А. В. Яковлев, Сетевые подкольца обобщенных матричных колец, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 211, 184–198

А. В. Яковлев

СЕТЕВЫЕ ПОДКОЛЬЦА ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

В ряде работ исследовались полуцепные кольца, т.е. кольца, которые раскладываются как в прямую сумму левых идеалов, решетка подидеалов каждого из которых – цепочка, так и в прямую сумму правых идеалов с аналогичным свойством (см., например, [2]–[4]). Однако, оказалось, что можно описать (при достаточно слабых ограничениях) и односторонне полуцепные кольца. Для нетеровых колец это сделано в [5], для полунаследственных анонсированно в [1]. При изложении подробного доказательства последнего результата выяснилось, что его основная часть проходит и в гораздо более общей ситуации, а именно, для колец, раскладывающихся в прямую сумму левых идеалов, группы гомоморфизмов которых друг в друга в некотором смысле невелики. Оказалось, и это основной результат настоящей работы (теорема 2), что эти кольца являются сетевыми подкольцами в обобщенных матричных кольцах. Как следствие получится и упомянутый выше результат из [1] о полунаследственных слева полуцепных кольцах.

Для гомоморфизмов встречающихся модулей мы применяем правую запись; в частности, все модули являются правыми модулями над кольцами эндоморфизмов.

§ 1. Артиновы кольца с одномерными группами гомоморфизмов

В этом параграфе мы рассматриваем кольца K, обладающие следующими свойствами: a) K артиново слева; b) кольцо эндоморфизмов любого неразложимого левого идеала – тело; c) для любых неразложимых левых идеалов P, Q группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(P, Q)$ либо нулевая, либо одномерна как левый модуль над телом эндоморфизмов модуля P. Класс таких колец будем обозначать $\mathcal{R}$.

Пусть Γ – частично упорядоченное множество. Каждому его элементу α сопоставим тело T_α, каждой паре элементов $\alpha \le \beta$ – вложение тел $\mu_{\alpha\beta} : T_\beta \to T_\alpha$, а каждой тройке $\alpha \le \beta \le \gamma$ – элемент $c_{\alpha\beta\gamma} \in T_\alpha$, причем для любых $\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$ и любого $t \in T_\gamma$ выполнены соотношения: $\mu_{\alpha\alpha}$ – тождественное вложение; $c_{\alpha\beta\beta} = 1$;

$c_{\alpha\alpha\beta} = 1$; $\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma}(t) = c_{\alpha\beta\gamma}\mu_{\alpha\gamma}(t)(c_{\alpha\beta\gamma})^{-1}$; $c_{\alpha\beta\gamma}c_{\alpha\gamma\delta} = \mu_{\alpha\beta}(c_{\beta\gamma\delta})c_{\alpha\beta\delta}$. Набор тел T_α, вложений $\mu_{\alpha\beta}$ и элементов $c_{\alpha\beta\gamma}$ называем представлением Г. Два представления с одним и тем же набором тел $\{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$, $\{T_\alpha, '\mu_{\alpha\beta}, 'c_{\alpha\beta\gamma}\}$ назовем эквивалентными, если существуют элементы $d_{\alpha\beta} \in T_\alpha$, такие что $d_{\alpha\alpha} = 1$ для любого α и для любых $\alpha \le \beta \le \gamma$, $t \in T_\beta$ выполняются равенства $d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(d_{\beta\gamma})c_{\alpha\beta\gamma} = 'c_{\alpha\beta\gamma}d_{\alpha\gamma}$, $'\mu_{\alpha\beta}(t) = d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(t)(d_{\alpha\beta})^{-1}$.

Пусть $\Phi = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$ – представление частично упорядоченного множества Г, а Ω – разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение попарно не пересекающихся подмножеств S_α, занумерованных элементами Г. Рассмотрим множество $K(\Phi, \Omega)$ квадратных матриц (a_{ij}), имеющих n строк и n столбцов (как всегда, a_{ij} – элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце этой матрицы), таких что если $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, то $a_{ij} \in T_\alpha$, причем если неверно, что $\alpha \le \beta$, то $a_{ij} = 0$. Ясно, что $K(\Phi, \Omega)$ – группа по сложению; превратим ее в кольцо, положив, как обычно, $(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, а произведение $a_{is}b_{sj}$ при $i \in S_\alpha$, $s \in S_\beta$, $j \in S_\gamma$ считается равным $c_{\alpha\beta\gamma}a_{is}\mu_{\alpha\beta}(b_{sj})$.

Теорема 1. *Для любого представления Φ частично упорядоченного множества Г и любого разбиения Ω множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение попарно не пересекающихся подмножеств S_α, занумерованных элементами $\alpha \in \Gamma$, множество матриц $K(\Phi, \Omega)$ является кольцом из класса $\mathcal{R}$. Если представления Φ, Ψ эквивалентны, то кольца $K(\Phi, \Omega)$, $K(\Psi, \Omega)$ изоморфны. Всякое кольцо из класса $\mathcal{R}$ изоморфно кольцу $K(\Phi, \Omega)$ для некоторого частично упорядоченного множества Г, его представления Φ и разбиения Ω множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Из определения непосредственно вытекает, что введенное на $K(\Phi, \Omega)$ умножение дистрибутивно; соотношение $c_{\alpha\beta\gamma}c_{\alpha\gamma\delta} = \mu_{\alpha\beta}(c_{\beta\gamma\delta})c_{\alpha\beta\delta}$ обеспечивает его ассоциативность. Обозначим через P_i подмножество $K(\Phi, \Omega)$, состоящее из всех тех матриц, у которых ненулевые элементы есть лишь в i-м столбце. Очевидно, что P_i – левый идеал $K(\Phi, \Omega)$. Пусть $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$. Поскольку любой эндоморфизм кольца, рассматриваемого как левый модуль над собой, представляет собой умножение справа на некоторый элемент кольца, каждый элемент из $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)$ является умножением справа на матрицу (a_{st}), у которой все элементы, кроме, быть может, a_{ij}, равны 0. Но для матриц из $K(\Phi, \Omega)$ элемент a_{ij} принадлежит T_α, если $\alpha \le \beta$, и равен 0 в противном случае. Это означает, в частности, что кольцом эндоморфизмов модуля P_i служит тело T_α, а $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)$ – одномерное пространство над T_α

или 0. Таким образом, $K(\Phi, \Omega)$ – кольцо из класса $\mathcal{R}$.

Пусть K – кольцо из класса $\mathcal{R}$; оно раскладывается в прямую сумму неразложимых левых идеалов: $K = P_1 + P_2 + \dots P_n$. На множестве индексов $\{1, 2, \dots, n\}$ введем отношение эквивалентности, считая, что i эквивалентно j тогда и только тогда, когда P_i и P_j изоморфны. Множество классов эквивалентности обозначим через Γ, а сами классы – через S_α $(\alpha \in \Gamma)$. Разбиение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в объединение подмножеств S_α обозначим через Ω. Превратим Γ в частично упорядоченное множество, считая, что $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда для некоторых $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$ существует ненулевой гомоморфизм $P_i \to P_j$; ясно, что тогда ненулевой гомоморфизм существует и для любых других элемнтов из S_α, S_β.

Выберем в каждом классе изоморфных модулей P_i, где $i \in S_\alpha$, по представителю, который будем обозначать P_α; его кольцо эндоморфизмов T_α является по условию b) определения класса колец $\mathcal{R}$ телом. Для $\alpha \leq \beta$ в группе $\mathrm{Hom}(P_\alpha, P_\beta)$, отличной от 0 по определению порядка на Γ, выберем ненулевой гомоморфизм $u_{\alpha\beta} : P_\alpha \to P_\beta$, причем при $\alpha = \beta$ в качестве $u_{\alpha\beta}$ возьмем тождественное отображение. По условию c) из определения класса колец $\mathcal{R}$ всякий гомоморфизм $u : P_\alpha \to P_\beta$ получается из $u_{\alpha\beta}$ умножением слева на некоторый элемент c из тела T_α. В частности, для любых $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ существует единственный элемент $c_{\alpha\beta\gamma} \in T_\alpha$, такой что $u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\gamma}$.

По тому же условию c) для $\alpha \leq \beta$ и любого $t \in T_\beta$ существует единственный элемент $\mu_{\alpha\beta}(t) \in T_\alpha$, такой что $\mu_{\alpha\beta}(t)\, u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} t$. Если x – другой элемент из T_β, то

$$\mu_{\alpha\beta}(tx) u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}(tx) = (u_{\alpha\beta} t) x = \mu_{\alpha\beta}(t)\, u_{\alpha\beta} x = \mu_{\alpha\beta}(t)\, \mu_{\alpha\beta}(x)\, u_{\alpha\beta},$$

и, поскольку элементы из $\mathrm{Hom}(P_\alpha, P_\beta)$ единственным образом предстпвляются в виде $c u_{\alpha\beta}$, мы получаем, что $\mu_{\alpha\beta}(tx) = \mu_{\alpha\beta}(t) \times \mu_{\alpha\beta}(x)$. Аналогично доказывается, что $\mu_{\alpha\beta}(t + x)\, u_{\alpha\beta} = (\mu_{\alpha\beta}(t) + \mu_{\alpha\beta}(x))\, u_{\alpha\beta}$; таким образом, $\mu_{\alpha\beta}$ – вложение тела T_β в тело T_α.

Покажем, что $\Phi = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$ – представление Γ. Для $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ и $t \in T_\gamma$ имеем:

$$\begin{gathered} c_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\alpha\gamma}(t)\, u_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\gamma} t u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} t = \\ = u_{\alpha\beta}(\mu_{\beta\gamma}(t))\, u_{\beta\gamma} = \mu_{\alpha\beta}(\mu_{\beta\gamma}(t))\, u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = \mu_{\alpha\beta}(\mu_{\beta\gamma}(t)) c_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\gamma} u_{\alpha\beta}, \end{gathered}$$

откуда следует, что $c_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\alpha\gamma}(t) = \mu_{\alpha\beta}(\mu_{\beta\gamma}(t))\, c_{\alpha\beta\gamma}$. Далее, при

$\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$ из ассоциативности кольца K следует, что

$$c_{\alpha\beta\gamma}c_{\alpha\gamma\delta}u_{\alpha\delta} = (c_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\gamma})u_{\gamma\delta} = (u_{\alpha\beta}u_{\beta\gamma})u_{\gamma\delta} = \\ = u_{\alpha\beta}(c_{\beta\gamma\delta}u_{\beta\delta}) = \mu_{\alpha\beta}(c_{\beta\gamma\delta})c_{\alpha\beta\delta}u_{\alpha\delta},$$

поэтому $c_{\alpha\beta\gamma}c_{\alpha\gamma\delta} = \mu_{\alpha\beta}(c_{\beta\gamma\delta})c_{\alpha\beta\delta}$. Итак, Φ – представление Γ.

Если $i \in S_\alpha$, то идеал P_i изоморфен P_α; выберем для каждого i какой–нибудь изоморфизм $\phi_i : P_\alpha \to P_i$. Если j – другой индекс, $j \in S_\beta$, $\alpha \le \beta$ и $u \in \operatorname{Hom}(P_i, P_j)$, то гомоморфизмы $u_{\alpha\beta}\phi_j$, $\phi_i u \in \operatorname{Hom}(P_\alpha, P_j)$ отличаются по условию с) лишь правым множителем из T_α, т.е. $\phi_i u = cu_{\alpha\beta}\phi_j$ для некоторого (единственного) $c \in T_\alpha$. Кольцо K изоморфно своему кольцу эндоморфизмов, которое раскладывается в прямую сумму групп $\operatorname{Hom}(P_i, P_j)$. Поэтому каждый эндоморфизм $v \in K$ однозначно раскладывается в сумму компонент $v_{ij} \in \operatorname{Hom}(P_i, P_j)$; поставим ему в соответствие матрицу $(a_{ij}) \in K(\Phi, \Omega)$, где при $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, $\alpha \le \beta$ выполняется равенство $a_{ij}u_{\alpha\beta}\phi_j = \phi_i v_{ij}$, а при α, не меньшем β, $a_{ij} = 0$. Непосредственно проверяется, что это соответствие – изоморфизм K на $K(\Phi, \Omega)$.

Пусть $\Psi = \{T_\alpha, {}'\mu_{\alpha\beta}, {}'c_{\alpha\beta\gamma}\}$ – представление Γ, эквивалентное Φ; это значит, что существуют такие элементы $d_{\alpha\beta}\,(\alpha \le \beta)$, что ${}'\mu_{\alpha\beta}(t) = d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(t)(d_{\alpha\beta})^{-1}$, $d_{\alpha\beta}\,\mu_{\alpha\beta}(d_{\beta\gamma})\,c_{\alpha\beta\gamma} = {}'c_{\alpha\beta\gamma}\,d_{\alpha\gamma}$ для любых $t \in T_\beta$, $\alpha \le \beta \le \gamma$. Заменим элементы $u_{\alpha\beta} \in \operatorname{Hom}(P_\alpha, P_\beta)$, при помощи которых строилось представление Φ, на элементы ${}'u_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}$. Прямая выкладка показывает, что представление Φ заменится на представление Ψ: для $t \in T_\beta$ будет

$${}'u_{\alpha\beta}t = d_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}t = d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(t)\,u_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(t)\,(d_{\alpha\beta})^{-1}\,{}'u_{\alpha\beta} = {}'\mu_{\alpha\beta}(t)\,{}'u_{\alpha\beta},$$

а для $\alpha \le \beta \le \gamma$ –

$${}'u_{\alpha\beta}\,{}'u_{\beta\gamma} = d_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}d_{\beta\gamma}u_{\beta\gamma} = d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(d_{\beta\gamma})\,u_{\alpha\beta}u_{\beta\gamma} = \\ = d_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}(d_{\beta\gamma})\,c_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\gamma} = {}'c_{\alpha\beta\gamma}d_{\alpha\gamma}u_{\alpha\beta} = {}'c_{\alpha\beta\gamma}\,{}'u_{\alpha\gamma}.$$

Из доказанного выше следует, что кольцо K изоморфно не только кольцу $K(\Psi, \Omega)$, но и кольцу $K(\Phi, \Omega)$. Таким образом, кольца $K(\Phi, \Omega)$, $K(\Psi, \Omega)$ изоморфны. Все утверждения теоремы 1 доказаны.

Замечание. К сожалению, не всякое представление множества Γ эквивалентно представлению с $c_{\alpha\beta\gamma} = 1$ для всех $\alpha \le \beta \le \gamma$. Этот факт несколько сложнее, чем кажется на первый взгляд; он связан с тем, что в теле, вообще говоря, не единственное подтело изоморфно другому телу.

§ 2. Сетевые подкольца

Пусть, как и выше, $\Phi = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$ – представление частично упорядоченного множества Γ, а Ω – разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение попарно не пересекающихся подмножеств S_α, занумерованных элементами $\alpha \in \Gamma$, и пусть $K = K(\Phi, \Omega)$. Кольцо K состоит из матриц (a_{ij}), где при $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$ элемент a_{ij} принадлежит телу T_α, если $\alpha \leq \beta$, и равен 0 в противном случае.

Пусть для каждой пары i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ задана подгруппа Λ_{ij} аддитивной группы тела T_α, где $\alpha \in \Gamma$ – такой элемент, что $i \in S_\alpha$, причем если $j \in S_\beta$ и $\alpha \leq \beta$, то $\Lambda_{ij} \neq 0$, а если неверно, что $\alpha \leq \beta$, то $\Lambda_{ij} = 0$. Набор Σ подгрупп Λ_{ij} назовем сетью в $K(\Phi, \Omega)$, если выполнены следующие условия:

1. Для любых $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ и любых $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, $k \in S_\gamma$ выполняется соотношение $\Lambda_{ij}\mu_{\alpha\beta}(\Lambda_{jk}) \subseteq c_{\alpha\beta\gamma}\Lambda_{ik}$ (в частности, для любого i группа Λ_{ii} – подкольцо T_α, так как $c_{\alpha\alpha\alpha} = 1$, а $\mu_{\alpha\alpha}$ – тождественное вложение).

2. Для любого i подкольцо $\Lambda_i = \Lambda_{ii}$ настолько большое, что $1 \in \Lambda_i$ и что T_α – левое кольцо частных кольца Λ_i.

Условие 1 в точности означает, что множество матриц (a_{ij}) из $K(\Phi, \Omega)$, таких что $a_{ij} \in \Lambda_{ij}$ для любых i, j является подкольцом $K(\Phi, \Omega)$. Если для $\alpha \leq \beta$ тело T_α превратить в левый T_β–модуль, положив $tx = t\mu_{\alpha\beta}(x)$ $(t \in T_\alpha,\ x \in T_\beta)$, то из условия 1 вытекает также, что при $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$ группа Λ_{ij} является $\Lambda_i - \Lambda_j$–подмодулем тела T_α.

Если $\Sigma = \{\Lambda_{ij}\}$ – сеть для кольца $K(\Phi, \Omega)$, то, как уже отмечено, подмножество $K(\Phi, \Omega)$, состоящее из всех таких матриц (a_{ij}), что $a_{ij} \in \Lambda_{ij}$ для любых i, j, является подкольцом $K(\Phi, \Omega)$; мы будем называть его сетевым подкольцом $K(\Phi, \Omega)$, отвечающим сети Σ, и обозначать $\Lambda(\Sigma)$.

Теорема 2. *Всякое сетевое подкольцо $\Lambda(\Sigma)$ кольца $K(\Phi, \Omega)$ раскладывается в прямую сумму неразложимых левых идеалов $P_1, \ldots, P_n$, обладающих следующими свойствами:* a) *всякий ненулевой гомоморфизм $P_i \to P_j$ – мономорфизм;* b) *если A, B – содержащиеся в P_j левые идеалы, изоморфные P_i, то существует левый идеал $C \subseteq A \cap B$, также изоморфный P_i. Обратно, если Λ – кольцо, обладающее этими свойствами, то найдутся частично упорядоченное множество Γ, его представление телами Φ и разбиение Ω множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение множеств S_α $(\alpha \in \Gamma)$, такие что Λ – сетевое подкольцо кольца $K(\Phi, \Omega)$.*

Доказательству теоремы 2 посвящены следующие два параграфафа.

Замечание. Условие а) теоремы 2 – некоторая ослабленная форма полунаследственности кольца Λ. Оно эквивалентно условию

а́) проективны 1–порожденные подмодули модулей P_i, являющиеся гомоморфными образами модулей P_j.

В самом деле, если выполнено условие а́) и $u : P_i \to P_j$ – ненулевой гомоморфизм, то образ u – проективный модуль, и потому P_i раскладывается в прямую сумму ядра и образа гомоморфизма u. Но P_i неразложим, а $\operatorname{Im} u \neq 0$; следовательно, $\operatorname{Ker} u = 0$, и u – мономорфизм. Таким образом, условие а) следует из условия а́). Обратное очевидно.

§ 3. Доказательство теоремы 2. Необходимость

Пусть $\Phi = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$ – представление телами частично упорядоченного множества Γ, Ω – разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение множеств S_α $(\alpha \in \Gamma)$, $K = K(\Phi, \Omega)$ – соответствующее кольцо матриц, $\Sigma = \{\Lambda_{ij}\}$ – сеть в K, $\Lambda = \Lambda(\Sigma)$ – отвечающее ей сетевое подкольцо K. Обозначим через e_{ii} матрицу из K, у которой единственный ненулевой элемент равен 1 и находится в i-й строке и i-м столбце. Тогда $1 = e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}$ – разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов, и поэтому $\Lambda = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, где $P_i = \Lambda e_{ii}$, – разложение Λ в прямую сумму левых идеалов. Как хорошо известно, кольцо эндоморфизмов модуля P_i равно $e_{ii}\Lambda e_{ii}$, а это – подкольцо Λ, состоящее из всех матриц, у которых единственный ненулевой элемент находится в i-й строке и i-м столбце. Но множество таких элементов – это кольцо $\Lambda_{ii} = \Lambda_i$. Итак, кольцо эндоморфизмов модуля P_i равно Λ_i; поскольку Λ_i вкладывается в тело T_α, в Λ_i нет нетривиальных идемпотентов, и поэтому идеал P_i неразложим.

Покажем, что для идеалов P_i выполняются условия a), b) теоремы. Множество гомоморфизм из $P_i = \Lambda e_{ii}$ в $P_j = \Lambda e_{jj}$ равно $e_{ii}\Lambda e_{jj}$, и всякий такой гомоморфизм представлет собой умножение справа (в кольце матриц $K(\Phi, \Omega) = K$) на матрицу из Λ, единственный ненулевой элемент которой лежит в i-й строке и j-м столбце. Но множество таких матриц – это подгруппа аддитивной группы тела T_α; умножение в кольце K на такую матрицу (если она, конечно, не нулевая) мономорфно вкладывает группу матриц $K e_{ii}$ со всеми нулевыми столбцами кроме, быть может, i-го, в группу $K e_{jj}$. Поэтому мономорфизмом является и ограничение этого умножения на $P_i = \Lambda e_{ii} \subseteq K e_{ii}$, отображающего P_i в $P_j \subseteq K e_{jj}$. Итак, всякий ненулевой гомоморфизм $P_i \to P_j$ – мономорфизм.

В следующем рассуждении мы отождествляем элемент $\lambda \in \Lambda_{ij} \subseteq T_\alpha$ с матрицей $(a_{st}) \in K(\Phi, \Omega)$, единственный ненулевой элемент которой a_{ij} равен λ, и с гомоморфизмом $P_i \to P_j$, состоящем в умножении справа на эту матрицу. Если A, B – подмодули P_j, изоморфные P_i, то существуют элементы λ, $\mu \in \Lambda_{ij}$, такие что $A = P_i\lambda$, $B = P_i\mu$. Модули A, B отличны от 0, и потому λ, μ – ненулевые элементы из подгруппы Λ_{ij} тела T_α; следовательно, существует такой элемент $\tau \in T_\alpha$, что $\tau\lambda = \mu$. Но T_α – левое кольцо частных кольца Λ_i, и потому существуют такие элементы $\sigma_i, \xi \in \Lambda_i$, что $\tau = \sigma^{-1}\xi$. Для этих элементов получаем: $\xi\lambda = \sigma\mu$. Очевидно, $\xi \neq 0$, $\sigma \neq 0$ и (все происходит в *теле* T_α) $\xi\lambda = \sigma\mu \neq 0$; но тогда $\xi\lambda = \sigma\mu$ – мономорфизм P_i в P_j, и потому модуль $C = P_i\xi\lambda = P_i\sigma\mu$ изоморфен P_i. С другой стороны, $\xi, \sigma \in \Lambda_i$ – эндоморфизмы P_i, поэтому $P_i\xi \subseteq P_i$, $P_i\sigma \subseteq P_i$ и, значит, $C = P_i\xi\lambda \subseteq P_i\lambda = A$, $C = P_i\sigma\mu \subseteq P_i\mu = B$. Этим завершено доказательство свойства b), а вместе с тем и доказательство необходимости условий теоремы.

§ 4. Доказательство теоремы 2. Достаточность

Пусть кольцо Λ разложено в прямую сумму неразложимых левых идеалов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, причем выполняются свойства:

a) всякий ненулевой гомоморфизм $P_i \to P_j$ является мономорфизмом;

b) для любых i, j, таких что $1 \leq i, j \leq n$, и для любых подмодулей A, B модуля P_j, существует подмодуль пересечения $A \cap B$, изоморфный P_i.

Обозначим через Λ_i кольцо эндоморфизмов модуля P_i.

Лемма 1. *Все ненулевые элементы кольца Λ_i регулярны, (т.е. не являются ни левыми, ни правыми делителями 0).*

Доказательство. Действительно, если $a \in \Lambda_i$, $a \neq 0$, и x – любой ненулевой элемент из Λ_i, то a, x – мономорфизмы из P_i в P_i, а потому монорфизмами являются оба эндоморфизма ax, xa модуля P_i, т.е. $ax \neq 0$, $xa \neq 0$.

Лемма 2. *Кольцо Λ_i имеет левое кольцо частных T_i, являющееся телом.*

Доказательство. Покажем, что Λ_i удовлетворяет условию Оре: для всяких $a, b \in \Lambda_i$, таких что элемент b регулярен, существуют элемент d и регулярный элемент c из Λ_i, для которых $ca = db$. Если $a = 0$, то таковы, например, $c = 1$ и $d = 0$. Пусть $a \neq 0$, т.е. (по лемме 1) a, как и b, регулярный элемент кольца Λ_i. По свойству a) подмодули P_ia, P_ib модуля P_i изоморфны P_i, а по свойству b) в их пересечении есть подмодуль P, изоморфный P_i. Эндоморфизмы a, b осуществляют изоморфизмы P_i на $P_i a$, $P_i b$; следовательно, они осуществляют изоморфизмы модулей $R_1 = Pa^{-1}$, $R_2 = Pb^{-1}$ на подмодуль P модуля $P_i a \cap P_i b$. Модуль R_1 изоморфен P, а значит, и P_i. Пусть c – некоторый изоморфизм P_i на модуль $R_1 \subseteq P_i$; ясно, что c – эндоморфизм P_i, т.е. $c \in \Lambda_i$. Обозначим через d композицию гомоморфизмов $c : P_i \to R_1$, $a : R_1 \to P$, $b^{-1} : P \to R_2$ и вложения подмодуля R_2 в модуль P_i; это снова эндоморфизм P_i, т.е. элемент из Λ_i. Из определения d ясно, что $ca = db$; очевидно, $c \neq 0$, и по лемме 1 c – регулярный элемент кольца Λ_i. Но это и есть условие Оре.

Поскольку условие Оре – необходимое и достаточное условие существования левого кольца частных, у кольца Λ_i есть левое кольцо частных T_i, которое является телом, так как в Λ_i, а значит, и в T_i, по лемме 1 нет делителей 0. Лемма 2 доказана.

Идеал P_i – левый Λ- и правый Λ_i–модуль; его тензорное произведение R_i с телом T_i, рассматривамым как левый Λ_i–модуль, также является левым Λ–модулем. Очевидно, T_i – кольцо эндоморфизмов Λ–модуля R_i. Модуль P_i естественным образом вложен в R_i.

Лемма 3. *Для всякого эндоморфизма γ модуля R_i существует подмодуль $P \subseteq P_i$, изоморфный P_i и такой, что $P\gamma \subseteq P_i$ (ясно, что при $\gamma \neq 0$ модуль $P\gamma$ тоже изоморфен P_i).*

Доказательство. Достаточно предположить, что $\gamma \neq 0$. Тогда существуют $c, d \in \Lambda_i$, такие что $\gamma = c^{-1}d$. В качестве P можно взять модуль $P_i c : (P_i c)\gamma = P_i c c^{-1} d = P_i d \subseteq P_i$.

Лемма 4. *Пусть u – мономорфизм $P_i \to P_j$. Для каждого элемента $\delta \in T_j$ существует единственный элемент $\mu_u(\delta) \in T_i$, такой что на некотором подмодуле модуля P_i, изоморфном P_i, гомоморфизмы $\mu_u(\delta) u$ и $u\delta$ совпадают. Сопоставление $\delta \to \mu_u(\delta)$ представляет собой мономорфизм тела T_j в тело T_i.*

Доказательство. 1. *Существование.* Обозначим модуль $P_i u$ через Q. Если $\delta \in T_j$, то существуют $c, d \in \Lambda_j$, для которых $\delta = c^{-1}d$. Модули Qc, Qd изоморфны P_i и поэтому существует подмодуль $Q' \subseteq Q \cap Qc \cap Qd$, изоморфный P_i. Модуль $Q'\delta^{-1}$ содержится в $Qd\delta^{-1} = Qc \subseteq P_j$, и изоморфен P_i. Поэтому есть подмодуль $S' \subseteq Q \cap Q'\delta^{-1}$, изоморфный P_i; при этом $S'\delta \subseteq Q' \subseteq Q$. Обозначим через S, S_1 полные прообразы S', $S'\delta$ относительно $u : Su = S'$, $S_1 u = S'\delta$. Подмодули S, S_1 модуля P_i изоморфны P_i; существует поэтому

$b \in \Lambda_i$, такой что $S = P_i b$. Обозначим через a эндоморфизм P_i, равный композиции гомоморфизмов $b : P_i \to S$, $u : S \to S'$, $\delta : S' \to S'\delta$, $u^{-1} : S'\delta \to S_1$ и вложения S_1 в P_i и положим $\gamma = b^{-1}a$. Из построения видно, что на подмодуле S модуля P_i, изоморфном P_i, действие γu и $u\delta$ совпадает. Итак, в качестве $\mu_u(\delta)$ можно взять $\gamma = b^{-1}a$.

2. *Единственность.* Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in T_i$, $S_1, S_2 \subseteq P_i$ – такие эндоморфизмы и изоморфные P_i подмодули, что на S_1 совпадают $\gamma_1 u$ и $u\delta$, а на S_2 совпадают $\gamma_2 u$ и $u\,\delta$. Пересечение $S = S_1 \cap S_2$ ненулевое (оно содержит подмодуль, изоморфный P_i), и на S действие $\gamma_1 u$ и $\gamma_2 u$ одинаково. Поскольку u – мономорфизм, это означает, что $\operatorname{Ker}(\gamma_1 - \gamma_2) \supseteq S \neq 0$. Следовательно, $\gamma_1 - \gamma_2$ – не мономорфизм, и поскольку все ненулевые эндоморфизмы модуля R_i, принадлежащие телу T_i, обратимы и, в частности, являются мономорфизмами, это означает, что $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

3. *μ_u –гомоморфизм тел.* Пусть $\gamma_1 = \mu_u(\delta_1)$, $\gamma_2 = \mu_u(\delta_2)$, и пусть S_1, S_2 – такие подмодули P_i, изоморфные P_i, что на S_1 совпадают $\gamma_1 u$ и $u\delta_1$, а на S_2 совпадают $\gamma_2 u$ и $u\delta_2$. Существует подмодуль $S \subseteq S_1 \cap S_2$, изоморфный P_i. Далее, существует по лемме 3 подмодуль $P \subseteq P_i$, изоморфный P_i, такой что $P\gamma_1 \subseteq P_i$. Пусть T_2 – подмодуль, изоморфный P_i, содержащийся в $P\gamma_1 \cap S_2$, а T_1 – подмодуль $T_2\gamma_1^{-1} \cap S_1$, изоморфный P_i ($T_2\gamma_1^{-1} \subseteq P\gamma_1\gamma_1^{-1} = P \subseteq P_i$). Ясно, что $T_1 \subseteq S_1$, и $T_1\gamma_1 \subseteq S_2$. Имеем теперь на S: $(\gamma_1 + \gamma_2)\,u = \gamma_1 u + \gamma_2 u = u\delta_1 + u\delta_2 = u\,(\delta_1 + \delta_2)$, и на T_1: $u\delta_1\delta_2 = \gamma_1 u \delta_2 = \gamma_1\gamma_2 u$. Это как раз и значит, что $\mu_u(\delta_1 + \delta_2) = \mu_u(\delta_1) + \mu_u(\delta_2)$, $\mu_u(\delta_1\delta_2) = \mu_u(\delta_1)\,\mu_u(\delta_2)$. Лемма 4 полностью доказана.

Лемма 5. *Пусть $u : P_i \to P_j$, $v : P_j \to P_k$ – мономорфизмы. Тогда для любого $\delta \in T_k$ справедливо равенство $\mu_{uv}(\delta) = \mu_u(\mu_v(\delta))$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \mu_v(\delta)$, $\varepsilon = \mu_u(\gamma)$, S_1 – изоморфный P_i подмодуль P_i, на котором совпадают εu и $u\gamma$, S_2 – изоморфный P_j подмодуль P_j, на котором совпадают γv и $v\delta$. Поскольку S_2 изоморфен P_j, существует подмодуль S_3 модуля S_2, изоморфный P_i; далее, существует подмодуль S_4, изоморфный P_i и содержащийся в $S_1 \cap S_3 u^{-1}$. Тогда для $s \in S_4$ имеем: $s\varepsilon u = su\gamma$, поскольку $S_4 \subseteq S_1$; $s\varepsilon uv = su\gamma v = suv\delta$, поскольку $su \in S_3 \subseteq S_2$. Таким образом, $\varepsilon uv = uv\delta$, а это и означает, что $\mu_{uv}(\delta) = \varepsilon$.

Лемма 6. *Если $u \neq 0$ – эндоморфизм P_i, то μ_u – внутренний автоморфизм T_i, порожденный u.*

Доказательство. Если $\gamma \in T_i$, то $\mu_u(\gamma)\,u$ и $u\gamma$ совпадают на некотором ненулевом подмодуле P_i, и потому $\mu_u(\gamma)\,u = u\gamma$ на всем модуле.

Лемма 7. *Если существуюдт ненулевые гомоморфизмы $u : P_i \to P_j$, $v : P_j \to P_i$, то $\mu_u : T_i \to T_j$, $\mu_v : T_j \to T_i$ – изоморфизмы тел.*

Доказательство. Поскольку u, v – мономорфизмы, их произведение uv – тоже мономорфизм, и $uv \neq 0$. По леммам 5, 6 $\mu_u \mu_v = \mu_{uv}$ – автоморфизм T_i, и аналогично μ_{vu} – автоморфизм T_j.

Группа $\Lambda_{ij} = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)$ является левым Λ_i– и правым Λ_j–модулем. Обозначим через T_{ij} его тензорное произведение с телом T_i, рассматриваемым как правый Λ_i–модуль

Лемма 8. *Если $\Lambda_{ij} \neq 0$, то T_{ij} как левый T_i–модуль изоморфен телу T_i.*

Доказательство. Пусть $u, v \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)$, $u, v \neq 0$. Тогда $P_i u$, $P_i v$ – подмодули P_j, изоморфные P_i; поэтому существует изоморфный P_i подмодуль $S \subseteq P_i u \cap P_i v$. Тогда Su^{-1}, Sv^{-1} – подмодули P_i, изоморфные P_i. Существует изоморфизм $c : P_i \to Su^{-1} \subseteq P_i$; c является эндоморфизмом P_i, т.е. принадлежит Λ_i. Таким образом, для любых гомоморфизмов $u, v : P_i \to P_j$, отличных от 0, существуют ненулевые элементы $c, d \in \Lambda_i$, такие что $cu = dv$, т.е., переходя от $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)$ к T_{ij}, $v = d^{-1}cu$. Поскольку любой элемент из T_{ij} равен γv для некоторых $v \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)$, $\gamma \in T_i$, то этот элемент равен $\gamma d^{-1} cu = \gamma_1 u$, где $\gamma_1 = \gamma d^{-1} c$. Итак, все элементы из T_{ij} получаются из одного из них умножением на элементы из T_i, что и требовалось.

Из леммы 8 следует, что Λ_{ij} является $\Lambda_i - \Lambda_j$–подмодулем бимодуля T_i (напомним, что $\Lambda_i \subseteq T_i$, а Λ_j вкладывается в T_i посредством гомоморфизма μ_u).

Введем на множестве $1, 2, \ldots, n$ отношение эквивалентности, считая, что i эквивалентно j тогда и только тогда, когда существуют ненулевые гомоморфизмы $P_i \to P_j$, $P_j \to P_i$. Пусть $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ – множество классов эквивалентности. Это множество является частично упорядоченным относительно следующего отношения порядка: $\alpha \leq \beta$, если для каких–то $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$ существует ненулевой гомоморфизм $P_i \to P_j$ (ясно, что тогда ненулевой гомоморфизм существует и для любых других представителей этих классов).

Выберем в каждом классе S_α число $i \in S_\alpha$, и обозначим через P_α, T_α модуль P_i и тело T_i. Для $\alpha \leq \beta$ в группе $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)$, отличной от 0 по определению порядка на Γ, выберем ненулевой гомоморфизм $u_{\alpha\beta} : P_\alpha \to P_\beta$, причем при $\alpha = \beta$ в качестве $u_{\alpha\beta}$ возьмем тождественное отображение. По лемме 8 всякий гомоморфизм $u : P_\alpha \to P_\beta$ получается в T_{ij} из $u_{\alpha\beta}$ умножением слева на некоторый элемент c из тела T_α. В частности, для любых $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ существует единственный элемент $c_{\alpha\beta\gamma} \in T_\alpha$ такой, что $u_{\alpha\beta}u_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\gamma}$. Обозначим через $\mu_{\alpha\beta}$ определенный леммой 4 гомоморфизм тел $\mu_u : T_\beta \to T_\alpha$ для $u = u_{\alpha\beta}$. Те же выкладки, что в §1, показывают, что $\Phi = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$ – представление частично упорядоченного множества Γ.

Если $i \in S_\alpha$, то существуют ненулевой гомоморфизм $\phi_i : P_\alpha \to P_i$. Если j – другой индекс, $j \in S_\beta$ и $u \in \mathrm{Hom}(P_i, P_j)$, то гомоморфизмы $u_{\alpha\beta}\phi_j$, $\phi_i u \in \mathrm{Hom}(P_\alpha, P_j)$ отличаются по лемме 8 лишь правым множителем из T_α, т.е. $\phi_i u = c u_{\alpha\beta}\phi_j$ для некоторого (единственного) $c \in T_\alpha$.Множество элементов $c \in T_\alpha$, для которых существует гоморфизм $u \in \mathrm{Hom}(P_i, P_j)$, такой что $\phi_i u = c u_{\alpha\beta}\phi_j$, образуют подгруппу Λ_{ij} аддитивной группы тела T_α. Кольцо Λ изоморфно своему кольцу эндоморфизмов, которое раскладывается в прямую сумму групп $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)$. Поэтому каждый эндоморфизм $v \in \Lambda$ однозначно раскладывается в сумму своих компонент $v_{ij} \in \mathrm{Hom}(P_i, P_j)$; сопоставим ему матрицу $(a_{ij}) \in K(\Phi, \Omega)$, где при $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, $\alpha \leq \beta$ произведение $a_{ij}u_{\alpha\beta}\phi_j$ равно $\phi_i v_{ij}$, а при α, не меньшем β, $a_{ij} = 0$. Непосредственно проверяется, что это соответствие – мономорфизм Λ в $K(\Phi, \Omega)$, набор Σ групп Λ_{ij} образует сеть в $K(\Phi, \Omega)$, а образ этого мономорфизма – сетевое подкольцо $\Lambda(\Sigma)$ кольца $K(\Phi, \Omega)$.

Теорема 2 полностью доказана.

§ 5. Полунаследственные полуцепные кольца

Применим предшествующие результаты к вопросу об описании полунаследственных слева полуцепных слева колец. Как уже было отмечено выше, из полунаследственности следует условие a) теоремы 2. Напомним, что левый модуль называется цепным, если из любых двух подмодулей один содержится в другом, а кольцо Λ называется полуцепным слева, если Λ раскладывается в прямую сумму конечного числа цепных левых идеалов $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$. Если A, B – содержащиеся в P_j левые идеалы, изоморфные P_i, то либо $A \subseteq B$, либо $B \subseteq A$, т.е. модуль $C = A \cap B$ равен A или B; в обоих случаях модуль C изоморфен P_i, так что выполнено и условие b) теоремы 2.

Однако, для полунаследственных слева полуцепных слева колец можно получить существенно более полную информацию, чем это позволяет сделать теорема 2.

Прежде, чем формулировать основной результат этого параграфа, дадим несколько определений.

Частично упорядоченное множество будем называть почти линейно упорядоченным, если для любого его элемента σ множество элементов, больших или равных σ, линейно упорядоченно. Подмножество S_0 частично упорядоченного множества S называем верхним отрезком S, если из того, что $\sigma \in S_0$, $\tau \in S$, $\sigma \le \tau$, следует, что $\tau \in S_0$. Автоморфизмом частично упорядоченного множества называется его биективное отображение на себя, сохраняющее порядок; результат действия автоморфизма g на элемент σ будем обозначать σ^g.

Пару (Z, G), состоящую из почти линейно упорядоченного множества и подгруппы G его группы автоморфизмов, называем однородной, если множество Z/G орбит G–операторного множества Z конечно и если для любых $\sigma, \tau \in Z$ существует такой элемент $g \in G$, что $\sigma^g \le \tau$.

Пусть Z – почти линейно упорядоченное множество, G – подгруппа его группы автоморфизмов. Тело T называем (Z, G)–нормированным, если задан эпиморфизм p его мультипликативной группы на G, такой что для любых $\sigma, \tau \in Z$ множество элементов $t \in T$, для которых $\sigma^{p(t)} \ge \tau$, образует вместе с 0 подгруппу аддитивной группы тела T. Ясно, что если U – верхний отрезок частично упорядоченного множества Z, то множество $T(U)$ элементов $t \in T$, для которых $\sigma^{p(t)} \in U$ для любого $\sigma \in U$, тоже образует вместе с 0 подгруппу аддитивной группы тела T. Мы не исследуем здесь, для каких пар (Z, G) существуют (Z, G)–нормированные тела.

Скелетом будем называть набор, состоящий из: ориентированного графа Γ, являющегося объединением деревьев со стрелками, идущими от корней к концам ветвей; однородных пар (Z_α, G_α), где Z_α – почти линейно упорядоченное множество, G_α – подгруппа его группы автоморфизмов, а α пробегает все вершины Γ; линейно (а не почти линейно) упорядоченных верхних отрезков U_v множеств Z_α, определенных для всех стрелок $v : \alpha \to \beta$. Скелеты $\{\Gamma, (Z_\alpha, G_\alpha), U_v\}$, $\{\gamma, (Z_\alpha, G_\alpha), {}'U_v\}$ считаем эквивалентными, если для всех стрелок $v : \alpha \to \beta$ существуют элементы $g(v) \in G_\alpha$, такие что ${}'U_v = (U_v)^{g(v)}$.

Пусть $\mathcal{U} = \{\Gamma, (Z_\alpha, G_\alpha), U_v\}$ – скелет, $S_\alpha = Z_\alpha/G_\alpha$ – множество орбит G_α–операторного множества Z_α; отождествим объединение конечного числа конечных множеств S_α ($\alpha \in \Gamma$) с множеством $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда множества S_α образуют разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$; будем обозначать это разбиение через $\Omega(\mathcal{U})$. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и пусть $\alpha \in \Gamma$ таково, что $i \in S_\alpha = Z_\alpha/G_\alpha$; выберем в орбите i произвольный представитель $X_i \in Z_\alpha$. Набор Π таких представителей X_i для всех i назовем оснащением скелета $\mathcal{U}$.

Представлением скелета $\mathcal{U} = \{\Gamma, (Z_\alpha, G_\alpha), U_v\}$ называем набор $\Theta = \{T_\alpha, \mu_v\}$, состоящий из (S_α, G_α)–нормированных тел T_α, определенных для всех $\alpha \in \Gamma$, и вложений тел $\mu_v : T_\beta \to T_\alpha$, определенных для всех стрелок $v : \alpha \to \beta$ графа Γ и таких, что образ μ_v содержится в $T_\alpha(U_v)$. Превратим Γ в частично упорядоченное множество, считая, что $\alpha \le \beta$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, если есть путь (очевидно, единственный) из α в β по стрелкам Γ (быть может, пустой). Пусть $\alpha \le \beta$ и пусть путь из α в β состоит из стрелок $u, v, \ldots, w$; тогда $\mu_{\alpha\beta} = \mu_u \mu_v \ldots \mu_w$ – вложение тела T_β в тело T_α. Очевидно, что тогда $\Phi(\Theta) = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$, где все $c_{\alpha\beta\gamma}$ равны 1, является представлением частично упорядоченного множества Γ телами (в смысле, определенном в §1). Если $\beta \in \Gamma$, то существует единственный минимальный элемент $\alpha \in \Gamma$, такой что $\alpha \le \beta$; мы будем в дальнейшем отождествлять тело T_β с подтелом $\mu_{\alpha\beta} T_\beta$ тела T_α.

Пусть снова $\mathcal{U} = \{\Gamma, (Z_\alpha, G_\alpha), U_v\}$ – скелет, $\Theta = \{T_\alpha, \mu_v\}$ – его представление, $\Pi = \{X_i\}$ – его оснащение; определим сеть $\Sigma(\Theta, \Pi) = \{\Lambda_{ij}\}$ в кольце $K(\Phi(\Theta), \Omega(\mathcal{U}))$. Если $i, j \in S_\alpha$, то в качестве Λ_{ij} возьмем множество элементов $t \in T$, таких что $(X_i)^{p(t)} \ge X_j$. Если $v : \alpha \to \beta$ – стрелка Γ, и $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, то в качестве Λ_{ij} возьмем множество всех $t \in T_\alpha$, таких что $(X_i)^{p(t)} \subseteq U_v$. Если $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, $\alpha < \beta$ и $\alpha < \gamma < \cdots < \varepsilon < \beta$ – единственная неуплотняемая цепочка элементов из Γ, то положим $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ik} \Lambda_{kl} \ldots \Lambda_{qj}$, где $k \in S_\gamma$, $l \in S_\delta$, $\ldots$, $q \in S_\varepsilon$ (результат не зависит от выбора $k, l, \ldots, q$).

Теорема 3. *Пусть Λ – полунаследственное слева полуцепное слева кольцо. Тогда существуют скелет $\mathcal{U}$ и его представление Θ, такие что для любого оснащения Π скелета $\mathcal{U}$ кольцо Λ Морита–эквивалентно сетевому подкольцу $\Lambda(\Sigma(\Theta, \Pi))$ в кольце матриц $K(\Phi(\Theta), \Omega(\mathcal{U}))$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ – разложение Λ в прямую сумму цепных модулей; заменяя, если надо, кольцо Λ на Морита–эквивалентное ему кольцо, можем считать, что модули $P_1, P_2, \ldots, P_n$ попарно не изоморфны. Для кольца Λ выполнены условия теоремы 2, поэтому существует частично упорядоченное множество Γ, его представление $\Phi = \{T_\alpha, \mu_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma}\}$, разбиение Ω множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение подмножеств S_α, $\alpha \in \Gamma$, и сеть Σ в кольце матриц $K(\Phi, \Omega)$. Вспомним, как строились эти объекты в доказательстве теоремы 2 и покажем, что для полусовершенных полуцепных колец они обладают нужными свойствами.

Числа i, j принадлежит одному классу S_α тогда и только тогда, когда существуют ненулевые гомоморфизмы $P_i \to P_j$, $P_j \to P_i$, и Γ – множество этих классов. Для $\alpha, \beta \in \Gamma$ считается, что $\alpha \leq \beta$, если для любых $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$ существует ненулевой гоморфизм $P_i \to P_j$. Если $\alpha, \beta \leq \gamma$, $i \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$, $k \in S_\gamma$, $k \in S_\gamma$ и $u : P_i \to P_k$, $v : P_i \to P_k$ – ненулевые гомоморфизмы, то либо $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} v$, либо $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u$. Поскольку u, v – мономорфизмы, это означает, что либо в модуле P_i, изоморфном $\operatorname{Im} u$, содержится подмодуль, изоморфный P_j, и тогда существует ненулевой гоморфизм из P_j в P_i, т.е. $\beta \leq \alpha$, либо, наоборот, $\alpha \leq \beta$. Итак, из $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, $\alpha, \beta \leq \gamma$, следует, что $\alpha \leq \beta$ или $\beta \leq \alpha$; но для конечного частично упорядоченного множества Γ это значит, что Γ – объединение деревьев. Точнее говоря, Γ можно превратить в ориентированный граф со стрелками, идущими от корней к концам ветвей, если направить стрелку из α в β в том и только том случае, когда $\alpha < \beta$ и между α и β нет других элементов множества Γ. Ниже в зависимости от условий мы будем рассматривать Γ то как граф, то как частично упорядоченное множество.

Как и в § 4, выберем в каждом классе S_α представитель i и положим $P_\alpha = P_i$. Для каждой стрелки $v : \alpha \to \beta$ зафиксируем ненулевой гомоморфизм $u_{\alpha\beta} : P_\alpha \to P_\beta$. Пусть теперь β – произвольный элемент из Γ, не меньший α. Существует единственная неуплотняемая цепочка $\alpha < \gamma < \delta < \cdots < \varepsilon < \beta$; в качестве $u_{\alpha\beta}$ возьмем $u_{\alpha\gamma} u_{\gamma\delta} \ldots u_{\varepsilon\beta}$. Ясно, что при таком выборе гоморфизмов $u_{\alpha\beta}$ соотношение $u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}$ выполняется для любых $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Но $c_{\alpha\beta\gamma}$ – единственный элемент из T_α, такой что $u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\gamma}$; следовательно, $c_{\alpha\beta\gamma} = 1$ для любых $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Из равенства $\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma}(t)\, c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}\mu_{\alpha\gamma}(t)$ $(t \in T_\gamma)$ следует теперь, что $\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma} = \mu_{\alpha\gamma}$. Для стрелки $v : \alpha \to \beta$ положим $\mu_v = \mu_{\alpha\beta}$.

Тело T_α является левым кольцом частных кольца эндоморфизмов Λ_α модуля P_α; пусть R_α – тензорное произведение правого Λ_α–модуля P_α и левого Λ_α–модуля T_α. Обозначим через Z_α множество всех подмодулей R_α, каждый из которых изоморфен какому–то из модулей P_i, $i \in S_\alpha$. Умножение справа на элементы из мультипликативной группы T^* тела T_α переводит Z_α в себя. Таким образом, Z_α – T^*–операторное множество; Z_α является операторными множеством также и относительно факторгруппы G_α группы T^* по подгруппе элементов, не двигающих ни один модуль из Z_α. Ясно, что орбиты из Z_α / G_α находятся в естественном биективном соответствии с модулями P_i, $i \in S_\alpha$. Тело T_α является (Z_α, G_α)–нормированным (гомоморфизм мультипликативной группы тела T на G_α – канонический эпиморфизм группы T^* на ее факторгруппу). Очевидно, Z_α почти линейно упорядочено относительно обратного включения: для любого модуля $X \in Z_\alpha$, изоморфного одному из P_j, множество больших его или равных ему элементов из Z_α состоит из его подмодулей (и даже, вообще говоря, не всех), которое линейно упорядоченно, так как P_i – цепной модуль.

Для каждого $i \in S_\alpha = Z_\alpha/G_\alpha$ выберем в орбите i произвольный модуль $X_i \in Z_\alpha$; если $P_\alpha = P_i$, то через X_α обозначим X_i. Если $v : \alpha \to \beta$ – стрелка Γ, то обозначим через U_v множество таких элементов $X \in Z_\alpha$, что $Xu_{\alpha\beta} \subseteq X_\beta$.

Теперь непосредственно проверяется, что $\mathcal{U} = \{\Gamma, (Z_\alpha, G_\alpha), U_v\}$ – скелет, $\Theta = \{T_\alpha, \mu_v\}$ – его представление, представление Φ частично упорядоченного множества Γ совпадает с $\Phi(\Omega)$, разбиение Ω – с разбиением $\Omega(\mathcal{U})$, а сети Σ, $\Sigma(\Theta, \Pi)$ эквивалентны в том смысле, что отвечающие им сетевые подкольца в $K(\Phi, \Omega)$ изоморфны. Это завершает доказательство теоремы 3.

Литература

1. Е. Э. Громыхалина, А. В. Яковлев, *Полунаследственные слева полуцепные слева кольца.* — Вестник Ленинградск. ун-та, Сер.1 **3**, № 15 (1990), 116–117.
2. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* Киев, 1975, с. 58.
3. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* — Мат. сб. **99**, № 4 (1976), 559–581.
4. В. В. Кириченко, *О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **114** (1982), 137–147.
5. А. В. Яковлев, *Нетеровы полуцепные слева кольца.* — Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.2 (1988), 97–116.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 15 июня 1993 г.