместная собственная функция операторов (функция Бейкера – Ахиезера) задается формулой Кричевера и коэффициенты операторов находятся по этой формуле эффективно. Для колец обыкновенных дифференциальных операторов ранга $l > 1$ С.П. Новиков и И.М. Кричевер [3] предложили метод деформаций параметров Тюрина, с помощью которого можно находить коэффициенты операторов без функции Бейкера – Ахиезера. С помощью этого метода были найдены все операторы ранга 2 и 3, отвечающие эллиптическим спектральным кривым [3, 4], а также примеры операторов ранга 2 и 3, отвечающие спектральным кривым рода $g = 2, 3, 4$. [5, 6, 7]. Операторы с матричными коэффициентами исследовались в [8, 9, 10].

Для колец дифференциальных операторов в частных производных И.М. Кричевером [11] получены следующие результаты. Пусть

$$L_i = \sum_{|\alpha|\le m_i} f_{i\alpha}(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},\ x = (x_1, \dots, x_n),\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ i = 0, \dots, n,$$

[1]Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, 119991, Москва, Ленинские горы; Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4, Лаборатория геометрических методов в математической физике, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы. Электронная почта: `azheglov@mech.math.msu.su, mironov@math.nsc.ru`

— дифференциальные операторы по переменным $x_1, \ldots, x_n$ со скалярными коэффициентами, где

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Мы будем предполагать, что старшие коэффициенты операторов постоянны. Мы также будем предполагать, что старшие символы операторов $L_1, \ldots, L_n$ алгебраически независимы и что множество их нулей в $\mathbb{P}^{n-1}$ пусто. Если отказаться от этих ограничений, то существуют не конечнопорожденные коммутативные кольца операторов (см. например, [12]), которые мы не рассматриваем в этой работе.

Теорема 1.1. *(Кричевер [11]) Существует ненулевой полином $Q(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ такой, что*

$$Q(L_0, \ldots, L_n) = 0.$$

Многообразие $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$, заданное уравнением

$$Q(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

называется *спектральным многообразием* операторов $L_0, \ldots, L_n$. Спектральное многообразие параметризует совместные собственные значения операторов L_i:

$$L_i(x, \lambda)\psi(x, \lambda) = \lambda_i \psi(x, \lambda), \ \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \Gamma.$$

В дальнейшем мы для простоты будем рассматривать операторы ранга 1, то есть мы предполагаем, что для точки $\lambda \in \Gamma$ общего положения существует единственная с точностью до пропорциональности совместная собственная функция ψ операторов L_i.

Обозначим через $P_i(k)$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ старшие символы операторов L_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 1.2. *(Кричевер [11]) Существует единственное решение системы уравнений*

$$L_i \psi(x, k) = P_i(k)\psi(x, k), (i = 1, \ldots, n),$$

имеющее вид

$$\psi(x, k) = e^{k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n} (\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x, k)),$$

где $\xi_s(x, k)$ — однородные по k рациональные функции степени $-s$. Кольцо операторов, коммутирующих с $L_i, 1 \leq i \leq n$, коммутативно. Функция $\psi(x, k)$ является собственной для всего кольца.

В [11] построено вложение многообразия Γ во взвешенное проективное пространство, что дает его компактификацию $\hat{\Gamma}$. Отметим, что дивизор $D^\infty = \hat{\Gamma} \backslash \Gamma$ при такой компактификации рационален.

Существуют интересные примеры n-мерных коммутативных колец дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами [13, 14, 15] (см. там же ссылки на другие работы), но эффективной классификации таких колец пока не получено. Более того, не ясно, какие алгебраические многообразия могут отвечать коммутативным кольцам дифференциальных операторов.

Далее мы введем пучки Кричевера на проективных многообразиях, связанные с коммутирующими операторами. Пусть X — проективное алгебраическое многообразие размерности n, Y — $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X. Напомним, что для любого $\mathbb{Q}$-Картье дивизора Y найдется минимальное натуральное число d такое, что $Y' = dY$ — дивизор Картье, то есть локально Y' задается одним неприводимым уравнением в каждой точке.

Пучок $\mathcal{F}$ на X назовем *пучком Кричевера (К-пучком)*, если он является когерентным пучком без кручения и обладает следующим свойством:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{F}(mY')) = \dim_{\mathbb{C}} \{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots x_n)^{md+1}\}, \tag{1}$$

то есть размерность пространства глобальных сечений пучка $\mathcal{F} \otimes [mY']$ должна совпадать с размерностью пространства полиномов степени не выше чем md от n переменных.

Простейший пример К-пучка — это тривиальный пучок на $\mathbb{C}P^n$, при этом Y — гиперплоскость. Наличие К-пучка — это сильное ограничение на X и Y. Можно, например, показать, что если X и Y гладкие, то пучки Кричевера существуют только в случае $X = \mathbb{C}P^n$ и Y — гиперплоскость.

Напомним, что индекс n-кратного самопересечения эффективного дивизора Картье C на X определяется как $(n-1)!a_0$, где a_0 — старший коэффициент числового многочлена $P(k) = \chi(\mathcal{O}_X(kC))$ (ср. с [16] и [17]). Для неособых многообразий это определение совпадает с одним из общепринятых (см., например, [18, App.A]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Предположим, что на проективном многообразии X существует пучок Кричевера ранга 1. Тогда для индекса n-кратного самопересечения дивизора Картье Y' справедливо равенство*

$$(Y', \dots, Y') = d^n,$$

в частности, если Y является дивизором Картье, то индекс n-кратного самопересечения Y равен 1.

Например, если $X = \mathbb{C}P^n$, а Y — гиперплоскость, то Y — дивизор Картье, при этом индекс n-кратного самопересечения Y равен 1.

Пусть R — коммутативное кольцо n-мерных дифференциальных операторов ранга 1 со скалярными коэффициентами, старшие символы которых имеют постоянные коэффициенты. Справедлива теорема.

Теорема 1.4. *Для кольца R существует проективное многообразие X и неприводимый обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор $Y \subset X$ такие, что кольцо рациональных функций A_Y на X с полюсом в Y изоморфно R.*

На X существует семейство пучков Кричевера. Более точно, на $X \times U$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — некоторая область, существует пучок $\mathcal{F}_x$ такой, что $\mathcal{F}_x|_{X\times x}$ является пучком Кричевера ранга 1. Кроме того, определены операторы ковариантного дифференцирования $\nabla_1, \dots, \nabla_n$

$$\nabla_i : \mathrm{H}^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m}) \to \mathrm{H}^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m+1}),\ \nabla_i\nabla_j = \nabla_j\nabla_i,$$

где $\mathcal{F}_{x,m} = \mathcal{F}_x(m(Y' \times U))$. Множество глобальных сечений

$$\cup_{m=0}^{\infty} \mathrm{H}^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m})$$

является свободным модулем ранга 1 над $\mathbb{C}[\nabla_1, \dots, \nabla_n]$.

Отметим, что спектральное многообразие X строится по кольцу R каноническим образом без выбора представителей $L_i \in R$. В случае, когда кольцо R порождено операторами $L_0, \dots, L_n$, как в теореме 1.1, многообразие X совпадает с многообразием $\hat{\Gamma}$. При этом Y, как показано в [11], — рациональное многообразие. В общем случае, как указал H. Kurke, этот дивизор унирационален (таким образом, в размерности 1 и 2 он рационален по теореме Люрота). Мы строим компактификацию аффинной части $X \backslash Y$ с помощью естественной фильтрации на кольце R — фильтрации, заданной порядками операторов. Семейство пучков Кричевера строится с помощью функции ψ, определенной в теореме 1.2.

Накаяшики ввел модули Бейкера – Ахиезера (БА-модули) на алгебраических многообразиях [19], [20]. БА-модуль M состоит из функций $\psi(x, P)$, $x \in \mathbb{C}^n$, $P \in X$, где X —

n-мерное проективное алгебраическое многообразие. При фиксированном x ψ является сечением пучка на X, кроме того, ψ имеет существенную особенность на дивизоре $Y \subset X$. Элементы $\psi \in M$ обладают следующими свойствами:

- $\partial_{x_j}\psi \in M$ и $f(x)\psi \in M$, где $f(x)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности фиксированной точки x_0;
- $\lambda\psi \in M$ для любой рациональной функции λ на X с полюсом в Y.

Эти свойства означают, что M является модулем над кольцом дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n = \mathcal{O}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}]$, где $\mathcal{O}$ — кольцо аналитических функций в окрестности x_0, а также модулем над кольцом рациональных функций A_Y на X с полюсом в Y. Особый интерес представляют конечнопорожденные свободные БА-модули над $\mathcal{D}_n$, поскольку в этом случае конструкция позволяет строить коммутативные кольца дифференциальных операторов. Выберем базис $\psi_1(x,P), \ldots, \psi_N(x,P)$ в M. Тогда для $\lambda \in A_Y$ существует единственный дифференциальный оператор $D(\lambda)$ с матричными коэффициентами такой, что

$$D(\lambda)\Psi(x,P) = \lambda(P)\Psi(x,P),$$

где $\Psi(x,P) = (\psi_1(x,P), \ldots, \psi_N(x,P))^\top$. Для другой функции $\mu \in A_Y$

$$D(\mu)\Psi(x,P) = \mu(P)\Psi(x,P),$$

откуда вытекает равенство $(D(\lambda)D(\mu) - D(\mu)D(\lambda))\Psi = 0$. Из свободности $\mathcal{D}_n$-модуля M следует, что оператор $D(\lambda)D(\mu) - D(\mu)D(\lambda)$ нулевой, то есть $D(\lambda)$ и $D(\mu)$ коммутируют. Примеры свободных модулей Бейкера – Ахиезера приведены ниже.

Пусть R — коммутативное кольцо дифференциальных операторов, X — спектральное многообразие из теоремы 1.4. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *На X существует свободный модуль Бейкера – Ахиезера ранга 1, порожденный*

$$\psi(x,k) = \xi(x,k)e^{x_1k_1+\cdots+x_nk_n},$$

где $\xi(x,k)$ — сечение пучка Кричевера на X, такой, что образом морфизма $A_Y \to \mathcal{D}_n$, заданного формулой $D(\lambda)\psi = \lambda\psi$, $\lambda \in A_Y$, является кольцо R.

Теорема следует непосредственно из теоремы 1.2. А именно положим

$$M = \mathcal{D}_n\psi(x,k).$$

M — модуль Бейкера – Ахиезера, поскольку всякая мероморфная функция на X с полюсом в Y является элементом коммутативного кольца операторов, коммутирующих с $L_1, \ldots, L_n$. Ясно, что этот модуль свободен и порожден $\psi(x,k)$ (ср. также доказательство теоремы 1.2 и следствие 1 в [11]).

Отметим, что существуют и другие способы определять семейства пучков Кричевера. Так, в случае, когда $n = 2$, по операторам L_1, L_2 в работе [21] строится обратимый оператор S в кольце псевдодифференциальных операторов (ср. леммы 2.9, 2.11 в [21]). С помощью него можно определить формальный аналог функции Бейкера – Ахиезера $\psi'(x,k) = Se^{x_1k_1+x_2k_2}$, а по нему определить семейство пучков Кричевера $\mathcal{F}_x$, как в теореме 1.4 (см. доказательство теоремы ниже). При этом k_2^{-1}, k_1^{-1} являются локальными параметрами в точке P, гладкой на дивизоре Y и на поверхности X; k_2^{-1} задает локальное уравнение дивизора, а k_1^{-1} задает локальное уравнение точки в окрестности точки P.

В работе [21] показано, что по геометрическим данным (поверхность, дивизор, точка), пучку $\mathcal{F}_0$, по выбранным локальным параметрам в точке и по фиксированной тривиализации пучка в точке P (модифицированные данные Паршина, ср. [22], [25], [26], [23], [24]), можно конструктивно восстановить кольцо R дифференциальных операторов (а значит, и семейство пучков, и формальную функцию Бейкера – Ахиезера), см. доказательство теоремы 3.3 в [21] (пучку $\mathcal{F}_0$ в теореме 3.3 соответствует пучок $\mathcal{F}$). При этом когомологии пучка $\mathcal{F}_0$ удовлетворяют более сильным условиям, чем условия которым удовлетворяют когомологии пучков Кричевера (1), а именно для любого n композиции нижеследующих гомоморфизмов являются изоморфизмами:

$$H^0(X, \mathcal{F}(nY')) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{F}_0}_P \overset{\phi}{\simeq} k[[k_1^{-1}, k_2^{-1}]] \to k[[k_1^{-1}, k_2^{-1}]]/(k_1^{-1}, k_2^{-1})^{nd+1},$$

где ϕ — тривиализация пучка $\mathcal{F}_0$ в точке P. При выборе других операторов L_1, L_2 в кольце R получается пучок $\mathcal{F}_0'$, изоморфный исходному.

Отметим, что подобную схему рассуждений можно применить и при $n > 2$, если рассматривать в качестве геометрических данных флаг на X.

Авторы начали работать над этой статьей во время конференции «Торическая топология и автоморфные функции», прошедшей в Хабаровске 5–10 сентября 2011 г. Авторы благодарны организаторам конференции за приглашение.

2. Доказательство теорем 1.3 и 1.4

2.1. Доказательство теоремы 1.3

Напомним одну конструкцию из алгебраической геометрии, связанную с приведенным перед теоремой определением индекса самопересечения. А именно: если Y — эффективный дивизор Картье, то $\mathcal{O}_X(-Y) \simeq \mathcal{I}_Y$, где $\mathcal{I}_Y$ — пучок идеалов связанной с Y локально замкнутой подсхемы (см. [18, ch. II, prop. 6.18]). Поэтому есть естественный морфизм пучков $\mathcal{O}_X(-Y) \to \mathcal{O}_X$, и для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X можно написать точную последовательность когерентных пучков (см. [18, ch. II, prop. 5.7]):

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{F}(-Y) \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

где $\mathcal{R}, \mathcal{Q}$ — ядро и коядро морфизма пучков $\mathcal{F}(-Y) \to \mathcal{F}$. Аналогичные последовательности существуют для всех n:

$$0 \to \mathcal{R}(nY) \to \mathcal{F}((n-1)Y) \to \mathcal{F}(nY) \to \mathcal{Q}(nY) \to 0.$$

Поэтому:

$$\dim(\mathit{Supp}(\mathcal{Q}(nY))) < \dim(\mathit{Supp}(\mathcal{F})),\ \dim(\mathit{Supp}(\mathcal{R}(nY))) < \dim(\mathit{Supp}(\mathcal{F}))$$

и есть короткая точная последовательность когерентных пучков

$$0 \to \mathcal{F}((n-1)Y)/\mathcal{R}(nY) \to \mathcal{F}(nY) \to \mathcal{Q}(nY) \to 0.$$

Из нее получаем

$$\chi(\mathcal{F}(nY)) = \chi(\mathcal{Q}(nY)) + \chi(\mathcal{F}((n-1)Y)/\mathcal{R}(nY))$$

и

$$\chi(\mathcal{F}((n-1)Y)/\mathcal{R}(nY)) = \chi(\mathcal{F}((n-1)Y)) - \chi(\mathcal{R}(n)).$$

Отсюда

$$\chi(\mathcal{F}(nY)) - \chi(\mathcal{F}((n-1)Y)) = \chi(\mathcal{Q}(nY)) - \chi(\mathcal{R}(nY)).$$

Теперь можно воспользоваться индукцией по размерности носителя когерентного пучка $\mathcal{F}$ и предложением 7.3 гл. 1 в [18]: по предположению индукции, существуют числовые многочлены P_1, P_2 с рациональными коэффициентами такие, что $P_1(n) = \chi(\mathcal{Q}(nY))$ и $P_2(n) =$

$\chi(\mathcal{R}(nY))$ для всех n, и в силу 7.3 тогда существует такой же многочлен $P(n) = \chi(\mathcal{F}(nY))$ (если размерность носителя $\mathcal{F}$ равна 0, $\chi(\mathcal{F}(nY)) = const$). Чтобы увидеть связь определения индекса самопересечения через старший коэффициент этого многочлена, рассмотрим случай, когда Y — кривая. В этом случае многочлен $P(n)$ возникает из теоремы Римана - Роха для пучка $\mathcal{O}_Y(nY)$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок Кричевера ранга 1. Прежде всего заметим, что для всех m имеются вложения $\mathcal{F}(mY') \hookrightarrow \mathcal{F}((m+1)Y')$. Действительно, достаточно проверить это только для $m = -1$; в этом случае существование вложения сразу следует из того, что локально пучок $\mathcal{O}_X(-Y')$ порождается одним элементом и $\mathcal{F}$ — пучок без кручения. Отсюда следует, что для всех m определены вложения

$$H^0(X, \mathcal{F}(mY')) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{F}((m+1)Y')).$$

В силу теоремы 1.4 дивизор Y обилен, поэтому для больших m выполнено (см. [18, ch.3, prop.5.3] и ср. лемму 2.1)

$$H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(mY')) = H^0(X, \mathcal{O}_X(mY'))/H^0(X, \mathcal{O}_X((m-1)Y')) \subset$$

$$\subset H^0(X, \mathcal{F}(mY'))/H^0(X, \mathcal{F}((m-1)Y')) = H^0(Y', \mathcal{F}|_{Y'}(mY')),$$

где $H^0(X, \mathcal{O}_X(mY')) \subset H^0(X, \mathcal{F}(mY'))$, так как вложение определено отображением $H^0(X, \mathcal{O}_X(mY')) \ni a \mapsto a\varphi \in H^0(X, \mathcal{F}(mY'))$, где $\varphi \in H^0(X, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{C}$ — порождающая, поскольку $\mathcal{F}$ — пучок без кручения. Поэтому

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(Y', \mathcal{F}|_{Y'}(mY')) = \dim_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}[k_1, \dots, k_n])_{dm} \oplus (\mathbb{C}[k_1, \dots, k_n])_{dm-1} \oplus \dots \oplus (\mathbb{C}[k_1, \dots, k_n])_{d(m-1)+1}). \quad (2)$$

Так как пучок $\mathcal{F}$ ранга 1, то размерности пространств $H^0(Y', \mathcal{F}|_{Y'}(mY'))$ и $H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(mY'))$ для больших n вычисляются числовыми многочленами $P_1(m)$ и $P_2(m)$ с одинаковыми старшими коэффициентами (причем старший коэффициент многочлена P_2 отвечает за индекс самопересечения), как это видно из рассуждений, приведенных выше. Но для больших m

$$\dim H^0(Y', \mathcal{F}|_{Y'}(mY')) = C_{n+md-1}^{n-1} + C_{n+md-2}^{n-1} + \dots + C_{n+(m-1)d}^{n-1},$$

откуда следует, что старший коэффициент у P_1 равен $d^n/(n-1)!$ и индекс самопересечения равен d^n.

2.2. Доказательство теоремы 1.4

Напомним сначала одно общее свойство коммутативных колец дифференциальных операторов, которые мы рассматриваем.

Предложение 2.1. *Пусть $L_1, \dots, L_n$ — коммутирующие дифференциальные операторы положительного порядка, старшие символы P_i которых имеют постоянные коэффициенты. Пусть характеристические дивизоры этих операторов (множества нулей многочленов P_i в $\mathbb{P}^{n-1}$) не имеют общих точек.*

Тогда всякое коммутативное кольцо B операторов, содержащее $L_1, \dots, L_n$, является конечно порожденной алгеброй над $\mathbb{C}$ без делителей нуля размерности Крулля n.

Доказательство. Определим на кольце D фильтрацию $\{D_r\}$ по степени операторов. Тогда $gr(D) \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots x_n][\xi_1, \dots, \xi_n]$ — коммутативная градуированная $\mathbb{C}$-алгебра со скобкой Пуассона

$$\{\sigma_i(L_1), \sigma_j(L_2)\} = \sigma_{i+j-1}([L_1, L_2])$$

(здесь $\sigma_i(L_1)$ обозначает символ оператора степени i, $i = \deg L_1$, $j = \deg L_2$). Тогда, если $Q \in B \cap D_m$, имеем

$$0 = \{P_i, \sigma_m(Q)\} = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial \xi_v} \partial_v(\sigma_m(Q)).$$

Но $(P_1, \dots, P_n) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ — конечный морфизм в силу условий нашего предложения, поэтому $\det(\partial P_i / \partial \xi_j) \neq 0$. Следовательно, $\sigma_m(Q)$ имеет постоянные коэффициенты.

Следовательно, получаем:

$$\mathbb{C}[P_1, \dots, P_n] \subset gr(B) \subset \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n].$$

Но $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ конечно порожден как $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_n]$-модуль, поэтому $gr(B)$ тоже конечно порожден. Следовательно, $gr(B)$ — конечно порожденная алгебра (очевидно, без делителей нуля) размерности Крулля n (см. [27, ch. 11]).

Для кольца B те же утверждения следуют из [28, Ch.III, §2.9, prop.10].

□

Напомним одну конструкцию из алгебраической геометрии. Пусть k — алгебраически замкнутое поле. Тогда существует вполне строгий функтор t из категории многообразий над k в категорию схем над k (см. например [18, ch. II, §2]). Топологическое пространство любого многообразия V гомеоморфно множеству всех замкнутых точек из топологического пространства схемы $sp(t(V))$, и пучок регулярных функций многообразия является ограничением структурного пучка схемы $t(V)$ посредством этого гомеоморфизма. Образом проективных многообразий этого функтора являются проективные схемы $\operatorname{Proj} S$, где S — градуированное кольцо с $S_0 = k$, конечно порожденное множеством S_1 как S_0-алгебра (см. следствие 5.16 гл. II там же). Так, если $X \subset \mathbb{C}P^n$ — проективное алгебраическое многообразие, $I(X) \subset \mathbb{C}[x_0, \dots x_n]$ — однородный идеал, порожденный однородными многочленами, обращающимися в 0 на X, определим градуированное кольцо $S = \oplus_{d=0}^{\infty} S_d$ по кольцу многочленов $\mathbb{C}[x_0, \dots x_n]$, взяв за S_d множество всех линейных комбинаций одночленов степени d, и положим $S(X) = S/I(X)$. Тогда $t(X) = \operatorname{Proj} S(X)$. В дальнейшем мы будем отождествлять многообразия и соответствующие им схемы.

Рассмотрим естественную фильтрацию на кольце R, определенную по степени операторов. Определим кольцо $\tilde{R} = \oplus_{d \geq 0} R_d$. Тогда мы утверждаем, что схема $X = \operatorname{Proj} \tilde{R}$ проективна, идеал $I = \tilde{R}(-1)$ прост в $\tilde{R}$ и определяет неприводимый обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор $Y \subset X$.

Действительно, обозначим через $i : I \to \tilde{R}$ естественное вложение. Очевидно, что $I = (i(1))$, где $1 \in I_1 = \tilde{R}_0$ и $i(1) \in \tilde{R}_1$. Пусть $a \in \tilde{R}_k$, $b \in \tilde{R}_l$ и $a, b \notin I$. Тогда $\operatorname{ord}(a) = k$, $\operatorname{ord}(b) = l$, и следовательно, $\operatorname{ord}(ab) = k + l$ (здесь ord обозначает порядок оператора в кольце R). Но тогда $ab \in \tilde{R}_{k+l}$ не может принадлежать I, то есть I — простой однородный идеал.

В силу [29, prop. 2.4.4] схемы $\operatorname{Proj} \tilde{R}$ и $\operatorname{Proj} \tilde{R}/I = \operatorname{Proj} gr(R)$ — целые. Таким образом, идеал I определяет неприводимый дивизор Y на X.

Так как R конечно порождено, $\tilde{R}$ также конечно порождено над $\mathbb{C}$ (см. предложение 2.1). Тогда существует натуральное d такое, что градуированное кольцо $\tilde{R}^{(d)} = \oplus_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_{kd}$ конечно порождено множеством $\tilde{R}_1^{(d)}$ как $\mathbb{C}$-алгебра (см., например, лемму в [30, ch. III, §8]). Таким образом, $\operatorname{Proj} \tilde{R}^{(d)}$ — проективное многообразие. Покажем, что $X \simeq \operatorname{Proj} \tilde{R}^{(d)}$ и что dY — дивизор Картье на X.

Действительно, dY определяется идеалом $I^d = (i(1)^d)$, и $i(1)^d \in \tilde{R}_1^{(d)}$. В силу [29, prop. 2.4.7] имеем $X = \operatorname{Proj} \tilde{R} \simeq \operatorname{Proj} \tilde{R}^{(d)}$ и $\operatorname{Proj} \tilde{R}/I \simeq \operatorname{Proj} \tilde{R}^{(d)}/I^{(d)}$. Таким образом, достаточно показать, что идеал $I^{(d)}$ в $\tilde{R}^{(d)}$ определяет дивизор Картье. Но это верно, поскольку открытые аффинные множества $D(x_i)$, где $x_i \in \tilde{R}_1^{(d)}$, образуют покрытие X и в каждом множестве $D(x_i)$ идеал $I^{(d)}$ порожден элементом $i(1)^d / x_i$.

Наконец, dY очень обилен, так как является гиперплоским сечением во вложении $\operatorname{Proj}\tilde{R}^{(d)} \hookrightarrow \operatorname{Proj}\mathbb{C}[\tilde{R}_1^{(d)}] \simeq \mathbb{P}^N$.

Кольцо рациональных функций с полюсом в Y $A_Y = \mathcal{O}_X(X\backslash Y) \simeq R$, поскольку $X\backslash Y = \operatorname{Spec}(\tilde{R}_{(i(1))}) \simeq \operatorname{Spec}(R)$.

Кроме того, как мы видели в доказательстве предложения 2.1,

$$\mathbb{C}[P_1,\dots,P_n] \subset gr(R) \subset \mathbb{C}[\xi_1,\dots,\xi_n].$$

Отсюда следует, что $\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ конечно, а потому дивизор $Y = \operatorname{Proj}(gr(R))$ унирационален.

Определим пучок $\mathcal{F}_x$ на $X \times U$ следующим образом. Рассмотрим $R \otimes_{\mathbb{C}} A$-модуль, где A — кольцо аналитических на U функций:

$$M = \mathcal{D}_n(\psi(x,k))e^{-x_1k_1-\ldots-x_nk_n},$$

где ψ — функция из теоремы 1.2. Как следует из этой теоремы, M — модуль без кручения. На нем определена естественная фильтрация $\{M_i\}$ по степени относительно k, и очевидно, что M с этой фильтрацией — фильтрованный $R\otimes_{\mathbb{C}} A$-модуль. Таким образом, $\tilde{M} = \oplus_{q=0}^{\infty} M_i$ — градуированный $\tilde{R}\otimes_{\mathbb{C}} A$-модуль без кручения. Далее, заметим, что, как и в доказательстве предложения 2.1, $gr(M) \simeq A[\xi_1,\dots,\xi_n] \supset gr(R)\otimes_{\mathbb{C}} A$ — конечно порожденный модуль над $gr(R)\otimes_{\mathbb{C}} A$. Тогда в силу [28, Ch. III, §2.9, corol. 1] $\tilde{M}$ — конечно порожденный $\tilde{R}\otimes_{\mathbb{C}} A$-модуль, а потому $\mathcal{F}_x := \operatorname{Proj}(\tilde{M})$ — когерентный пучок без кручения на $X \times U$.

Заметим, что определены пучки без кручения $\mathcal{F}_{x,m} := \operatorname{Proj}(\tilde{M}(m))$; для любого m $\mathcal{F}_{x,m} \hookrightarrow \mathcal{F}_{x,m+1}$, поскольку $\tilde{M}(m) \hookrightarrow \tilde{M}(m+1)$, и $\mathcal{F}_{x,md} \simeq \mathcal{F}_x(mY')$, поскольку $\mathcal{F}_x(mY') \simeq \operatorname{Proj}(\tilde{M}^{(d)}(m))$ в силу [18, ch.II, prop.5.12], и $\operatorname{Proj}(\tilde{M}^{(d)}(m)) \simeq \operatorname{Proj}(\tilde{M}(md))$ в силу [29, prop. 2.4.7].

Утверждение о том, что $\mathcal{F}_x$ задает семейство пучков Кричевера следует из более сильного утверждения:

Лемма 2.1. *(ср. [21, lemma 3.5]) Для всех m $H^0(X\times U, \mathcal{F}_{x,m}) = M_m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению, $M_m \subset H^0(X\times U, \mathcal{F}_{x,m})$. Пусть $a \in H^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m})$, $a \notin M_m$. Тогда $a = (a_1,\dots,a_k)$, где $a_i \in \tilde{M}(m)_{(b_i)}$, $b_i \in \tilde{R}_d$ — порождающие пространства $\tilde{R}_d$ (а также порождающие алгебры $\tilde{R}^{(d)}$), причем $b_1 = 1_1^d$ (1_1 обозначает здесь $i(1)$) и $a_i = a_j$ в $\tilde{R}_{b_ib_j}$.

Пусть $a_i = \tilde{a}_i/b_i^{k_i}$, где $\tilde{a}_i \in M_{k_id+m}$, $a_1 = \tilde{a}_1/1_1^{k_1}$. Заметим, что $k_1 > 0$, так как $a \notin M_m$. Действительно, если бы $\tilde{a}_1 \in M_m$, то $a = \tilde{a}_1$, так как $\tilde{M}(m)$ — $\tilde{R}$-модуль без кручения.

Таким образом, $\tilde{a}_1 \in (M_{k_1+m}\backslash M_{k_1+m-1})$. Тогда для $b_i \in \tilde{R}_d\backslash\tilde{R}_{d-1}$ (такие элементы существуют, поскольку все элементы из $\tilde{R}_{d-1} \subset \tilde{R}_d$ принадлежат идеалу, определяющему дивизор C) получаем $b_i^{k_i} \in \tilde{R}_{dk_i}\backslash\tilde{R}_{dk_i-1}$, и следовательно, $\tilde{a}_1b_i^{k_i} \in (M_{k_1+dk_i+m}\backslash M_{k_1+dk_i+m-1})$. С другой стороны, $\tilde{a}_1b_i^{k_i} = \tilde{a}_i1_1^{k_1}$, и $\tilde{a}_i1_1^{k_1} \in M_{k_1+dk_i+m-1} \subset M_{k_1+dk_i+m}$, то есть $\tilde{a}_1b_i^{k_i} \notin (M_{k_1+dk_i+m}\backslash M_{k_1+dk_i+m-1})$ — противоречие. Значит, $a \in M_m$.
□

Пучок $\mathcal{F}_x$ имеет ранг 1, так как мы рассматриваем кольцо R ранга 1, то есть в общей точке X размерность пространства собственных функций равна 1 (ср. [2, lemma 4.3]), а это означает, что ранг $\mathcal{F}_x$ в общей точке равен 1.

Заметим, что из леммы вытекает и существование дифференцирований ∇_i: для $m \in M_i$ определим $\nabla_i(m) = \partial_i(me^{x_1k_1+\ldots+x_nk_n})e^{-x_1k_1-\ldots-x_nk_n} \in M_{i+1}$.

Последнее утверждение нашей теоремы следует из теоремы 1.2.

3. Примеры свободных модулей Бейкера – Ахиезера

В этом параграфе мы приведем примеры свободных $\mathcal{D}$-модулей Бейкера – Ахиезера на алгебраических многообразиях.

3.1. Модули Бейкера – Ахиезера на алгебраических кривых

Пусть Γ — неособая алгебраическая кривая, $q \in \Gamma$ — выделенная точка. Выберем в окрестности q локальный параметр k^{-1} $(k^{-1}(q) = 0)$. Выберем также неспециальный дивизор $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_g$, где g — род Γ. Существует единственная функция $\psi(x, P)$, называемая функцией Бейкера – Ахиезера, которая обладает следующими двумя свойствами.

1. В q функция ψ имеет существенную особенность вида

$$\psi = e^{xk}\left(1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + \ldots\right).$$

2. На $\Gamma \backslash \{q\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами в дивизоре γ.

Рассмотрим $\mathcal{D}_1$-модуль, порожденный функцией ψ:

$$M = \mathcal{D}_1\psi(x, P) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\partial_x^n \psi(x, P).$$

На M задана как структура $\mathcal{D}_1$-модуля, так и структура модуля над кольцом мероморфных функций A_q на Γ с полюсом в q. Таким образом M является модулем Бейкера – Ахиезера ранга 1. Справедливо равенство

$$L(\lambda)\psi = \lambda\psi,\ \ \lambda \in A_q.$$

Операторы $L(\lambda), L(\mu), \mu \in A_q$ коммутируют.

3.2. Модули Бейкера – Ахиезера на главно поляризованных абелевых многообразиях

Обозначим через $X^g = \mathbf{C}^g/\{\mathbf{Z}^g + \Omega\mathbf{Z}^g\}$ главно поляризованное комплексное абелево многообразие, где Ω — симметричная $g \times g$-матрица с $\mathrm{Im}\Omega > 0$. Тэта-функция определяется рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp(\pi i\langle\Omega n, n\rangle + 2\pi i\langle n, z\rangle), z \in \mathbf{C}^g,$$

где $\langle n, z\rangle = n_1 z_1 + \cdots + n_g z_g$. Функция $\theta(z)$ обладает свойствами периодичности

$$\theta(z + \Omega m + n) = \exp(-\pi i\langle\Omega m, m\rangle - 2\pi i\langle m, z\rangle)\theta(z),\ \ m, n \in \mathbf{Z}^g.$$

Мы будем предполагать, что тэта-дивизор (нули тэта-функции) несингулярен. Обозначим через $\mathcal{L}_c, c \in \mathbb{C}^g, c \notin \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$ линейное расслоение над X^g, глобальные (мероморфные) сечения которого задаются функциями $f(z)$ на $\mathbb{C}^g$ со свойством

$$f(z + \Omega m + n) = \exp(-2\pi i\langle m, c\rangle)f(z), m, n \in \mathbb{Z}^g.$$

Например, мероморфным сечением $\mathcal{L}_c$ является $\frac{\theta(z+c)}{\theta(z)}$. Пусть

$$M_c(n) = \left\{ f(z, x)\exp\left(-\sum_{j=1}^{g} x_j \partial_{z_j}\log\theta(z)\right), f(z, x) \in \mathrm{H}^0(X^g, \mathcal{L}_{c+x}(n\Theta)) \right\},$$

где Θ — тэта-дивизор,

$$M_c = \cup_{n=1}^{\infty} M_c(n).$$

Теорема 3.1. *(А. Накаяшики) Если тэта-дивизор несингулярен, то M_c является свободным $\mathcal{D}_g$-модулем ранга g!*

Следствие 3.1. *Существует вложение*

$$L : A_\Theta \to Mat(g!, \mathcal{D}_g)$$

кольца мероморфных функций на X^g с полюсом в Θ в кольцо $(g! \times g!)$-матричных дифференциальных операторов.

На самом деле теорема 3.1 является следствием более сильного утверждения. Введем обозначения:

$$\mathrm{gr}_n M_c = M_c(n)/M_c(n-1), \ \mathrm{gr} M_c = \bigoplus_n \mathrm{gr}_n M_c,$$

$$\mathcal{D}_g(n) = \{\sum_{|\alpha|\le n} f_\alpha(x)\partial_x^\alpha \in \mathcal{D}_g\}, \ \mathrm{gr}\mathcal{D}_g = \bigoplus_n \mathcal{D}_g(n)/\mathcal{D}_g(n-1).$$

Теорема 3.2. *(А. Накаяшики) Если тэта-дивизор несингулярен, то $\mathrm{gr}M_c$ является свободным $\mathrm{gr}\mathcal{D}_g$-модулем ранга $g!$*

При $g = 2$ в M_c можно выбрать базис следующего вида [31]:

$$\psi_1 = \frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)),$$

$$\psi_2 = \frac{\theta(z+c+c_1+x)\theta(z-c_1)}{\theta^2(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)).$$

Тогда, например, для мероморфной функции $\frac{\theta(z+\alpha)\theta(z-\alpha)}{\theta^2(z)}$ по теореме Накаяшики существуют единственные дифференциальные операторы $L_{ij}^\alpha \in \mathcal{D}_2$ такие, что

$$L_{11}^\alpha\psi_1 + L_{12}^\alpha\psi_2 = \frac{\theta(z+\alpha)\theta(z-\alpha)}{\theta^2(z)}\psi_1,$$

$$L_{21}^\alpha\psi_1 + L_{22}^\alpha\psi_2 = \frac{\theta(z+\alpha)\theta(z-\alpha)}{\theta^2(z)}\psi_2.$$

При различных α матричные операторы с компонентами L_{ij}^α коммутируют. Операторы Накаяшики изучались в работах [31, 32].

3.3. Модули Бейкера – Ахиезера на подмногообразиях в главно поляризованных абелевых многообразиях

Пусть по-прежнему X^g — главно поляризованное абелево многообразие с несингулярным тэта-дивизором. Через Θ_a обозначим сдвиг тэта-дивизора на $a \in \mathbb{C}^g$. Введем обозначения

$$Y^k = \Theta_{a_1} \cap \cdots \cap \Theta_{a_k}, k < g,$$
$$Q^k = Y^k \cap \Theta.$$

Мы предполагаем, что подмногообразие Y^s пересекается с $\Theta_{a_{s+1}}$ и Θ трансверсально и что подмногообразия $Y^k, Q^k \subset X^g$ несингулярны. Через $\mathcal{L}_c^k$ обозначим ограничение расслоения $\mathcal{L}_c$ на Y^k.

Введем модуль Бейкера – Ахиезера $M_c^k = \cup_{n=1}^\infty M_c^k(n)$ над $\mathcal{D}_{g-k}$:

$$M_c^k(n) = \left\{ f(z,x)\exp\left(-\sum_{j=1}^g x_j\partial_{z_j}\log\vartheta(z)|_{Y^k}\right), f(z,x) \in \mathrm{H}^0(Y^k, \mathcal{L}_{c+x}^k(nQ^k))\right\}.$$

Справедлива следующая теорема [33, 34].

Теорема 3.3. *Для a_i, c в общем положении M_c^k является свободным $\mathcal{D}_{g-k}$-модулем ранга $g!$.*

Кроме того $\mathrm{gr}M_c^k$ является свободным $\mathrm{gr}\mathcal{D}_{g-k}$-модулем ранга $g!$.

Следствие 3.2. *Существует вложение*

$$L : A_{Q^k} \to Mat(g!, \mathcal{D}_{g-k})$$

кольца мероморфных функций на Y^k с полюсом на Q^k в кольцо $(g! \times g!)$-матричных дифференциальных операторов.

3.4. БА-модули на рациональных многообразиях

В этом параграфе в качестве спектрального многообразия мы будем рассматривать многообразие, которое получается из $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ отождествлением двух гиперповерхностей.

Фиксируем четыре числа $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ такие, что a_i и b_i одновременно не обращаются в ноль и $(a_1 : b_1) \neq (a_2 : b_2)$. Фиксируем также невырожденное линейное преобразование $\mathcal{P} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Это преобразование индуцирует проективное преобразование $\mathbb{C}P^{n-1}$, которое будем обозначать тем же символом $\mathcal{P}$. Через Γ обозначим многообразие, полученное из $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ отождествлением двух непересекающихся гиперповерхностей $p_1 \times \mathbb{C}P^{n-1} \sim p_2 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ с помощью проективного преобразования $\mathcal{P}$, где $p_i = (a_i : b_i)$. А именно: будем отождествлять точки

$$(a_1 : b_1, t) \sim (a_2 : b_2, \mathcal{P}(t)),\ t = (t_1 : \cdots : t_n) \in \mathbb{C}P^{n-1}.$$

Несложно показать, что на Γ можно ввести структуру алгебраического многообразия.

Обозначим через $f(P)$ следующую форму на $\mathbb{C}^{n+2}$

$$f(z_1, z_2, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i z_1 t_i + \beta_i z_2 t_i), \tag{2}$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$. Причем будем предполагать, что для всех $t = (t_1, \ldots, t_n)$ выполнено тождество

$$f(a_1, b_1, t) - Af(a_2, b_2, \mathcal{P}(t)) = 0,\ A \in \mathbb{C}^*, \tag{3}$$

которое дает ограничение на выбор констант $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$. В силу равенства (3) уравнение

$$f(z_1 : z_2, t_1 : \cdots : t_n) = 0$$

корректно определяет гиперповерхность на Γ.

Обозначим через λ_j и $\mathbf{w_j}$ соответственно собственные числа и собственные векторы преобразования $\mathcal{P}$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda_j \neq \lambda_k \text{ при } j \neq k \tag{4}$$

и форма $f(P)$ выбрана так, что

$$f(a_1, b_1, \mathbf{w_j}) \neq 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

На $\mathbb{C}^{n+2}$ введем дополнительно n форм

$$f_i(z_1, z_2, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik} z_1 t_k + \beta_{ik} z_2 t_k).$$

При этом будем предполагать, что для всех $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ выполнено тождество

$$\frac{f_i(a_1, b_1, t)}{f(a_1, b_1, t)} - \frac{f_i(a_2, b_2, \mathcal{P}(t))}{f(a_2, b_2, \mathcal{P}(t))} - c_i = 0, \quad c_i \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

В силу (3) это тождество эквивалентно

$$f_i(a_1, b_1, t) - A f_i(a_2, b_2, \mathcal{P}(t)) - c_i f(a_1, b_1, t) = 0. \tag{7}$$

Размерность пространства таких форм равна $(n+1)$. Выберем $f_1, \ldots, f_n$ так, чтобы $f_1, \ldots, f_n$ и f были линейно независимы (любая другая форма, удовлетворяющая (6), является линейной комбинацией $f, f_1, \ldots, f_n$).

Обозначим через $M_\Gamma(k)$ множество функций вида

$$\psi(x, P) = \frac{h(x_1, \ldots, x_n, P)}{f^k(P)} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(P)}{f(P)} x_j\right),$$

для которых при всех $t = (t_1 : \cdots : t_n) \in \mathbb{C}P^{n-1}$ выполнено тождество

$$\psi(x, a_1 : b_1, t) - \Lambda \psi(x, a_2 : b_2, \mathcal{P}(t)) = 0, \ \Lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Здесь $P = (z_1 : z_2, t) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ и $h(x, P)$ — форма следующего вида:

$$h(x, P) = \sum_{0 \le j \le k, |\alpha| = k} h_{j\,\alpha}(x)\, z_1^j z_2^{k-j}\, t^\alpha, \tag{9}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot t_n^{\alpha_n}$.

Заметим, что в силу того, что Λ не зависит от x, тождество (8) сохраняет вид при дифференцировании ψ по x_j. Следовательно, мы имеем n отображений

$$\partial_{x_j} : M_\Gamma(k) \to M_\Gamma(k+1), \ j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом на множестве

$$M_\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_\Gamma(k)$$

задана структура модуля Бейкера – Ахиезера над кольцом дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n$.

Имеет место теорема (см. [35]).

Теорема 3.4. *Модуль Бейкера – Ахиезера M_Γ является свободным $\mathcal{D}_n$-модулем ранга n, порожденным n функциями из $M_\Gamma(1)$.*

Следствие 3.2. *Существует вложение*

$$D : A_f \to Mat(n, \mathcal{D}_n)$$

кольца мероморфных функций на Γ с полюсом на гиперповерхности $f = 0$ в кольцо дифференциальных операторов по переменным $x_1, \ldots, x_n$ с матричными коэффициентами размерности $n \times n$.

В силу рациональности Γ коэффициенты операторов выражаются через элементарные функции (см. [35]).

4. Заключение

Для классификации коммутирующих колец дифференциальных операторов в частных производных решение следующих задач, как мы полагаем, является важным.

1. Классифицировать алгебраические многообразия (сингулярные) X с сингулярным унирациональным дивизором $\mathbb{Q}$-Картье Y, индекс n-кратного самопересечения которого равен d^n (см. теорему 1.3).

2. Классифицировать алгебраические многообразия из п.1, допускающие пучки Кричевера.

3. Найти дополнительные условия, которым должны удовлетворять геометрические данные из п.1 и пучки Кричевера, чтобы можно было восстановить модуль Бейкера – Ахиезера или кольцо дифференциальных операторов (см. теорему 1.5).

Отметим, что в работе [21] была дана классификация коммутативных подколец в кольце $\hat{D}$ (пополненном кольце дифференциальных операторов) в терминах геометрических данных и пучков без кручения (см. введение), причем такие подкольца включают в себя, как частный случай, и кольца дифференциальных операторов, рассматриваемые в настоящей работе. Подход к классификации, рассматривавшийся в работе [21], отличается от подхода, связанного с изучением модулей Бейкера – Ахиезера, и основан на обобщении теории Сато. В случае многообразий размерности 1 оба подхода согласованы и приводят к известной классификации колец обыкновенных дифференциальных операторов. В случае многообразий размерности 2 полезно сравнить эти два подхода.

Вопрос о дополнительных условиях, которым должен удовлетворять пучок, относится и к пучкам из работы [21]: каковы дополнительные условия, которым должен удовлетворять пучок, чтобы кольцо операторов в пополненном кольце $\hat{D}$, построенное по этим данным, являлось кольцом дифференциальных операторов? Как мы думаем, оба вопроса согласованы.

Список литературы

[1] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, *Функц. анализ и его прилож.*, **11**:1, (1977), 15–31.

[2] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ. и его прилож.*, **12**:3, (1978), 20–31.

[3] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, *Успехи матем. наук*, **35**:6, (1980), 47–68.

[4] О. И. Мохов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения”, *Известия АН СССР. Серия матем.*, **53**:6, (1989), 1291–1314.

[5] А. Е. Миронов, “Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два”, *Матем. сб.*, **195**:5, (2004), 103—114.

[6] А. Е. Миронов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:3, (2005), 91—94.

[7] D. Zuo, “Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2”, arXiv: 1105.5774.

[8] И. М. Кричевер, “Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы”, *Функц. анализ и его прилож.*, **10**:2, (1976), 75–77.

[9] Б. А. Дубровин, “Матричные конечнозонные операторы.”, *Современные проблемы математики.*, **23**, Итоги науки и техники, (1983), 33–78.

[10] П. Г. Гриневич, “Векторный ранг коммутирующих матричных дифференциальных операторов. Доказательство критерия С. П. Новикова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3, (1986), 458–478.

[11] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *Успехи матем. наук*, **32**:6, (1977), 183–208.

[12] A. Kasman, E. Previato, “Commutative partial differential operators”, *Physica D.*, **152–153**, (2001), 66–77.

[13] O. Chalykh, A. Veselov, “Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras”, *Comm. Math. Phys.*, **126**:3, (1990), 597–611.

[14] А. П. Веселов, М. В. Фейгин, О. А. Чалых, “Новые интегрируемые деформации квантовой задачи Калоджеро – Мозера”, *Успехи матем. наук*, **51**:3, (1996), 185–186.

[15] В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина, “Коммутирующие дифференциальные многомерные операторы третьего порядка, задающие КдФ-иерархию”, *Успехи матем. наук*, **58**:3, (2003), 187–188.

[16] S. L. Kleiman, “Toward a numerical theory of ampleness”, *Annals of Math.*, **84**, (1966), 293–344.

[17] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, Москва, 1989.

[18] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, New York – Berlin – Heilderberg, 1977.

[19] A. Nakayashiki, “Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties”, *Amer. J. Math.*, **116**, (1994), 65–100.

[20] A. Nakayashiki, “Structure of Baker – Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems”, *Duke Math. J.*, **62**:2, (1991), 315–358.

[21] A. B. Zheglov, “On rings of commuting partial differential operators”, arXiv: 1106.0765.

[22] A. N. Parshin, “Integrable systems and local fields”, *Commun. Algebra*, **29**:9, (2001), 4157–4181.

[23] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **2009**:629, 133–170.

[24] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Formal groups arising from formal punctured ribbons”, *Int. J. of Math.*, **06**, (2010), 755–797.

[25] D.V. Osipov, “The Krichever correspondence for algebraic varieties”, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, **65**:5, (2001), 91–128.

[26] А.Б. Жеглов, Д.В.Осипов, “О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера”, *Мат. заметки*, **81**:4, (2007), 528–539.

[27] M. Atiyah, I. Macdonald, *Introduction to Commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.

[28] N. Bourbaki, *Algebre Commutative*, Elements de Math., v. 27,28,30,31, Hermann, Paris, 1961–1965.

[29] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné, “Éléments de géométrie algébrique II”, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **8**, (1961).

[30] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[31] А. Е. Миронов, “Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями”, *Сиб. мат. журнал*, **41**:6, (2000), 1389–1403.

[32] А. Е. Миронов, “Вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, связанные с двумерными абелевыми многообразиями”, *Сиб. мат. журнал*, **43**:1, (2002), 126–143.

[33] А. Е. Миронов, “Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям”, *Сиб. матем. журнал*, **43**:5, (2002), 1102–1114.

[34] K. Cho, A. E. Mironov, A. Nakayashiki, “Baker – Akhiezer Modules on the Intersections of Shifted Theta Divisors”, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **47**:2, (2011), 353–567.

[35] I. A. Melnik, A. E. Mironov, “Baker – Akhiezer modules on rational varieties”, *SIGMA*, **6**, (2010), 030, 15 pp.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 12 октября 2011 г.

Первый автор (А.Б.Ж.) поддержан грантами РФФИ 10-01-00748-а, 11-01-00145-а, НШ-3224.2010.1, РНП 2.1.1.3704, ННП 14.740.11.0794, 02.740.11.5213. Второй автор (А.Е.М.) поддержан интеграционным проектом №65 СО РАН.

Zheglov A. B., Mironov A. E. Baker – Akhiezer modules, Krichever sheaves, and commuting rings of partial differential operators. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 1. P. 20–34.

ABSTRACT

In this work we give a review of several results about commutative subrings of partial differential operators. We show that n-dimensional commutative ring of partial differential operators with scalar (not matrix) coefficients (with certain mild conditions) corresponds to a Baker – Akhiezer module on the spectral algebraic variety. We also show that there is a family of coherent torsion free sheaves of special type. The existence of such sheaves gives a strong restriction on the structure of the spectral variety, in particular, it is possible to find the selfintersection index of a divisor at infinity.

Key words: *commuting partial differential operators, spectral varieties, Baker-Akhieser modules*