ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 4, с. 560–562

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О НЕЛОКАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

© 2006 г. А. С. Макин

Хорошо известно, что система собственных функций формально самосопряженного дифференциального оператора с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими точечный спектр, образует ортонормированный базис в пространстве L_2. Во многих работах (см., например, [1, 2]) исследовался вопрос, сохраняется ли свойство базисности при слабом в некотором смысле возмущении исходного самосопряженного оператора, имеющего дискретный спектр. Для несамосопряженного оператора, система корневых функций которого образует базис Рисса в L_2, аналогичный вопрос изучался в [3]. В настоящей работе на отрезке $[0,1]$ рассматривается задача

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) + V(u), \tag{1}$$

где $V(u)$ – ограниченный линейный функционал, заданный на множестве функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$. Если $V(u) \equiv 0$, то задача (1) является самосопряженной, а система собственных функций – обычной тригонометрической системой. Случай $V(u) = bu(0)$, где b – произвольное комплексное число, изучен в [4]. Указанная задача является самосопряженной тогда и только тогда, когда $b = \bar{b}$, однако при любом b система корневых функций образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Будем рассматривать задачу (1), если $V(u) = \int_0^1 p(x)u(x)\,dx$, где комплексная функция $p(x) \in L_1(0,1)$. Из работы [5] следует, что система собственных и присоединенных функций $\{u_n(x)\}$ задачи (1) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В работе [5] также установлено, что

$$|\operatorname{Im}\mu_n| \le M, \tag{2}$$

где $\mu_n^2 = \lambda_n$ – собственные значения задачи (1), $\operatorname{Re}\mu_n \ge 0$, M – некоторая постоянная, и, кроме того, для любого $R > 0$ существует не более конечного числа собственных значений, по абсолютной величине не превосходящих R. Несложные вычисления показывают, что характеристический определитель $\Delta(\mu)$ задачи (1) представляется в виде $\Delta(\mu) = -8i\mu\tilde{\Delta}(\mu)$, где

$$\tilde{\Delta}(\mu) = \sin^2\frac{\mu}{2} + \frac{1}{8i\mu}\left((1-e^{-i\mu})\int_0^1 p(x)e^{i\mu x}\,dx - (1-e^{i\mu})\int_0^1 p(x)e^{-i\mu x}\,dx\right).$$

Пусть $\Gamma(z,r)$ – окружность радиуса r с центром в точке z. Легко видеть, что в правой полуплоскости вне окружностей $\Gamma(2\pi n, 1/2)$ $(n = 0,1,\ldots)$ $|\sin^2(\mu/2)| \ge c_1 > 0$. Так как все корни уравнения

$$\tilde{\Delta}(\mu) = 0 \tag{3}$$

удовлетворяют условию (2), то стандартными рассуждениями, связанными с применением теоремы Руше, находим, что все достаточно большие по абсолютной величине корни уравнения (3) расположены внутри окружностей $\Gamma(2\pi n, 1/2)$ и внутри каждой из этих окружностей функции $\tilde{\Delta}(\mu)$ и $\sin^2(\mu/2)$ имеют равное число корней. Заменой $\mu = 2\pi n + \rho$, где $|\rho| \le 1/2$, уравнение (3) приводим к виду

$$\sin^2\frac{\rho}{2} + \Delta_1(\rho) = 0, \tag{4}$$

$$\Delta_1(\rho) = \frac{1}{8i(2\pi n+\rho)}\left((1-e^{-i\rho})\int_0^1 p(x)e^{i(2\pi n+\rho)x}\,dx - (1-e^{i\rho})\int_0^1 p(x)e^{-i(2\pi n+\rho)x}\,dx\right).$$

Отсюда следует, что $\sin^2(\rho/2) = O(n^{-1})$, стало быть, $\rho = O(n^{-1/2})$, а значит, при всех достаточно больших n все корни уравнения (4) удовлетворяют неравенству

$$|\rho| \le c_2 n^{-1/2} \quad (c_2 > 0). \tag{5}$$

Очевидно, что при всех достаточно больших n для любого ρ, удовлетворяющего неравенству (5), справедливо неравенство $|\sin^2(\rho/2)| \geq c_3|\rho|^2$ $(c_3 > 0)$. Из леммы Римана и разложения по формуле Маклорена функций $e^{i\rho}$ и $e^{-i\rho}$ следует, что при всех достаточно больших n для любого ρ, удовлетворяющего неравенству (5), имеет место неравенство $|\Delta_1(\rho)| \leq c_3|\rho|/(2n)$. Из двух последних неравенств вытекает, что при всех достаточно больших n уравнение (4) не имеет корней, если $|\rho| \geq 1/n$, следовательно, все достаточно большие по абсолютной величине корни уравнения (3) имеют вид $\mu_n' = 2\pi n + \rho_n'$, $\mu_n'' = 2\pi n + \rho_n''$, где $|\rho_n'| < 1/n$, $|\rho_n''| < 1/n$.

Обозначим через P множество функций $p(x)$ таких, что система собственных и присоединенных функций задачи (1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, $\bar{P} = L_1(0,1) \setminus P$.

Теорема. *Множества P и $\bar{P}$ всюду плотны в $L_1(0,1)$.*

Доказательство. Обозначим $a_0 = \int_0^1 p(x)\,dx$, $a_n = \int_0^1 p(x)\cos(2\pi nx)\,dx$, $b_n = \int_0^1 p(x)\sin(2\pi nx)\,dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$, S_n – двумерное подпространство, образованное корневыми функциями, отвечающими собственным значениям $\lambda_n' = (\mu_n')^2$ и $\lambda_n'' = (\mu_n'')^2$ $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$, где n_0 – некоторое достаточно большое число, и S_n – корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ_n, где $n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$. Всюду в дальнейшем запись $\|f\|$ будет означать норму $\|f\|_{L_2(0,1)}$. Рассмотрим ряд случаев.

1) Очевидно, что при $a_n = b_n = 0$ $(n \geq n_0)$ и любых C_1 и C_2 $(|C_1| + |C_2| > 0)$ функция $u_n(x) = C_1\sin(2\pi nx) + C_2\cos(2\pi nx)$ является собственной функцией задачи (1), отвечающей собственному значению $\lambda_n = \lambda_n' = \lambda_n'' = (2\pi n)^2$. Подпространство S_n образовано двумя собственными функциями, отвечающими собственному значению λ_n.

2) Легко проверить, что в случае $|a_n| + |b_n| > 0$ $(n \geq n_0)$ функция $\overset{0}{u}_n(x) = b_n\cos(2\pi nx) - a_n\sin(2\pi nx)$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda_n' = (2\pi n)^2$. Пусть $a_n = 0$, $b_n \neq 0$. Тогда $\overset{0}{u}_n(x) = b_n\cos(2\pi nx)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n'. Непосредственно проверяется, что функция $\overset{1}{u}_n(x) = (4\pi n)^{-1}(b_n x + \gamma_n)\sin(2\pi nx)$, где $\gamma_n = 2\pi n - \int_0^1 p(x)x\sin(2\pi nx)\,dx$, является присоединенной функцией, отвечающей собственному значению λ_n' и собственной функции $\overset{0}{u}_n(x)$. Подпространство S_n образовано корневыми функциями $\overset{0}{u}_n(x)$ и $\overset{1}{u}_n(x)$.

Пусть $a_n \neq 0$. Ранее было получено, что $\lambda_n' = (2\pi n)^2$. Докажем, что $\lambda_n' \neq \lambda_n''$. Если предположить противное, то собственному значению $(2\pi n)^2$ отвечает двумерное собственное подпространство S_n, содержащее, в частности, собственную функцию $\overset{0}{u}_n(x)$. Если S_n образовано двумя линейно независимыми собственными функциями, то оно содержит собственную функцию $\check{u}_n(x) = \cos(2\pi nx)$. Отсюда следует, что $a_n = 0$, т.е. приходим к противоречию. Если S_n содержит присоединенную функцию $\overset{1}{u}_n(x)$, то, решая уравнение $\overset{1}{u}{}_n''(x) + (2\pi n)^2\overset{1}{u}_n(x) = \overset{0}{u}_n(x)$, легко проверить, что она имеет вид $\overset{1}{u}_n(x) = x(\alpha_n\cos(2\pi nx) + \beta_n\sin(2\pi nx)) + c_n\cos(2\pi nx) + d_n\sin(2\pi nx)$, где $\alpha_n = -a_n/(4\pi n)$. Так как $\overset{1}{u}_n(0) = \overset{1}{u}_n(1)$, то $\alpha_n = 0$, что является противоречием. Следовательно, $\lambda_n'' = (2\pi n + \rho_n'')^2$, где $\rho_n'' \neq 0$.

Вычислим асимптотику собственной функции $\tilde{u}_n(x)$, отвечающей собственному значению λ_n''. Согласно [6, с. 54], функция $\tilde{u}_n(x)$ (с точностью до линейного множителя) имеет вид

$$\tilde{u}_n(x) = (1 - e^{i(2\pi n+\rho_n'')})e^{-i(2\pi n+\rho_n'')x} - (1 - e^{-i(2\pi n+\rho_n'')})e^{i(2\pi n+\rho_n'')x} = -2i\rho_n''\cos(2\pi n + \rho_n'')x + O((\rho_n'')^2),$$

следовательно, можно считать, что $\tilde{u}_n(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi n + \rho_n'')x + O(\rho_n'')$, и, стало быть, подпространство S_n образовано двумя собственными функциями, функцией $\hat{u}_n(x) = \sqrt{2}(\hat{b}_n\cos(2\pi nx) - \hat{a}_n\sin(2\pi nx))$, где $\hat{a}_n = a_n(|a_n|^2 + |b_n|^2)^{-1/2}$, $\hat{b}_n = b_n(|a_n|^2 + |b_n|^2)^{-1/2}$, и функцией $\tilde{u}_n(x)$. Легко видеть, что $\|\hat{u}_n(x)\| = 1 + O(n^{-1})$, $\|\tilde{u}_n(x)\| = 1 + O(n^{-1})$.

Пусть $b_n \neq 0$ для всех достаточно больших n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{a}_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{b}_n = 1$, следовательно, $\hat{u}_n(x) = \tilde{u}_n(x) + o(1)$. Обозначив через $\hat{v}_n(x)$ функцию из биортогонально сопряженной системы, стоящую в паре с $\hat{u}_n(x)$, и повторив далее рассуждения из работы [7], находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{u}_n\|\|\hat{v}_n\| = \infty,$$

откуда следует, что система корневых функций задачи (1) не образует базис в $L_2(0,1)$.

В работе [5] доказано, что подпространства S_n образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$. Если $a_n = 0$ для всех достаточно больших n, то, выбирая в каждом из подпространств S_n ортонормированный базис, получаем [8, с. 414–415], что система собственных и присоединенных функций задачи (1) является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $L_2(0,1)$, а $\sigma_n(x,f)$ – n-я частичная сумма ее разложения в тригонометрический ряд. Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N $(N > n_0)$, что $\|f(x) - \sigma_N(x,f)\| < \varepsilon/2$. Положим $p(x) = \sigma_N(x,f)$, тогда $a_n = b_n = 0$ при $n > N$. Из наших рассуждений вытекает, что в этом случае система корневых функций задачи (1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, следовательно, множество P всюду плотно в $L_2(0,1)$, а значит, и в $L_1(0,1)$.

Пусть

$$p(x) = \sigma_N(x,f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx),$$

где $a_n = \varepsilon/(2^n n)$, $b_n = \varepsilon/2^n$. Тогда $\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$, а система корневых функций задачи (1) не является базисом в $L_2(0,1)$. Отсюда следует, что множество $\bar{P}$ всюду плотно в $L_2(0,1)$ и $L_1(0,1)$. Теорема доказана.

Задачи на собственные значения с нелокальными краевыми условиями исследовались многими авторами. Обширная библиография приведена в работах [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркус А.С.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 3. С. 538–541.
2. *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* // Мат. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 4. С. 558–563.
3. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 9. С. 1516–1529.
4. *Lang P., Locker J.* // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 146. № 1. P. 148–191.
5. *Шкаликов А.А.* // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1982. № 6. С. 12–21.
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
7. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.
8. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
9. *Krall A.M.* // Rocky Mountain J. Math. 1975. V. 5. № 4. P. 493–542.
10. *Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.

Московская государственная академия
приборостроения и информатики

Поступила в редакцию
11.05.2004 г.