ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 353—364

Н. И. АХИЕЗЕР

О ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ, ИМЕЮЩИХ МАЙОРАНТУ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТОЧЕК

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе доказываются две теоремы о зависимости роста целой функции конечной степени вдоль вещественной оси от ее роста вдоль некоторой бесконечной последовательности вещественных точек.

1. Отправным пунктом для настоящей заметки послужила следующая теорема М. Картрайт [1]: *если $f(z)$ есть целая трансцендентная функция степени $\sigma < \pi$, то из неравенств*

$$|f(\pm k)| \leqslant 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что

$$|f(x)| \leqslant C \quad (-\infty < x < \infty),$$

где C зависит только от σ.*

Наше обобщение этой теоремы имеет целью заменить ограниченность функций (на последовательности точек в условии теоремы и на всей вещественной оси в ее заключении) наличием у функций некоторых майорант. А именно, мы доказываем, что существование удовлетворяющей некоторым условиям майоранты для значений функции на некоторой последовательности узлов влечет существование определенной майоранты на всей оси.

Если оставить в стороне майоранты, являющиеся многочленами, а также один класс майорант, о котором мы ниже (см. п. 5) скажем и для которого теоремы интересующего нас типа легко получаются при помощи некоторых построений В. А. Марченко [3], то в указанном направлении нам известна лишь одна статья, принадлежащая Ш. Агмону [4]. Как по использованным в ней методам, так и по своим результатам, эта статья имеет мало общего с настоящей работой.

---

* Точное выражение коэффициента $C = C_\sigma$ при любом σ пока неизвестно. Но значение этого коэффициента для некоторых частных значений σ $\left(\text{а именно имеющих вид } \frac{\pi}{n} \text{ или } \pi\frac{n-1}{n}, \text{ где } n \text{ — натуральное число} \geqslant 2\right)$ и представляющее особый интерес асимптотическое значение C_σ при $\sigma \to \pi$ известны. Их нашел С. Н. Бернштейн [2]. Асимптотическая формула С. Н. Бернштейна имеет вид:

$$C_\sigma \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{\pi - \sigma} \quad (\sigma \to \pi).$$

2. Обозначим через $\omega(z)$ целую трансцендентную функцию нулевого рода, удовлетворяющую следующим условиям*:

a) все нули $\alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ функции $\omega(z)$ лежат в верхней полуплоскости и таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} < \infty;$$

b) на вещественной оси $(-\infty < x < \infty)$

$$|\omega(x)| \geqslant 1.$$

Возьмем какое-нибудь $p > 0$ и какое-нибудь вещественное λ и положим

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\{\omega(z)\, e^{ipz+i\lambda} + \overline{\omega}(z)\, e^{-ipz-i\lambda}\},$$

где $\overline{\omega}(z)$ означает результат замены в степенном ряде для $\omega(z)$ всех коэффициентов комплексно сопряженными величинами.

При вещественном z эта функция вещественна и удовлетворяет неравенству

$$|\Omega(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Когда x пробегает вещественную ось от $-\infty$ до ∞, величина

$$\varphi(x) = \arg\omega(x) + px + \lambda$$

монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞, так как

$$\varphi'(x) = \operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(x-\alpha_k)^2 + \beta_k^2} + p \geqslant p. \tag{1}$$

Поэтому, определяя x_k из уравнения

$$\arg\omega(x_k) + px_k + \lambda = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots),$$

так что

$$\omega(x_k)\, e^{ipx_k+i\lambda} = (-1)^k\, i\, |\omega(x_k)|,$$

мы получаем все вещественные нули x_k функции $\Omega(z)$, расположенные в порядке роста. Эти нули являются простыми и притом единственными** нулями функции $\Omega(z)$.

Из формулы (1) вытекает, что***

$$\varphi'(x) \leqslant p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}.$$

---

* Предположение о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}$ впервые в родственных вопросах встречается у С. Н. Бернштейна [(5), стр. 196] и делается для того, чтобы получить первую часть выводимого далее неравенства (2).

** Это есть частный случай более общего факта [см. (6), стр. 415].

*** Если $\omega(z)$ нулей не имеет (т. е. является константой), то величину $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}$ надлежит считать равной нулю.

А так как

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \pi,$$

то, следовательно,

$$\frac{\pi}{p + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j}} \leqslant x_{k+1} - x_k \leqslant \frac{\pi}{p}. \tag{2}$$

Заметим еще, что

$$\Omega'(x_k) = (-1)^{k-1} |\omega(x_k)| \varphi'(x_k) = (-1)^{k-1} p |\omega(x_k)| (1 + \varepsilon_k), \tag{3}$$

где $\varepsilon_k \geqslant 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $\pm k \to \infty$.

Возьмем положительное число h, удовлетворяющее неравенству

$$h < \frac{\pi}{6 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}},$$

и положим

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \operatorname{sh} ph\right\}.$$

Заставим точку x двигаться вправо от x_k к x_{k+1}. Мы найдем две точки x_k'', x_{k+1}' $(x_k < x_k'' < x_{k+1}' < x_{k+1})$, для которых

$$\Omega(x_k'') = \Omega(x_{k+1}') = (-1)^k \delta.$$

При этом в открытом интервале (x_k'', x_{k+1}') будет иметь место неравенство

$$|\Omega(x)| > \delta.$$

Геометрическое место точек (линии уровня), для которых

$$|\Omega(z)| = \delta,$$

очевидно, состоит из последовательности непересекающихся кривых C_k, проходящих через точки x_k', x_k'' $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$. Все эти кривые лежат в полосе

$$-h \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant h,$$

так как, например, сверху от этой полосы

$$|\Omega(z)| \geqslant \frac{1}{2} |\overline{\omega}(z)| \left\{ e^{py} - \left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| e^{-py} \right\} > \frac{1}{2}(e^{ph} - e^{-ph}) \geqslant \delta.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемыми для верхней полуплоскости неравенствами

$$|\overline{\omega}(z)| \geqslant 1, \qquad \left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| \leqslant 1.$$

Таким образом, всюду в плоскости z вне кривых C_k имеет место неравенство

$$|\Omega(z)| > \delta. \tag{4}$$

Для дальнейшего существенно, что каждая кривая C_k будет лежать в параллельной мнимой оси полосе некоторой фиксированной ширины. Чтобы убедиться в этом, возьмем точки ξ_k, в которых

$$\Omega(\xi_k) = (-1)^k |\omega(\xi_k)|,$$

и покажем, что для всех k

$$|\Omega(\xi_k + i\eta)| > \delta,$$

если $-h \leqslant \eta \leqslant h$. Отсюда будет следовать, что кривая C_k лежит в полосе

$$\xi_{k-1} < \operatorname{Re} z < \xi_k,$$

ширина которой $\xi_k - \xi_{k-1}$ не превосходит $\frac{\pi}{p}$, что доказывается точно так же, как и вторая часть неравенства (2).

Примем для определенности, что $\eta > 0$. Тогда

$$\left|\frac{\Omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)}\right| = \frac{1}{2} e^{p\eta} \left| 1 + \frac{\omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)} e^{2ip(\xi_k + i\eta) + 2i\lambda} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} e^{p\eta} \left| 1 + \frac{\omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)} \frac{\overline{\omega}(\xi_k)}{\omega(\xi_k)} e^{-2p\eta} \right|,$$

так как

$$\frac{\omega(\xi_k)}{\overline{\omega}(\xi_k)} e^{2ip\xi_k + 2i\lambda} = 1.$$

Займемся оценкой величины

$$\Phi = \arg \frac{\omega(\xi_k + i\eta)\,\overline{\omega}(\xi_k)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)\,\omega(\xi_k)}.$$

Так как

$$\frac{\omega(\xi_k + i\eta)\,\overline{\omega}(\xi_k)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)\,\omega(\xi_k)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_j - \xi_k) + i(\beta_j - \eta)}{(\alpha_j - \xi_k) - i(\beta_j + \eta)} \, \frac{(\alpha_j - \xi_k) - i\beta_j}{(\alpha_j - \xi_k) + i\beta_j},$$

то

$$|\Phi| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left| \arg \frac{\alpha_j - \xi_k + i(\beta_j - \eta)}{\alpha_j - \xi_k - i(\beta_j + \eta)} - \arg \frac{\alpha_j - \xi_k + i\beta_j}{\alpha_j - \xi_k - i\beta_j} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \psi_j),$$

где углы φ_j, ψ_j представлены на рис. 1. Нетрудно усмотреть, что

$$\varphi_j - \psi_j = \lambda_j - \mu_j.$$

Далее, полагая

$$|\xi_k - \alpha_j| = l,$$

находим, что

$$\operatorname{tg}(\lambda_j - \mu_j) = \frac{2l\beta_j\eta^2}{(l^2 + \beta_j^2)^2 + (l^2 - \beta_j^2)\eta^2} \leqslant \frac{2l\beta_j\eta^2}{(l^2 + \beta_j^2)(l^2 + \beta_j^2 - \eta^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta^2}{l^2 + \beta_j^2 - \eta^2} \leqslant \frac{3\eta}{\beta_j}.$$

Поэтому

$$|\Phi| \leqslant 3\eta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j} < \frac{\pi}{2},$$

а значит,

$$\left| \frac{\Omega(\xi_k + i\eta)}{\omega(\xi_k + i\eta)} \right| \geqslant \frac{1}{2} e^{p\eta} (1 + R\cos\Phi) \geqslant \frac{1}{2} e^{ph} > \delta,$$

откуда

$$|\Omega(\xi_k + i\eta)| > \delta \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant h),$$

и последнее неравенство справедливо также при $-h \leqslant \eta \leqslant 0$.

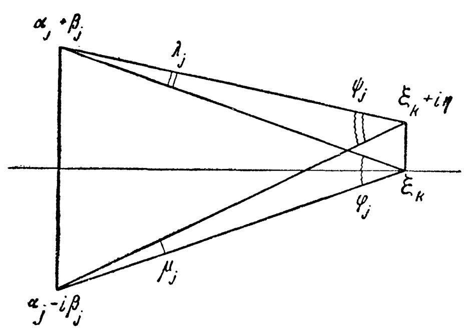

Рис. 1

3. Используем точки x_k ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) в качестве узлов интерполирования, а именно докажем, что *справедливо равенство*:

$$F(z) = \Omega(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)}{(z - x_k)\,\Omega'(x_k)}, \tag{5}$$

какова бы ни была целая трансцендентная функция $F(z)$ *степени* $< p$, *для которой*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left| \frac{F(x_k)}{x_k\,\omega(x_k)} \right| < \infty,$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена, отвечающего $x_k = 0$, если $\Omega(z)$ имеет корень, равный нулю.

Введем функцию

$$G(z) = \Omega(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)}{(z - x_k)\,\Omega'(x_k)}.$$

Эта функция является целой функцией степени $\leqslant p$ и удовлетворяет соотношениям

$$G(x_k) = F(x_k) \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots),$$

что проверяется непосредственно *.

Дальнейшее свойство функции $G(z)$ состоит в том, что

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{G(z)}{\Omega(z)} = 0, \tag{6_1}$$

если

$$\left| \pm \frac{\pi}{2} - \arg z \right| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}. \tag{6_2}$$

Действительно, из (6_2) следует, что

$$|z - x_k|^2 \geqslant x_k^2 \cos^2\gamma + (|z| - |x_k| \sin\gamma)^2 \geqslant x_k^2 \cos^2\gamma$$

и

$$|z - x_k|^2 \geqslant |z|^2 \cos^2\gamma + (|z| \sin\gamma - |x_k|)^2 \geqslant |z|^2 \cos^2\gamma.$$

Поэтому

$$\left|\frac{G(z)}{\Omega(z)}\right| \leqslant \frac{1}{\cos\gamma} \sum_{k=-n}^{n} \frac{|F(x_k)|}{|z| \cdot |\Omega'(x_k)|} + \frac{1}{\cos\gamma} \sum_{|k|>n} \frac{|F(x_k)|}{|x_k| \cdot |\Omega'(x_k)|}.$$

При любом $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать n так, чтобы второе слагаемое правой части было $< \frac{\varepsilon}{2}$. После этого можно указать такое ρ, чтобы при $|z| > \rho$ первое слагаемое также было $< \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Чтобы установить тождество

$$G(z) = F(z),$$

положим

$$\Phi(z) = \frac{F(z) - G(z)}{\Omega(z)}.$$

Так как каждый нуль знаменателя является нулем числителя, то $\Phi(z)$ есть целая функция. Покажем, что $\Phi(z)$ есть целая функция конечной степени **. Для этого воспользуемся тем, что вне всех кривых C_k имеет место неравенство (4). Так как всюду в плоскости

$$|F(z) - G(z)| < Ae^{B|z|},$$

---

* Необходимо иметь в виду, что, в силу (3),

$$|\Omega'(x_k)| \geqslant p\,|\omega(x_k)|.$$

** Этот результат можно было бы получить при помощи общей теоремы Валирона, дающей вне кружков с центрами в нулях целой функции оценку снизу для ее модуля. Вместо этой неэлементарной теоремы мы предпочли использовать установленное выше для этой цели свойство кривых C_k.

то всюду вне кривых C_k

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{\delta} e^{B|z|}.$$

Но на основании сказанного выше кривая C_k лежит целиком внутри круга с некоторым центром ζ_k и фиксированным радиусом Δ. Поэтому, в силу принципа максимума модуля, находим, что внутри C_k

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{\delta} e^{B(|\zeta_k|+\Delta)}.$$

Отсюда вытекает, что всюду в плоскости z

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{\delta} e^{2B\Delta} e^{B|z|}.$$

Итак, $\Phi(z)$ есть целая функция конечной степени.

Но $F(z)$ есть функция степени $< p$. Поэтому для функции

$$\Psi(z) = \frac{F(z)}{\Omega(z)}$$

будем иметь

$$h_\Psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\Psi(\pm ir)|}{r} < 0.$$

В силу непрерывности функции $h_\Psi(\theta)$, неравенство

$$h_\Psi(\theta) < 0 \tag{7_1}$$

будет выполняться при

$$\left|\pm\frac{\pi}{2} - \theta\right| \leqslant \varepsilon \tag{7_2}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Принимая во внимание (6) и (7_1), получаем, что при выполнении (7_2) должно иметь место равенство

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(re^{i\theta}) = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Фрагмен-Линделёфа, находим, что $\Phi(z) = 0$. Таким образом, интерполяционная формула (5) доказана.

4. Теперь мы можем сформулировать наше обобщение теоремы М. Картрайт.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой функции нулевого рода $\omega_0(z)$, которая удовлетворяет неравенству*

$$|\omega_0(x)| \geqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

и нули которой $\alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_k|} < \infty,$$

можно при любом $p > 0$ построить бесконечную последовательность вещественных чисел x_k ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) и целую трансцендентную функцию $\theta(z)$ степени p таким образом, что, какова бы ни была целая функция $f(z)$ степени $\sigma < p$, неравенства

$$|f(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)| \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant C|\theta(x)| \quad (-\infty < x < \infty)$$

с зависящим лишь от $\omega_0(z)$, σ, p коэффициентом C. При этом все нули функции $\theta(z)$ лежат в верхней полуплоскости.

Доказательство. Если в бесконечном произведении функции $\omega_0(z)$ множитель

$$1 - \frac{z}{\alpha_k + i\beta_k}$$

заменить на

$$1 - \frac{z}{\alpha_k - i\beta_k},$$

то модуль функции $\omega_0(z)$ на вещественной оси не изменится и равным образом не изменится сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}.$$

Учитывая это замечание, мы можем с самого начала заменить функцию $\omega_0(z)$ функцией нулевого рода $\omega(z)$, которая на вещественной оси имеет тот же модуль, что и $\omega_0(z)$, и все нули которой лежат в верхней полуплоскости.

Построим функцию $\Omega(z)$, а затем и интерполяционную формулу (5). Эту интерполяционную формулу применим к функции

$$f(z)\frac{\sin \varepsilon(z-\zeta)}{\varepsilon(z-\zeta)}, \tag{8}$$

где ε — положительное число, столь малое, что

$$\sigma + \varepsilon < p,$$

а ζ — комплексный параметр. Функция (8), очевидно, удовлетворяет условиям, при которых формула (5) применима. Поэтому

$$f(z)\frac{\sin \varepsilon(z-\zeta)}{\varepsilon(z-\zeta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(z) f(x_k)}{(z-x_k)\Omega'(x_k)} \frac{\sin \varepsilon(x_k-\zeta)}{\varepsilon(x_k-\zeta)}.$$

Полагая здесь $\zeta = z$, получаем

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(z) f(x_k)}{(z-x_k)\Omega'(x_k)} \frac{\sin \varepsilon(z-x_k)}{\varepsilon(z-x_k)}.$$

Отсюда

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\Omega(x)|\cdot|\omega(x_k)|}{|x-x_k|\cdot|\Omega'(x_k)|} \frac{|\sin \varepsilon(x-x_k)|}{\varepsilon|x-x_k|},$$

и, в силу (3),

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(x)}{x-x_k}\right]^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon (x-x_k)}{\varepsilon^2 (x-x_k)}} \, . \tag{9}$$

Прежде всего оценим функцию

$$\rho(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon (x-x_k)}{\varepsilon^2 (x-x_k)^2} \, ,$$

что легко сделать, используя неравенства (2). Пусть

$$x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1} \, .$$

Тогда

$$\frac{\sin^2 \varepsilon (x-x_m)}{\varepsilon^2 (x-x_m)^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon (x-x_{m+1})}{\varepsilon^2 (x-x_{m+1})^2} \leqslant 2$$

и, значит,

$$\rho(x) \leqslant 2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+2}^{\infty} \frac{1}{(x-x_k)^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=-\infty}^{m-1} \frac{1}{(x-x_k)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 + \frac{2}{\pi^2 \varepsilon^2} \left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{3\varepsilon^2} \left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}\right)^2 = p^2 C^2 .$$

Таким образом, неравенство (9) принимает вид:

$$|f(x)| \leqslant C \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(x)}{x-x_k}\right]^2} \, .$$

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(z)}{z-x_k}\right]^2 .$$

Это — целая функция степени $2p$, положительная на вещественной оси. Докажем, что

$$\sup_{R>1} \int_1^R \frac{\ln H(x) H(-x)}{x^2} \, dx < \infty . \tag{10}$$

Отсюда будет следовать [см. ([7]), стр. 475], что существует целая функция $\theta(z)$ степени p, все нули которой лежат в верхней полуплоскости, такая, что

$$|\theta(x)|^2 = H(x).$$

Тем самым теорема будет доказана.

Для доказательства (10) положим $x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}$. Тогда

$$|H(x+i)| \leqslant |\Omega(x+i)|^2 \left\{2 + \sum_{k=m+2}^{\infty} + \sum_{k=-\infty}^{m-1} \frac{1}{|x+i-x_k|^2}\right\} \leqslant A|\Omega(x+i)|^2,$$

где

$$A = 2 + \frac{1}{3}\left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}\right)^2.$$

Замечая, что

$$|\Omega(x+i)| \leqslant e^p |\overline{\omega}(x+i)| = e^p |\omega(x-i)|,$$

получаем

$$|H(x+i)| \leqslant Ae^{2p} |\omega(x-i)|^2 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда, в силу одного неравенства, принадлежащего С. Н. Бернштейну и далее обобщенного другими авторами [см. ([6]), стр. 414], вытекает, что при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$

$$|H(z+i)| \leqslant Ae^{2p} e^{-2py} |\omega(z-i)|^2$$

и, в частности,

$$|H(x)| \leqslant Ae^{4p} |\omega(x-2i)|^2 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Теперь справедливость неравенства (10) очевидна, так как $\omega(x-2i)$ есть функция нулевого рода.

Функцию $H(z)$ нетрудно выразить через $\Omega(z)$. Действительно, из представления

$$\Omega(z) = ae^{bz} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right) e^{\frac{z}{x_k}}$$

при помощи логарифмирования и двукратного дифференцирования заключаем, что

$$\left[\frac{\Omega'(z)}{\Omega(z)}\right]' = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-x_k)^2}.$$

Таким образом,

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(z)}{z-x_k}\right]^2 = [\Omega'(z)]^2 - \Omega(z)\,\Omega''(z).$$

Отсюда, между прочим, следует, что *

$$|\theta(x_k)| = |\Omega'(x_k)| = p\,|\omega(x_k)|\,(1+\varepsilon_k).$$

---

* См. формулу (3).

Заметим еще, что за счет неопределенного параметра λ можно добиться, чтобы одним из нулей x_k была наперед заданная точка.

В случае М. Картрайт

$$\omega(z) = 1,$$

поэтому

$$\Omega(z) = \cos(pz + \lambda)$$

и, значит,

$$H(z) = p^2 \sin^2(pz + \lambda) + p^2 \cos^2(pz + \lambda) = p^2,$$

т. е.

$$\theta(z) = pe^{ipz}.$$

5. Доказанная нами теорема может быть обобщена, если воспользоваться упомянутым выше построением В. А. Марченко.

Обозначим через $\alpha(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ непрерывную функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $\alpha(x) \geqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty)$,

b) $\alpha(x_1 + x_2) \leqslant \alpha(x_1)\, \alpha(x_2)$,

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{1 + x^2} dx < \infty$.

В. А. Марченко ([3]) показал*, что можно построить целую функцию $K(z)$ степени 1, для которой

a′) $K(0) = 1$,

b′) $|K(\lambda x)| \leqslant \frac{B_\lambda}{\alpha(x)} \quad (-\infty < x < \infty)$,

какова бы ни была константа $\lambda > 0$.

Этим результатом В. А. Марченко мы и воспользуемся.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции* $\omega_0(x)$, $\Omega(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *и последовательность* x_k $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ *таковы, что для всякой целой функции* $f(z)$ *степени* $\sigma < p$ *неравенства*

$$|f(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)| \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant C_\sigma |\theta(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

где C_σ — *константа, которая при фиксированных* $\omega_0(x)$, $\theta(x)$, $\{x_k\}$ *и* p *зависит лишь от* σ. *В таком случае для всякой целой функции* $f(z)$ *степени* $\sigma < p$ *неравенства*

$$|f(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)|\, \alpha(x_k) \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

* Часть рассмотрений В. А. Марченко в несколько ином виде встречается у С. Н. Бернштейна и Палей-Винер ([8]).

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant D\,|\theta(x)|\,\alpha(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где D зависит лишь от $\alpha(x)$ и C_σ.

Доказательство. Возьмем положительное число λ такое, чтобы

$$\sigma_1 = \sigma + \lambda < p,$$

и положим

$$F_\xi(z) = f(z)\,K(\lambda(z-\xi)),$$

где ξ — вещественный параметр. $F_\xi(z)$ есть целая функция степени $\leqslant \sigma_1$ и, в силу условия теоремы,

$$|F_\xi(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)|\,\alpha(x_k)\,|K(\lambda(x_k-\xi))| \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Но, по свойству b),

$$\alpha(x_k) \leqslant \alpha(x_k - \xi)\,\alpha(\xi).$$

Поэтому, в силу b′),

$$|F_\xi(x_k)| \leqslant B_\lambda\,|\omega_0(x_k)|\,\alpha(\xi).$$

Отсюда, по условию теоремы,

$$|F_\xi(x)| \leqslant C_{\sigma_1} B_\lambda\,\alpha(\xi)\,|\theta(x)|.$$

А так как это неравенство справедливо при любом ξ, то

$$|f(x)| = |F_x(x)| \leqslant C_{\sigma_1} B_\lambda\,\alpha(x)\,|\theta(x)|,$$

и теорема доказана.

В частном случае, когда $\omega_0(x) = 1$, мы получаем, что неравенства

$$\left|f\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right| \leqslant \alpha\left(\frac{k\pi}{p}\right) \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant D\alpha(x) \leqslant (-\infty < x < \infty).$$

Это обобщение теоремы М. Картрайт мы и имели в виду в конце п. 1.

Поступило
13. I. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cartwright M. L., On certain integral functions of order one, Quart. J. of Math. (Oxf. ser.), 7 (1936), 46—55.

[2] Бернштейн С. Н., Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 421—444.

[3] Марченко В. А., О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси (III), Зап. матем. отд. физ.-мат. фак-та и Харьк. матем. об-ва, сер. IV, т. XXII (1950), 115—125.

[4] Agmon Sh., Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series, Trans. Amer. Math. Soc., v. 70, N 3 (1951), 492—508.

[5] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, М.—Л., 1937.

[6] Ахиезер Н. И., О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 411—428.

[7] Ахиезер Н. И., К теории целых функций конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, т. 63, № 5 (1948), 475—478.

[8] Paley R. E. A. C. and Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, N. Y., 1934.