# ДОКТОРСКИЕ ДИССЕРТАЦИИ

## ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

И. Я. Верченко

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук.

Защищена 29 сентября 1949 г. в Математическом институте АН СССР им. В. А. Стеклова.

Официальные оппоненты: П. С. Александров, Н. К. Бари, Д. Е. Меньшов.

Доказательство теоремы существования решения двумерной вариационной задачи в известной степени сводится к доказательству теоремы о компактности класса допустимых поверхностей. При этом за класс допустимых поверхностей естественно принимают класс поверхностей, ограниченных в совокупности по величине площади. Понятие площади определено и изучено в той или иной мере для класса непрерывных поверхностей. Но для этого класса поверхностей, как известно, теорема о компактности не имеет места. Естественно поэтому распространить понятие площади на более широкий класс поверхностей с таким расчётом, чтобы для этого класса поверхностей была справедливой теорема о компактности.

В первой части работы понятие площади распространено на класс поверхностей вида $z=w(x, y)$, где $w(x, y)$—измеримая функция, благодаря чему класс этих поверхностей назван классом измеримых поверхностей. Здесь показано, что теория площади непрерывных поверхностей вида $z=w(x, y)$, как она изложена, например, в книге Сакса «Теория интеграла», глава V, переносится полностью, конечно, с соответствующими видоизменениями на измеримые поверхности. Далее, доказана теорема о компактности для класса таких поверхностей и на примерах показано, что теорема о компактности не может иметь места для класса поверхностей вида $z=w(x, y)$ существенно более простой природы, чем класс измеримых поверхностей.

В третьей части работы продолжено изучение свойств поверхностей вида $z=w(x, y)$. Здесь установлены новые свойства таких поверхностей и решены для них некоторые упорно не поддававшиеся решению проблемы.

Прежде всего в этой части работы установлено, что для каждого положительного числа $\varepsilon$ существует функция $\tau=\tau(x, y)$, определённая на прямоугольнике $J_0$, принимающая на нём лишь конечное число значений и такая, что нижний и верхний пределы выражения

$$\iint\limits_{J_0} \left\{ \left[ \frac{w(x+\rho\cos\tau, y+\rho\sin\tau)-w(x, y)}{\rho} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{w(x-\rho\sin\tau, y+\rho\cos\tau)-w(x, y)}{\rho} \right]^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

при стремлении $\rho$ к нулю отличаются меньше, чем на $\varepsilon$ от площади измеримой поверхности, определяемой функцией $z=w(x, y)$ на прямоугольнике $J_0$.

Точно так же здесь показано, что для каждого положительного числа $\varepsilon$ существует функция $\tau=\tau(x, y)$, определённая на прямоугольнике $J_0$, принимающая на нём лишь конечное число значений и такая, что предел выражения

$$\iint\limits_{J_0} \left\{ \left[ \frac{w(x+\rho\cos\tau, y+\rho\sin\tau)-w(x, y)}{\rho} \right]^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\,dy$$

при стремлении $\rho$ к нулю отличается меньше, чем на $\varepsilon$ от площади измеримой поверхности $z=w(x, y)$.

Эти оба утверждения являются исправлением неосновательно доказанного Саксом в его упомянутой выше книге неверного утверждения о том, что площадь непрерывной поверхности вида $z=w(x, y)$, определённой на прямоугольнике $J_0$, равна выражению

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}} \iint \left\{ \left[ \frac{w(x+\alpha, y)-w(x, y)}{\alpha} \right]^2 + \left[ \frac{w(x, y+\beta)+w(x, y)}{\beta} \right]^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\,dy.$$

Далее, здесь дано для непрерывных поверхностей вида $z=w(x, y)$ несколько иное определение площади, опирающееся не на понятие площади полиэдральных поверхностей, как в обычном определении, а на понятие длин дуг некоторых кривых данной поверхности.

Именно, пусть $U\subset J_0$—произвольное выпуклое множество. Пусть, кроме того, $\tau$—произвольное число, $0\leqslant\tau<2\pi$. Поверяем систему координат $xOy$ вокруг оси $oz$ на угол $\tau$ против движения часовой стрелки и новую систему координат обозначим через $\xi O\eta$. Пусть затем $[\alpha, \beta]$—отрезок, являющийся ортогональной проекцией множества $U$ на ось $O\xi$, и пусть $\xi_0$—произвольное значение, принадлежащее отрезку $[\alpha, \beta]$. Обозначим через $s(\xi_0)$ длину дуги, вырезаемую плоскостью $\xi=\xi_0$ на части поверхности $z=w(x, y)$, расположенной над множеством $U$ и положим

$$s_\tau(U)=\int\limits_\alpha^\beta s(\xi)\,d\xi.$$

Обозначим затем через $s(U)$ верхнюю грань множества чисел $s_\tau(U)$ для всех значений $\tau$, $0\leqslant\tau<2\pi$.

Разобьём теперь интервал $J_0$ совершенно произвольным образом на конечное число неперекрывающихся интервалов $J_1, J_2, \ldots, J_k$, диаметр наибольшего из которых меньше, чем $\varepsilon>0$. Здесь показано, что сумма

$$\sum_{i=1}^{k} s(J_i)$$

стремится к определённому пределу, когда $\varepsilon$ неограниченно уменьшается, и что этот предел равен площади поверхности $z=w(x, y)$.

Далее, в этой части работы дано решение следующей проблемы. Как известно, площадь поверхности определяется с помощью аппроксимирующих полиэдральных поверхностей, не обязательно вписанных в данную поверхность. Между тем в случае определения длины кривой пользуются вписанными полигонами. Естественно в таком случае возникает вопрос, известный теперь под именем проблемы Гесце, получим ли мы ту же самую величину, что и в обычном определении площади, если её определять с помощью аппроксимирующих, но обязательно вписанных полиэдральных поверхностей. Здесь дан положительный ответ на этот вопрос для произвольных непрерывных поверхностей вида $z=w(x, y)$. Построена последовательность полиэдральных поверхностей, вписанных в данную поверхность и сходящихся к ней и таких, что предел их площадей равен площади данной поверхности.

В этой части работы установлено также, что любая непрерывная поверхность вида $z=w(x, y)$, имеющая конечную площадь, за исключением некоторого множества её точек поверхностной меры нуль, может быть расположена на счётном числе липшицевых поверхностей вида $z=v(x, y)$, либо вида $y^{\tau}=v(x^{\tau}, z)$, где $x^{\tau}$, $y^{\tau}$, $z$—прямоугольная система координат, полученная из системы $xyz$ поворотом последней вокруг оси $Oz$ на некоторый угол $\tau$.

На основании этого утверждения здесь затем показано, что площадь непрерывной поверхности вида $z=w(x, y)$ совпадает с любой мерой множества точек, её образующих, если только эта мера приписывает меру нуль всякому множеству поверхностной меры нуль.

Наконец, для непрерывных поверхностей вида $z=w(x, y)$ конечной площади решена проблема о существовании почти в каждой её точке по отношению к поверхностной мере асимптотической по отношению к этой же мере касательной плоскости.

Эти вопросы удалось разрешить, опираясь на свойства относительных производных некоторых выражений, связанных с поверхностью.

Так как до сих пор не существовало пригодной для пользования теории относительного дифференцирования функций множеств, то предварительно были проведены исследования по этой теории. Этим исследованиям целиком посвящена вторая часть работы.

Здесь доказана теорема о покрытиях для случая произвольной аддитивной функции множества и на её основе развита теория относительного дифференцирования функций множеств.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Верченко, Об относительном дифференцировании функций множеств, ДАН 67, № 3 (1949), 417—420.
2. И. Я. Верченко, Исследования по теории площади поверхностей вида $z=f(x, y)$, ДАН 68, № 1 (1949), 5—8.
3. С. Сакс, Теория интегрирования, Изд-во иностр. лит., 1949.