

УДК 517.5

## Аппроксимация однородных субгармонических функций

Юлмухаметов Р. С.

## Введение

Для ограниченной выпуклой области  $D$  функция

$$H(z) = \max_{\lambda \in D} \operatorname{Re}(\lambda z)$$

называется опорной функцией. Опорная функция является однородной субгармонической функцией на плоскости. Настоящая статья посвящена вопросу о существовании целых функций  $L$ , модуль которых асимптотически близок к функции  $\exp H$ . Такие целые функции играют важную роль в теории рядов экспонент. В теоремах А. Ф. Леонтьева о представлении рядами экспонент функций, голоморфных в выпуклой области, были использованы целые функции, обладающие свойствами:

1) при любом  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство

$$\ln |L'(a_k)| > H(a_k) - \varepsilon |a_k| - C_\varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $a_k$  — нули функции  $L$ ;

2) имеет место оценка сверху

$$\ln |L(z)| \leq H(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для исследования рядов экспонент, представляющих голоморфные функции с учетом их роста вблизи границы, потребовались целые функции с более тонкими асимптотическими свойствами [2], [3]. В работе [4] показано существование целых функций, удовлетворяющих оценкам

$$\ln |L(z)| \leq H(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$\ln |L'(a)| \geq H(a) - \sigma \ln(|a| + 1) - C, \quad \text{если } L(a) = 0. \quad (2)$$

В то же время в некоторых частных случаях известны точные значения для постоянной  $\sigma$  в соотношении (1).

**Теорема А** (см. [1]). Пусть  $H(z)$  — опорная функция ограниченного выпуклого многоугольника. Тогда существует целая функция  $L$ , удовлетворяющая соотношениям (1), (2), причем  $\sigma = 0$ .

**Теорема Б** (см. [5]). Пусть  $H$  — опорная функция ограниченной выпуклой области с дважды гладкой границей, кривизна которой ограничена снизу положительной постоянной. Тогда существует целая функция, удовлетворяющая (1) и (2), причем  $\sigma = 1/2$ .

Следующая лемма показывает, что в теоремах А, Б постоянную  $\sigma$  нельзя уменьшить.

Для однородной меры  $\mu$  определим функцию  $\rho_\mu(z)$  из соотношения

$$\mu(\{\omega: |\omega - z| < \rho_\mu(z)\}) = 1.$$

Положим

$$\mu(z, t) = \mu(\{\omega: |\omega - z| < t\}).$$

Лемма 1. Пусть  $u$  — положительно однородная субгармоническая функция,  $\mu$  — ассоциированная мера. Если целая функция  $L$  удовлетворяет условию

$$|L(z)| \leq \exp u(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

и для  $a$ ,  $L(a) = 0$ , круг  $D(a, \rho_\mu(a))$  не содержит точку 0, то имеет место оценка

$$|L'(a)| \leq \exp(u(a) - \ln \rho_\mu(a) + \ln 2e).$$

Доказательство леммы 1. Через  $H$  обозначим функцию, гармоническую в круге  $D(a, \rho_\mu(a))$  и равную  $u$  на границе этого круга. Пусть  $g(z)$  — голоморфная функция в  $D(a, \rho_\mu(a))$ , реальная часть которой совпадает с  $H$ . Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{L(z) e^{-g(z)}}{z - a}.$$

Она голоморфна в круге  $D(a, \rho_\mu(a))$  и на границе этого круга удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leq \frac{1}{\rho_\mu(a)}.$$

По принципу максимума отсюда получим, что имеет место оценка

$$|F(a)| = |L'(a)| \cdot |e^{-g(a)}| \leq \frac{1}{\rho_\mu(a)}.$$

Для доказательства леммы остается показать, что выполнено неравенство

$$H(a) - u(a) \leq \ln 2e.$$

По формуле Привалова имеем равенство

$$H(a) - u(a) = \int_0^{\rho_\mu(a)} \frac{\mu(a, t)}{t} dt.$$

Так как по определению функции  $\rho_\mu$  мера  $\mu(a, t)$  при  $t < \rho_\mu(a)$  не превосходит 1, то

$$\int_{\frac{\rho_\mu(a)}{2}}^{\rho_\mu(a)} \frac{\mu(a, t)}{t} dt \leq \ln 2.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$H(a) - u(a) \leq \ln 2 + \int_0^{\frac{\rho_\mu(a)}{2}} \frac{\mu(a, t)}{t} dt. \quad (3)$$

Не уменьшая общности будем считать, что  $\operatorname{Im} a = 0$ . По условию  $D(a, \rho_\mu(a)) \ni 0$ , поэтому криволинейный четырехугольник, ограниченный лучами  $\{te^{\pm i\varphi_0}, t > 0\}$ , где  $\sin \varphi_0 = \frac{1}{2|a|} \rho_\mu(a)$ , окружностями  $\{|z| = |a| \pm \frac{1}{2} \rho_\mu(a)\}$  и содержащий точку  $z$ , лежит в круге  $D(a, \rho_\mu(a))$ . Следовательно,  $\mu$ -мера этого четырехугольника не превосходит 1.

Если мера  $\mu$  имеет вид  $ds(\varphi) dr$ , то

$$\rho_\mu(a) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} ds(\varphi) \leq 1.$$

Отсюда получим

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} ds(\varphi) \leq \frac{1}{\rho_\mu(a)}.$$

Круг  $D(a, t)$  при  $t < \frac{1}{2} \rho_\mu(a)$  лежит в четырехугольнике, ограниченном лучами  $\{t \exp(\pm i\varphi(t)), t > 0\}$ , где  $\sin \varphi(t) = t/|a|$ , и окружностями  $\{|z| = |a| \pm t\}$ . Поэтому имеет место оценка

$$\mu(a, t) \leq 2t \int_{-\varphi(t)}^{\varphi(t)} ds(\varphi) \leq \frac{2t}{\rho_\mu(a)}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (3) получим утверждение леммы 1.

Заметим, что в случае, рассмотренном в теореме А, функция  $\rho_\mu(z)$  удовлетворяет асимптотической оценке

$$\rho_\mu(z) \geq c > 0,$$

и, соответственно, в теореме Б

$$\rho_\mu(z) \geq c\sqrt{|z|}.$$

Поэтому в этих теоремах постоянная  $\sigma$  не может быть уменьшена.

В теоремах А, Б функция  $\rho_\mu$  обладает одним общим свойством. А именно, при некоторых постоянных  $a, b > 0$  имеет место соотношение

$$0 < a \leq \frac{\rho_\mu(z)}{\rho_\mu(w)} \leq b < \infty, \quad w, z \in \text{supp } \mu, \quad \left| 1 - \frac{z}{w} \right| < \frac{1}{2}. \quad (\text{R})$$

Анализ этого условия будет дан в конце статьи. Основным содержанием данной статьи является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $u$  — положительно однородная субгармоническая функция,  $\mu$  — ее ассоциированная мера и функция  $\rho = \rho_\mu$  обладает свойством (R). Тогда существует целая функция  $L$ , удовлетворяющая условиям

1) все нули  $(a_n)_{n=1}^\infty$  функции  $L$  простые и круги  $D(a_n, \varepsilon \rho(a_n) \ln^{-\frac{1}{5}} \rho(a_n))$  при некотором  $\varepsilon > 0$  попарно не пересекаются;

2) вне множества  $E = \bigcup_n D(a_n, \rho(a_n) \ln^{-\frac{1}{5}} \rho(a_n))$  выполняется соотношение

$$|u(z) - \ln |L(z)|| = O(\ln^{\frac{4}{5}} \rho_0(z) \ln \ln \rho_0(z)).$$

где

$$\rho_0(z) = \max \left\{ \rho(w) : \left| 1 - \frac{z}{w} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad w \in \text{supp } \mu \right\}.$$

Из этих свойств следует, что имеют место неравенства

$$|L'(a_n)| \geq \exp(u(a_n) - \ln \rho_0(a_n) + O(\ln^{\frac{4}{5}} \rho_0(a_n) \ln \ln \rho_0(a_n))).$$

Согласно лемме 1 первый член асимптотики в этом соотношении нельзя уменьшить.

Для доказательства теоремы потребуются некоторые подготовительные утверждения.

1°. Приведем некоторые простые следствия из условия (R).

а) Пусть для меры  $\mu$ , имеющей вид  $ds(\varphi)dr$ , где  $s$  — непрерывна справа и ограничена, функция  $\rho = \rho_\mu$  удовлетворяет условию (R) и ограничена на  $\text{supp } \mu$ . Тогда  $s$  — функция конечного числа скачков. Обратно, если функция  $s$  имеет хотя бы один скачок и  $\rho$  удовлетворяет условию (R), то  $\rho$  ограничена на  $\text{supp } \mu$ .

Действительно, пусть  $z_0 = e^{i\varphi} \in \text{supp } \mu$  и  $\rho(z) \leq \rho_0$ ,  $z \in \text{supp } \mu$ . Поскольку криволинейный четырехугольник, ограниченный окружностями  $\{z: |z| = R \pm \rho_0\}$  и лучами  $\{te^{i(\varphi \pm \theta)}, t > 0\}$ , где  $\sin \theta = \frac{\rho_0}{R}$ ,  $R > \rho_0$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ , вместе с точкой  $D(Re^{i\varphi}, \rho_0)$  содержит круг  $D(Re^{i\varphi}, \rho_0)$ , то  $\mu$ -мера этого четырехугольника не меньше единицы. Поэтому

$$2\rho_0 \int_{\varphi-\theta}^{\varphi+\theta} ds(\varphi) \leq 1.$$

Отсюда получим неравенство

$$s(\varphi + \theta) - s(\varphi - \theta) \geq \frac{1}{2\rho_0}.$$

При  $R \rightarrow \infty$  величина  $\theta = \theta(R)$  стремится к нулю и последнее неравенство означает, что функция  $s$  имеет скачок в точке  $\varphi$ , причем величина скачка не меньше  $\frac{1}{2\rho_0}$ .

б) Для меры  $\mu \neq 0$ , имеющей вид  $ds(\varphi)dr$ , где  $s$  — ограничена, при условии (R) имеет место асимптотическое неравенство

$$\rho_\mu(z) \leq \text{const} \sqrt{|z|}, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

Для доказательства зафиксируем достаточно большое  $R$ . Рассмотрим совокупность кругов  $D(z, \rho_\mu(z))$ ,  $z \in \text{supp } \mu$ ,  $R < |z| < 2R$ . По лемме Хеймана (см. [6]) из этой совокупности можно выбрать систему кругов  $D(z_i, \rho_\mu(z_i))$ , покрывающую  $\text{supp } \mu$  в кольце  $\{z: R < |z| < 2R\}$ , причем так, что каждая точка плоскости попадает не более чем в 6 кругов. Пусть

$$\rho = \min\{\rho_\mu(z), z \in \text{supp } \mu, |z| > R\}$$

и  $N$  — число кругов в выбранной системе. Площадь каждого кружка не меньше  $\frac{1}{6} \pi \rho^2$  и вся система покрывает площадь не менее чем  $\frac{1}{6} N \pi \rho^2$ .

С другой стороны, эта площадь не превосходит площади круга  $D(0, 3R)$ , т. е.

$$\frac{1}{6} N \pi \rho^2 \leq 9\pi R^2.$$

Отсюда получим оценку

$$N \leq \frac{54R^2}{\rho^2}.$$

Таким образом,  $\mu$ -мера кольца  $\{z: R < |z| < 2R\}$  не превосходит  $54R^2/\rho^2$ . Поскольку  $\mu$  — однородная мера, то при некоторой постоянной  $\delta > 0$

$\mu$ -мера этого кольца не меньше, чем  $\delta R$ . Следовательно,  $\delta R \leq 54R^2/\rho^2$  или

$$\rho \leq \frac{8}{\sqrt{\delta}} \sqrt{R}.$$

в) Пусть  $\mu$  — мера вида  $ds(\varphi)dr$ , где  $s$  — ограничена. Положим

$$\tilde{S} = \bigcup_{z \in \text{supp } \mu} D(z, \rho_\mu(z)).$$

Если  $\rho_\mu$  удовлетворяет условию (R), то лебегова мера пересечения  $\tilde{S}$  с кольцом  $\{R < |z| < 2R\}$  не превосходит  $\text{const } R\rho_\mu^2$ , где

$$\rho_R = \max\{\rho(z) : |z| \in (R, 2R), z \in \text{supp } \mu\}$$

и  $\text{const}$  не зависит от  $R$ .

Рассмотрим покрытие кругами  $D(z_i, \rho_\mu(z_i))$ , введенное в п. 1 б). Число кругов  $N$  в силу однородности меры  $\mu$  удовлетворяет оценке  $N \leq \text{const } R$ . С другой стороны, площадь пересечения  $\tilde{S}$  с кольцом  $\{R < |z| < 2R\}$  не превосходит  $N\pi\rho_\mu^2$ . Таким образом,

$$\lambda(\tilde{S} \cap \{z : |z| \in (R, 2R)\}) \leq \text{const } R\rho_\mu^2.$$

г) Пусть  $\mu$  — однородная мера. Функцию  $\tilde{\rho}_\mu(z)$  определим из условия: для любого  $t < \tilde{\rho}_\mu(z)$   $\mu$ -мера криволинейного четырехугольника, ограниченного окружностями  $\{w : |w| = |z|\}$ ,  $\{w : |w| = |z| + t\}$ , лучами  $\{te^{i(\varphi \pm \theta)}, t > 0\}$ , где  $2\theta|z| = t$ , и содержащего точку  $z$ , не превосходит 1.

Если функция  $\rho_\mu$  удовлетворяет условию (R), то для некоторых  $a_1, b_1 > 0$  имеет место неравенство

$$0 < a_1 \leq \frac{\tilde{\rho}_\mu(z)}{\rho_\mu(z)} \leq b_2 < \infty.$$

Тем самым, функция  $\rho_\mu$  также удовлетворяет условию (R).

В самом деле, если  $|z|$  достаточно велико, то четырехугольник между лучами  $\{te^{i(\varphi \pm \theta)}, t > 0\}$ ,  $2\theta|z| = \rho_\mu(z)$ , и окружностями  $\{w : |w| = |z|\}$ ,  $\{w : |w| = |z| + \frac{1}{2}\rho_\mu(z)\}$  содержится в круге  $D(z, \rho_\mu(z))$ . Следовательно,  $\tilde{\rho}_\mu(z) \geq \frac{1}{2}\rho_\mu(z)$ . С другой стороны, рассмотрим четырехугольник, ограниченный касательными лучами к окружности  $\{w : |w - z| = \rho_\mu(z)\}$ , проведенными из начала координат, и окружностями  $\{w : |w| = |z| - \rho_\mu(z)\}$ ,  $\{w : |w| = |z| + \rho_\mu(z)\}$ . Очевидно,  $\mu$ -мера этого четырехугольника не меньше 1. Пусть угол между касательными равен  $\alpha$ . Тогда  $\alpha/2 \geq \sin \alpha/2 = \rho_\mu(z)/2$ . Поэтому  $\mu$ -мера четырехугольника, ограниченного касательными и окружностями  $\{w : |w| = |z|\}$ ,  $\{w : |w| = |z| + \alpha(z)\}$  не меньше 1. Следовательно, при достаточно больших  $|z|$  выполняются неравенства

$$\tilde{\rho}_\mu(z) \leq \alpha|z| \leq 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |z| \leq 4\rho_\mu(z).$$

д) Рассмотрим множество

$$\tilde{S} = \bigcup_{z \in \text{supp } \mu} D(z, \rho_\mu(z)).$$

Если функция  $\rho_\mu$  удовлетворяет условию (R), то имеет место соотношение

$$0 < \tilde{a} \leq \frac{\rho_\mu(z)}{\rho_\mu(w)} \leq b < \infty, \quad z, w \in \tilde{S}, \quad \left|1 - \frac{z}{w}\right| \leq \frac{1}{2}. \quad (\tilde{R})$$

По утверждению п. 1 г) в этом случае условию ( $\tilde{R}$ ) удовлетворяет также функция  $\tilde{\rho}_\mu$ .

Действительно, если  $z \in \mathcal{S}$ , то  $z \in D(z', \rho_\mu(z'))$  для некоторого  $z' \in \text{supp } \mu$ . Поэтому верно неравенство

$$\rho_\mu(z) \leq |z - z'| + \rho_\mu(z') \leq 2\rho_\mu(z').$$

С другой стороны, если через  $z''$  обозначим точку из  $\text{supp } \mu$ , ближайшую к точке  $z$ , то, очевидно, выполняется неравенство  $\rho_\mu(z'') \leq 2\rho_\mu(z)$ . Таким образом, для любых двух точек  $z, \omega \in \mathcal{S}$  имеем

$$\frac{\rho_\mu(z'')}{4\rho_\mu(\omega')} \leq \frac{\rho_\mu(z)}{\rho_\mu(\omega)} \leq \frac{4\rho_\mu(z')}{\rho_\mu(\omega'')},$$

причем,  $z', z'', \omega', \omega'' \in \text{supp } \mu$ .

2°. Пусть  $\mu$  — однородная мера вида  $ds(\varphi)dr$  и  $\mu_n$  — сужение меры  $\mu$  на кольцо  $K_n = \{2^n < |z| \leq 2^{n+1}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mu_0$  — сужение  $\mu$  на круг  $D(0, 2)$ . Если функция  $\rho_\mu$  удовлетворяет условию (R), то существуют числа  $0 \leq \Phi_1^{(n)} < \Phi_2^{(n)} < \Phi_3^{(n)} < \dots < \Phi_{p_n}^{(n)} < 2\pi$  и положительные числа  $m_1^{(n)}, \dots, m_{p_n}^{(n)}$ , обладающие свойствами:

а) если через  $\nu_n$  обозначим сужение меры

$$\sum_{j=1}^{p_n} m_j^{(n)} \delta(\varphi - \Phi_j^{(n)}) dr$$

на кольцо  $K_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\nu_0 = \mu_0$ , то имеет место оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\pi(\mu_n, z) - \pi(\nu_n, z)| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_\mu(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где  $\pi(\mu, z)$  — логарифмический потенциал меры  $\mu$ ;

б) для каждого  $n = 1, 2, \dots$ , и  $j = 1, \dots, p_n$  выполняется неравенство

$$\text{const} \rho_n 2^{-n} \geq |\Phi_j^{(n)} - \Phi_{j+1}^{(n)}| \geq \text{const} \rho_n 2^{-n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n,$$

где  $\rho_n = \max\{\rho_\mu(z), z \in K_n\}$ . Здесь  $\Phi_{p_n+1}^{(n)}$  полагаем равным  $\Phi_1^{(n)} + 2\pi$ ;

в) при любом  $n = 1, 2, \dots$  выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{p_n} m_j^{(n)} = \int_0^{2\pi} ds(\varphi),$$

и для любого  $j = 1, 2, \dots, p_n$  справедливы неравенства

$$\frac{\text{const}}{\rho_n} \geq m_j^{(n)} \geq \text{const} \frac{1}{\rho_n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n,$$

где  $\text{const}$  не зависит от  $n$ .

Эти утверждения очевидны, если  $s(\varphi)$  — функция скачков. Поэтому предположим, что  $s$  не имеет скачков. Представим внутренность пересечения множества  $\mathcal{S}$ , введенного в п. 1 д), с окружностью  $\partial D(0, 2^n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n)$  в виде объединения попарно не пересекающихся круговых интервалов.

Пусть  $(2^n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n e^{i\alpha}, 2^n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n e^{i\beta})$  — один из таких интервалов. Рассмотрим ячейки

$$P(\alpha, \alpha + h 2^{-n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n, 2^n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n, 2^n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n + h),$$

образованные пересечением угла между направлениями  $\alpha$ ,  $\alpha + h(2^{-n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n)$  и кольца

$$D(0, 2^n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n + h) \setminus D(0, 2^n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n)$$

(и пересекающейся с рассматриваемым интервалом). Выберем  $h_1$  таким, чтобы  $\mu$ -мера ячейки  $P_{h_1}$  была равна 1. Поскольку функция  $s$  не имеет скачков, то такой выбор возможен. Через  $\alpha_1$  обозначим число  $\alpha + h_1$  и выберем число  $h_2$  таким, чтобы  $\mu$ -мера ячейки

$$P(\alpha_1, \alpha_1 + h_2 2^{-n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n, 2^n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n, 2^n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n + h_2)$$

была равна 1. Положим  $\alpha_2 = \alpha_1 + h_2$ . Этот процесс продолжим до тех пор, пока  $\alpha_m \leq \beta$ . Если  $\alpha_{m+1} > \beta$  и  $\alpha_m \leq \beta$ , то переопределим  $\alpha_m$ , положив его равным  $\beta$  и перейдем к другому интервалу связности. В результате множество  $K_n \cap \text{supp } \mu$  будет покрыто объединением попарно не пересекающихся ячеек

$$P_j^{(n)} = P(\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}, 2^n, 2^{n+1}), \quad 0 \leq \alpha_j^{(n)} < \beta_j^{(n)} \leq 2\pi,$$

таким образом, что если число  $H_j^{(n)}$  определить из условия

$$\mu(P(\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}, 2^n, 2^n) + H_j^{(n)}) = 1,$$

то выполняется соотношение

$$0 < \text{const} \leq \frac{H_j^{(n)} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n}{2^n (\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)})} \leq \text{const} < \infty. \quad (4)$$

Так как функция  $\min \{\tilde{\rho}_n(z), |z| \geq R\}$  не убывает с возрастанием  $R$ , то из утверждений п. 1 г), д) следует, что имеет место оценка

$$H_j^{(n)} \geq \text{const } \rho_n, \quad n = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, p_n. \quad (5)$$

Пусть

$$\sigma_n = \min_j 2^n (\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}).$$

Тогда из (4) и (5) вытекает, что справедлива оценка

$$\sigma_n \geq \text{const } \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n.$$

Определим числа  $\tilde{\Phi}_j^{(n)}$  из соотношений

$$\int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} \varphi ds(\varphi) = \tilde{\Phi}_j^{(n)} (s(\beta_j^{(n)}) - s(\alpha_j^{(n)}))$$

и положим  $\tilde{m}_j^{(n)} = s(\beta_j^{(n)}) - s(\alpha_j^{(n)})$ . Искомые наборы  $\Phi = (\Phi_j^{(n)})$  и  $m = (m_j^{(n)})$  определим следующим образом. Если для некоторого  $j$  выполнены неравенства

$$2^n |\Phi_j^{(n)} - \Phi_{j \pm 1}^{(n)}| \geq \frac{1}{2} \sigma_n,$$

то число  $\tilde{\Phi}_j^{(n)}$  включим в набор  $\Phi$ , а в набор  $m$  включим соответствующее  $\tilde{m}_j^{(n)}$ . Заметим, что поскольку  $\tilde{\Phi}_j^{(n)} \in (\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)})$ , то не выполняться может

только одно из последних двух неравенств. Если не выполнено, например, неравенство

$$2^n |\tilde{\Phi}_j^{(n)} - \tilde{\Phi}_{j+1}^{(n)}| \geq \frac{1}{2} \sigma_n,$$

то вместо чисел  $\tilde{\Phi}_j^{(n)}, \tilde{\Phi}_{j+1}^{(n)}$  в набор  $\Phi$  включим число  $\Phi_j^{(n)}$ , определяемое из соотношения

$$(\tilde{m}_j^{(n)} + \tilde{m}_{j+1}^{(n)}) \Phi_j^{(n)} = \tilde{m}_j^{(n)} \tilde{\Phi}_j^{(n)} + \tilde{m}_{j+1}^{(n)} \tilde{\Phi}_{j+1}^{(n)},$$

или, что то же самое, из соотношения

$$\int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_{j+1}^{(n)}} \varphi ds(\varphi) = \Phi_j^{(n)} (s(\beta_{j+1}^{(n)}) - s(\alpha_j^{(n)})).$$

В набор  $m$  соответственно включим число

$$m_j^{(n)} = s(\beta_{j+1}^{(n)}) - s(\alpha_j^{(n)}) = \tilde{m}_j^{(n)} + \tilde{m}_{j+1}^{(n)}.$$

Таким образом, после соответствующих переобозначений и перенумераций получим следующее.

Множество  $K_n \cap \text{supp } \mu$  покрыто системой ячеек  $P_j^{(n)} = P(\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}, 2^n, 2^{n+1})$  таких, что выполнено (4) и (5). Причем

$$\bigcup_{j,n} P_j^{(n)} \subset \tilde{S}.$$

Если положим  $m_j^{(n)} = s(\beta_j^{(n)}) - s(\alpha_j^{(n)})$ , и

$$\Phi_j^{(n)} = \frac{1}{m_j^{(n)}} \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} \varphi ds(\varphi),$$

то имеет место неравенство

$$\text{const } \rho_n \geq 2^n |\Phi_{j+1}^{(n)} - \Phi_j^{(n)}| \geq \text{const } \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n.$$

Тем самым выполнено утверждение 2б). Из построения легко заметить, что

$$2^n |\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}| \leq \text{const } \rho_n.$$

Отсюда и из (4) получим

$$H_j^{(n)} \leq \text{const } \rho_n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n.$$

По определению  $\tilde{m}_j^{(n)} = 1/H_j^{(n)}$ , поэтому

$$\tilde{m}_j^{(n)} \geq \text{const } \rho_n^{-1} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n.$$

Согласно (5) имеем оценку сверху  $\tilde{m}_j^{(n)} \leq \text{const } \rho_n^{-1}$ . Следовательно, утверждение 2 в) также справедливо. Осталось получить оценки потенциалов.

Зафиксируем точку  $z = re^{i\varphi}$  и положим

$$T_2 = \min(r + \rho_n, 2^{n+1}), T_1 = \max(r - \rho_n, 2^n).$$

Через  $\dot{\Lambda}$  обозначим угол между направлениями  $\varphi - \rho_n 2^{-n}$ ,  $\varphi + \rho_n 2^{-n}$ , содержащий точку  $z$ . Пусть  $\Pi$  — объединение ячеек  $P(\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}, T_1, T_2)$  по всем  $j$ , для которых ячейка  $P_j^{(n)}$  пересекается с углом  $\dot{\Lambda}$ . Если  $T_1 \geq T_2$ , то множество  $\Pi$  естественно считать пустым. Через  $v_n$  обозначим сужение

меры  $\sum_{j=1}^{P_n} m_j^{(n)} \delta(\varphi - \Phi_j^{(n)}) d\tau$  на кольцо  $K_n$  и при фиксированном  $z$  функцию  $\ln |z - te^{i\theta}|$  обозначим через  $L(t, \theta)$ . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) = \\ & = \sum_{j \in I} \left( \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} \int_{T_1}^{T_2} L(t, \theta) ds(\theta) dt - m_j^{(n)} \int_{T_1}^{T_2} L(t, \Phi_j^{(n)}) dt \right), \end{aligned}$$

где  $I$  — множество индексов  $j$ , для которых  $P_j^{(n)} \cap \Lambda \neq \emptyset$ . Введем в рассмотрение функцию

$$s_j(\varphi) = \begin{cases} s(\alpha_j^{(n)}), & \varphi < \Phi_j^{(n)}, \\ s(\beta_j^{(n)}), & \varphi \geq \Phi_j^{(n)}. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, имеет место неравенство

$$|s(\varphi) - s_j(\varphi)| \leq m_j^{(n)}, \quad \varphi \in (\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}).$$

Поэтому интегрированием по частям получим оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Pi} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \sum_{j \in I} \int_{T_1}^{T_2} \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} |s(\theta) - \\ & - s_j(\theta)| \cdot |L'_\theta(t, \theta)| d\theta dt \leq \max_i m_i^{(n)} \int_{\Pi} |L'_\theta(t, \theta)| dt d\theta. \end{aligned}$$

По определению

$$m_j^{(n)} = s(\beta_j^{(n)}) - s(\alpha_j^{(n)}) = \frac{1}{H_j^{(n)}} \leq \frac{\text{const}}{\rho_n}$$

и имеет место включение  $\Pi \subset D(z, \text{const} \rho_n)$ . Отсюда, используя элементарные оценки  $L'(t, \theta)$ , получим

$$\left| \int_{\Pi} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \frac{\text{const}}{\rho_n} \int_{D(z, \text{const} \rho_n)} \frac{d\lambda(w)}{|z - w|}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\left| \int_{\Pi} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \text{const}. \quad (6)$$

Пусть ячейка  $P_j^{(n)}$  не пересекается с множеством  $\Lambda$ . Дважды интегрируя по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{P_j^{(n)}} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) = \\ & = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} L''_\theta(t, \theta) \left( \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\theta} (s(\varphi) - s_j(\varphi)) d\varphi \right) d\theta dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) вытекает оценка

$$\left| \int_{P_j^{(n)}} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \int_{2^n}^{2^{n+1}} C \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} |L''(t, \theta)| d\theta dt m_j^{(n)} (\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}) \leq \\ \leq \text{const} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n 2^{-n} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \int_{\alpha_j^{(n)}}^{\beta_j^{(n)}} |L''(t, \theta)| dt d\theta. \quad (7)$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими оценками функции  $L''(t, \theta)$ :

$$|L''(t, \theta)| \leq \begin{cases} \frac{5t^2}{|te^{i\theta} - z|^2}, & \text{если } \frac{t}{|z|} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right), \\ \frac{4t}{|z|}, & \text{если } \frac{t}{|z|} \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4|z|}{t}, & \text{если } \frac{t}{|z|} \geq 2. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть  $z \in K_N$ . Тогда для  $n = N, N \pm 1$  из (7) и (8) получим неравенство

$$\left| \int_{P_j^{(n)}} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \text{const} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n \int_{P_j^{(n)}} \frac{d\lambda(w)}{|z - w|^2}. \quad (9)$$

Аналогично оцениваются интегралы по ячейкам  $P(\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}, T_2, 2^{n+1})$  в том случае, когда  $P_j^{(n)}$  пересекается с множеством  $\Pi$ .

Из утверждения п. 1 в) следует, что лебегова мера множества  $\tilde{S} \cap K_n$  равна  $\lambda_n 2^n \rho_n^2$ , причем последовательность  $\lambda_n$  ограничена. Через  $\tilde{\Pi}$  обозначим пересечение кольца  $K_n$  с углом между направлениями  $\varphi \pm \frac{1}{3} \lambda_n 2^{-n} \rho_n^2$ , содержащим точку  $z = re^{i\varphi}$ . Лебегова мера множества  $\tilde{\Pi}$  равна  $\lambda_n \rho_n^2 2^n$ . Поэтому из соотношения (9) следует оценка

$$\left| \int_{K_n \setminus \tilde{\Pi}} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \text{const} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n \int_{\tilde{\Pi} \setminus \Pi} \frac{d\lambda(w)}{|z - w|^2}.$$

Простой подсчет показывает, что справедливо неравенство

$$\int_{\tilde{\Pi} \setminus \Pi} \frac{d\lambda(w)}{|z - w|^2} \leq \text{const} \ln \rho_n.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\left| \int_{K_n \setminus \Pi} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_n.$$

Отсюда и из (6) вытекает неравенство

$$\left| \int_{K_n} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_n, \quad n = N \pm 1. \quad (10)$$

Если  $n > N + 1$ , то из неравенств (8), (7) получим оценку

$$\left| \int_{P_j^{(n)}} \ln |z - w| d(\mu_n(w) - \nu_n(w)) \right| \leq \text{const} 2^{-n} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{|z|}{t} dt (\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}).$$

Суммируя эти неравенства по  $j$  и по  $n > N+1$ , получим соотношение

$$\sum_{n=N+2}^{\infty} |\pi(\mu_n, z) - \pi(\nu_n, z)| \leq \text{const.}$$

Аналогично получается оценка для  $n < N-1$ :

$$\sum_{n=0}^{N-2} |\pi(\nu_n, z) - \pi(\mu_n, z)| \leq \text{const.}$$

Последние два неравенства вместо (10) дают утверждение пункта 2 а).

3°. Пусть  $d\mu = ds(\varphi) dr$  — однородная мера,  $\mu_n$  — сужение меры на кольцо  $K_n = \{z \in (2^n, 2^{n+1})\}$ ,  $\mu_0$  — сужение  $\mu$  на круг  $D(0, 2)$ , Если функция  $\rho_n$  удовлетворяет условию (R), то существуют числа  $0 \leq \Phi_1^{(n)} < \Phi_2^{(n)} < \dots < \Phi_{p_n}^{(n)} < 2\pi$  и положительные числа  $M_1^{(n)}, \dots, M_{p_n}^{(n)}$ , обладающие свойствами:

а) если через  $\gamma_n$  обозначим сужение меры  $\sum_j M_j^{(n)} \delta(\varphi - \Phi_j^{(n)}) dr$  на кольцо  $K_n$ ,  $\mu_0 = \gamma_0$ , то имеет место соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\pi(\gamma_n, z) - \pi(\mu_n, z)| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_0(z);$$

б) для каждого  $n=1, 2, \dots, j=1, \dots, p_n$  выполняется неравенство

$$\text{const} \rho_n 2^{-n} \geq |\Phi_j^{(n)} - \Phi_{j+1}^{(n)}| \geq \text{const} \rho_n 2^{-n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n;$$

в) при любом  $n$  выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{p_n} M_j^{(n)} = \int_0^{2\pi} ds(\varphi)$$

и для любого  $j=1, 2, \dots, p_n$  величина  $2^n M_j^{(n)}$  — целое четное число, причем

$$\frac{\text{const}}{\rho_n} \geq M_j^{(n)} \geq \text{const} \frac{1}{\rho_n} \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n.$$

За  $\Phi_j^{(n)}$  возьмем числа, существование которых утверждается в п. 2°. Пусть  $2^n m_j^{(n)} = 2k_j^{(n)} + x_j^{(n)}$ , где  $k_j^{(n)}$  — целое положительное число и  $|x_j^{(n)}| < 2$ . Это представление неоднозначно. Выбор одного из двух вариантов такого представления подчиним условию

$$\left| \sum_{j=1}^m x_j^{(n)} \right| < 2, \quad m = 1, 2, \dots, p_n. \quad (11)$$

Не уменьшая общности можно считать, что

$$\int_0^{2\pi} ds(\varphi) = 1.$$

Положим  $M_j^{(n)} = 2^{1-n} k_j^{(n)}$ . Тогда согласно утверждению 2в) имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{p_n} M_j^{(n)} = \int_0^{2\pi} ds(\varphi) = 1.$$

Тем самым, для  $\Phi_j^{(n)}, M_j^{(n)}$  справедливы утверждения 3б), 3в). Получим оценки потенциалов.

Рассмотрим функции

$$s_n(\varphi) = \sum_{j=1}^l m_j^{(n)}, \Phi_l^{(n)} \leq \varphi < \Phi_{l+1}^{(n)}, \tilde{s}_n(\varphi) = \sum_{j=1}^l M_j^{(n)}, \Phi_l^{(n)} \leq \varphi < \Phi_{l+1}^{(n)}.$$

В силу соотношений (11) имеем оценку

$$|s_n(\varphi) - \tilde{s}_n(\varphi)| \leq 2^{1-n}, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

При фиксированном  $z$  функцию  $\ln |z - te^{i\theta}|$  обозначим через  $L(t, \theta)$ . Интегрируя по частям и учитывая, что

$$s_n(0) - \tilde{s}_n(0) = s_n(2\pi) - \tilde{s}_n(2\pi) = 0,$$

получим равенство

$$\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z) = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \int_0^{2\pi} L'_\theta(t, \theta) (s_n(\theta) - \tilde{s}_n(\theta)) d\theta dt,$$

из которого вытекает неравенство

$$|\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z)| \leq 2^{1-n} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \int_0^{2\pi} |L'_\theta(t, \theta)| d\theta dt. \quad (12)$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими оценками функции  $L'(t, \theta)$ , которые получаются непосредственным подсчетом:

$$|L'(t, \theta)| \leq \begin{cases} \frac{t}{|te^{i\theta} - z|}, & \text{если } \frac{t}{|z|} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right), \\ \frac{2t}{|z|}, & \text{если } \frac{t}{|z|} \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2|z|}{t}, & \text{если } \frac{t}{|z|} \geq 2. \end{cases}$$

Пусть  $z \in K_N$ . Тогда для  $n = N-1, N, N+1$ , используя первое из оценок  $L'$ , получим

$$|\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z)| \leq \int_{K_n} \frac{d\lambda(w)}{|z-w|} 2^{1-n}.$$

Отсюда, заменой переменных  $w = 2^n \zeta$ , получим неравенство

$$|\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z)| \leq 2 \max_{\xi \in K_1} \int_{K_1} \frac{d\lambda(\zeta)}{|\xi - \zeta|}, \quad n = N \pm 1, N.$$

Для  $n < N-1$  воспользуемся вторым неравенством:

$$|\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z)| \leq \frac{4\pi 2^n}{|z|},$$

поэтому верна оценка

$$\sum_{n < N-1} |\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z)| \leq \text{const.}$$

Аналогично с использованием третьего неравенства в оценке  $L'(t, \theta)$  получим соотношение

$$\sum_{n > N+1} |\pi(v_n, z) - \pi(\gamma_n, z)| \leq \text{const.}$$

Тем самым, доказано утверждение 3а).

4°. Закончим доказательство теоремы 1. По утверждению 3в)  $k_j^{(n)} = 2^{n-1} M_j^{(n)}$  — целое положительное число. Отрезок  $\{t \exp i\Phi_j^{(n)}, 2^n < t < 2^{n+1}\}$  разделим на  $k_j^{(n)}$  равных отрезков точками  $z_{j,i}^{(n)}, i=0, 1, \dots, k_j^{(n)}$ . Тогда  $\gamma_n$ -мера отрезка между точками  $z_{j,i}^{(n)}$  и  $z_{j,i+1}^{(n)}$  равна 2.

Пусть

$$t_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}, \quad t_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega_{j,i}^{(n)} &= z_{j,i}^{(n)} + t_1 (z_{j,i+1}^{(n)} - z_{j,i}^{(n)}), \quad i = 0, 1, \dots, k_j^{(n)} - 1, \\ \zeta_{j,i}^{(n)} &= z_{j,i}^{(n)} + t_2 (z_{j,i+1}^{(n)} - z_{j,i}^{(n)}). \end{aligned}$$

Точки  $\omega_{j,i}^{(n)}, \zeta_{j,i}^{(n)}, n=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots, p_n, i=1, \dots, k_j^{(n)}-1$ , и  $\omega_{0,0}^{(0)} = -1, \zeta_{0,0}^{(0)} = 1$  будут служить нулями искомой функции  $L$ . Перечислим свойства этих точек, необходимые для доказательства теоремы.

а) имеют место равенства

$$\begin{aligned} M_j^{(n)} \int_{|z_{j,i}^{(n)}|}^{|z_{j,i+1}^{(n)}|} x \, dx &= |\omega_{j,i}^{(n)}| + |\zeta_{j,i}^{(n)}|, \quad n = 1, 2, \dots, \\ M_j^{(n)} \int_{|z_{j,i}^{(n)}|}^{|z_{j,i+1}^{(n)}|} x^2 \, dx &= |\omega_{j,i}^{(n)}|^2 + |\zeta_{j,i}^{(n)}|^2. \end{aligned}$$

Эти равенства вытекают из определения точек  $t_1, t_2$ , поскольку

$$\int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2, \quad \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{2} t_1^2 + \frac{1}{2} t_2^2.$$

б) положим

$$\xi_{j,i}^{(n)} = \frac{1}{2} (z_{j,i}^{(n)} + z_{j,i+1}^{(n)}) = \frac{1}{2} (\omega_{j,i}^{(n)} + \zeta_{j,i}^{(n)}).$$

Тогда существует постоянная  $\epsilon > 0$  такая, что круги

$$D(\omega_{j,i}^{(n)}, \epsilon \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n), \quad D(\zeta_{j,i}^{(n)}, \epsilon \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n), \quad D(\xi_{j,i}^{(n)}, \epsilon \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n), \\ n = 1, \dots, j = 1, \dots, p_n, \quad i = 1, \dots,$$

попарно не пересекаются. Кроме того,

$$|z_{j,i+1}^{(n)} - z_{j,i}^{(n)}| = \frac{2^n}{k_j^{(n)}} = \frac{2}{M_j^{(n)}} \leq \text{const } \rho_n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n.$$

Эти утверждения вытекают из 3б) и 3в).

Через  $\mu_{n,j,i}$  обозначим сужение меры  $M_j^{(n)} \delta(\varphi - \Phi_j^{(n)}) dr$  на отрезок  $\{t \exp i\Phi_j^{(n)}, t \in (|z_{j,i}^{(n)}|, |z_{j,i+1}^{(n)}|)\}$ . Требуется оценить разность потенциалов мер  $\mu_{n,j,i}$  и  $\delta(\omega - \omega_{j,i}^{(n)}) + \delta(\omega - \zeta_{j,i}^{(n)})$ . Пусть

$$E = (\cup D(\omega_{j,i}^{(n)}, \epsilon \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n)) \cup (\cup D(\zeta_{j,i}^{(n)}, \epsilon \rho_n \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_n)).$$

Зафиксируем точку  $z \notin E$ . Пусть  $z \in K_N$ . Рассмотрим множество  $I$  индексов  $n, j, i$ , для которых отрезок, соединяющий точки  $z_{j,i}^{(n)}$  и  $z_{j,i+1}^{(n)}$  пересекается с кругом  $D(z, \rho_n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n)$ . Заменой переменных  $\omega = \omega(t) = z_{j,i}^{(n)} +$

+  $t(z_{j,i+1}^{(n)} - z_{j,i}^{(n)})$  получим равенство

$$\begin{aligned} & \pi(\mu_{n,j,i}, z) - \ln|z - \omega_{j,i}^{(n)}| - \ln|z - \zeta_{j,i}^{(n)}| = \\ & = 2 \int_0^1 \ln|t_z - t| dt - \ln|t_z - t_1| - \ln|t_z - t_2|, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $t_z$  определяется из равенства

$$z = z_{j,i}^{(n)} + t_z(z_{j,i+1}^{(n)} - z_{j,i}^{(n)}).$$

По предположению  $z \notin E$  и отрезок между точками  $z_{j,i+1}^{(n)}$ ,  $z_{j,i}^{(n)}$  пересекается с кругом  $D(z, \rho_N \ln^{\frac{1}{5}} \rho_N)$ . Поэтому для  $t_z$  справедливы оценки

$$|t_z - t_i| \geq \text{const} \ln^{-\frac{2}{5}} \rho_N, \quad i = 1, 2, \quad |t_z| \leq \text{const} \ln^{\frac{2}{5}} \rho_N.$$

Таким образом, для рассматриваемых индексов  $n, j, i$  из (13) следует неравенство

$$|\pi(\mu_{n,j,i}, z) - \ln|z - \omega_{j,i}^{(n)}| - \ln|z - \zeta_{j,i}^{(n)}|| \leq \text{const} \ln \ln \rho_N.$$

Пусть  $k$  — число отрезков  $[z_{j,i+1}^{(n)}, z_{j,i}^{(n)}]$ , пересекающихся с кругом  $D(z, \rho_N \ln^{\frac{1}{5}} \rho_N)$ . В силу свойства 4б) найдется постоянная  $C$  такая, что все круги  $D(\xi_{j,i}^{(n)}, \varepsilon \rho_N \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_N)$  лежат в круге  $D(z, C \rho_N \ln^{\frac{1}{5}} \rho_N)$ . Поэтому имеет место оценка

$$k \varepsilon^2 \rho_N^2 \ln^{-\frac{2}{5}} \rho_N \leq \text{const} \rho_N^2 \ln^{\frac{2}{5}} \rho_N.$$

Следовательно,

$$k \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_N.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\sum' |\pi(\mu_{n,j,i}, z) - \ln|z - \omega_{j,i}^{(n)}| - \ln|z - \zeta_{j,i}^{(n)}|| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_N \ln \ln \rho_N, \quad (14)$$

где  $\sum'$  означает суммирование по тем  $n, j, i$ , для которых отрезок между точками  $z_{j,i}^{(n)}$ ,  $z_{j,i+1}^{(n)}$  пересекается с кругом  $D(z, \rho_N \ln^{\frac{1}{5}} \rho_N)$ ,

Введем функцию

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ \frac{1}{2}, & t_1 \leq t < t_2, \\ 1, & t_2 \leq t. \end{cases}$$

По определению чисел  $t_1, t_2$  справедливы равенства

$$h(0) = h(1) - 1 = 0, \quad \int_0^1 (h(t) - t) dt = 0,$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^t (h(s) - s) ds \right) dt = 0.$$

Поэтому, если отрезок между  $z_{j,i}^{(n)}$ ,  $z_{j,i+1}^{(n)}$  не пересекается с кругом

$D(z, \rho_N \ln^{\frac{1}{5}} \rho_N)$ , то в силу (13) верно равенство

$$\begin{aligned} \pi(\mu_{n,j,i}, z) - \ln |z - \omega_{j,i}^{(n)}| - \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}| &= \\ &= 2 \int_0^1 l'''(z, t) \left( \int_0^t \int_0^\tau (h(s) - s) ds d\tau \right) dt, \end{aligned}$$

где  $l(z, t)$  обозначает функцию  $\ln |t_z - t|$ . Для рассматриваемых индексов справедливо неравенство

$$|z - \omega| \geq \text{const} |z - \xi_{j,i}^{(n)}|, \quad \omega \in [z_{j,i}^{(n)}, z_{j,i+1}^{(n)}].$$

Отсюда элементарными оценками функции  $l'''(z, t)$  получим соотношение

$$|\pi(\mu_{n,j,i}, z) - \ln |z - \omega_{j,i}^{(n)}| - \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}|| \leq \text{const} \frac{|z_{j,i+1}^{(n)} - z_{j,i}^{(n)}|^3}{|z - \xi_{j,i}^{(n)}|^3}.$$

Из свойства 4б) и из субгармоничности функции  $|z - \omega|^{-3}$  в круге  $D(\xi_{j,i}^{(n)}, \rho_n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n)$  вытекает оценка

$$\begin{aligned} |\pi(\mu_{n,j,i}, z) - \ln |z - \omega_{j,i}^{(n)}| - \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}|| &\leq \\ &\leq \text{const} \rho_n \ln \rho_n \int_{D(\xi_{j,i}^{(n)}, \rho_n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n)} \frac{d\lambda(\omega)}{|z - \omega|^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для рассматриваемых индексов  $n, j, i$ , круги  $D(\xi_{j,i}^{(n)}, \rho_n \ln^{\frac{1}{5}} \rho_n)$  не пересекаются с кругом  $D(z, \rho_N \ln^{\frac{1}{5}} \rho_N)$  и попарно не пересекаются. Суммируя последние неравенства и учитывая соотношение (14) получим оценку

$$\sum_{n=N-1}^{N+1} \left| \pi(\gamma_n, z) - \sum_{j,i} (\ln |z - \omega_{j,i}^{(n)}| + \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}|) \right| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_N \ln \ln \rho_N.$$

Из неравенства (15), учитывая, что при  $n < N-1$  по утверждению п. 1б) верно неравенство  $\rho_n \leq \text{const} 2^{\frac{N}{2}}$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-2} \left| \pi(\gamma_n, z) - \sum_{j,i} (\ln |z - \omega_{j,i}^{(n)}| + \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}|) \right| &\leq \\ &\leq \text{const} N 2^{-\frac{N}{2}} \int_{D(0, 2^{N-1})} \frac{d\lambda(\omega)}{|z - \omega|^3} \leq \text{const} N 2^{-\frac{N}{2}} \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается сумма по  $n > N+1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+2}^{\infty} \left| \pi(\gamma_n, z) - \sum_{j,i} (\ln |z - \omega_{j,i}^{(n)}| + \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}|) \right| &\leq \\ &\leq \text{const} \int_{2^{N+2}}^{\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}} \ln t}{t^3} dt \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого  $z \notin E$  имеет место соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \pi(\gamma_n, z) - \sum_{j,i} (\ln |z - w_{j,i}^{(n)}| + \ln |z - \zeta_{j,i}^{(n)}|) \right| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_0(z) \ln \ln \rho_0(z).$$

Пусть  $u$  — положительно однородная субгармоническая функция и  $\mu$  — ее ассоциированная мера. По утверждениям п. 2°—4° существует система точек  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  такая, что если  $\mu_n$  — сужение меры  $\mu$  на кольцо  $K_n = \{2^n < |z| < 2^{n+1}\}$ , то вне множества  $E = \bigcup_k D(a_k, \varepsilon \rho_{\mu}(a_k) \ln^{-\frac{1}{5}} \rho_{\mu}(a_k))$  выполняется оценка

$$\sum_n \left| \pi(\mu_n, z) - \sum_{a_k \in K_n} \ln |z - a_k| \right| \leq \text{const} \ln^{\frac{4}{5}} \rho_0(z) \ln \ln \rho_0.$$

Представим функцию  $u(z)$  в виде

$$u(z) = \int_{D(0, 2^n)} \ln |z - w| d\mu(w) + H_n(z).$$

Тогда  $H_n$  гармонична в круге  $D(0, 2^n)$  и из равенства

$$\ln |f_n(z)| = \sum_{|a_k| \leq 2^n} \ln |z - a_k| + H_n(z)$$

можно определить функцию  $f_n$ , голоморфную в круге  $D(0, 2^n)$ . Нетрудно показать, что последовательность  $f_n$  равномерно ограничена на компактах и, тем самым, существует целая функция  $L$ , являющаяся равномерным пределом некоторой подпоследовательности  $f_{n_k}$ . Функция  $L$  удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

5°. Анализ условия (R). Как известно, любая ограниченная монотонная функция может быть представлена в виде суммы функции скачков, сингулярной функции и абсолютно непрерывной функции.

Если для меры  $d\mu = ds(\varphi) dr$  функция  $\rho_{\mu}$  удовлетворяет условию (R), то возможны следующие три взаимноисключающих случая.

1) Функция  $s$  является функцией конечного числа скачков. В этом случае функция  $\rho_{\mu}$  ограничена на  $\text{supp } \mu$ .

2) Функция  $s$  сингулярна. В этом случае функция  $\rho_{\mu}$  не ограничена и

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\rho_{\mu}(z)}{\sqrt{|z|}} = 0, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

3) Функция  $s$  абсолютно непрерывна, причем функция  $s$  удовлетворяет условию

$$0 < \delta_1 \leq \frac{s(\varphi + \varepsilon) - s(\varphi - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \delta_2 < \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad e^{i\varphi} \in \text{supp } \mu.$$

Функция  $\rho_{\mu}(z)$  в этом случае сравнима с  $\sqrt{|z|}$ :

$$0 < c_1 \leq \frac{\rho_{\mu}(z)}{\sqrt{|z|}} \leq c_2 < \infty, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

В п. 1а) доказано, что если  $\rho_{\mu}$  ограничена, то  $s$  — функция конечного числа скачков. Наоборот, если функция  $s$  имеет хотя бы один скачок, то  $\rho_{\mu}$  ограничена.

В п. 1б) доказано, что если  $\rho_\mu$  удовлетворяет условию (R), то имеет место неравенство

$$\rho_\mu(z) \leq \text{const} \sqrt{|z|}, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

Допустим, что на некоторой последовательности  $R_n \rightarrow \infty$

$$\frac{\rho_\mu(R_n)}{\sqrt{R_n}} \rightarrow 0.$$

По утверждению п. 1в) лебегова мера пересечения  $\text{supp } \mu$  с кольцом  $\{R_n < |z| < 2R_n\}$  не превосходит  $\text{const } R_n \rho_n^2$ , где  $\rho_n = \max \{\rho_\mu(z), |z| > R_n\}$ . Поэтому

$$\text{mes}(\text{supp } ds(\varphi)) R_n^2 \leq \text{const } R_n \rho_n^2,$$

где  $\text{mes } A$  означает линейную меру множества  $A \subset \mathbf{R}$ . Отсюда вытекает, что при нашем предположении имеет место оценка

$$\text{mes}(\text{supp } ds(\varphi)) \leq \text{const} \frac{\rho_n^2}{R_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом,  $\text{mes}(\text{supp } ds(\varphi)) = 0$  и функция  $s(\varphi)$  сингулярна.

Допустим, что

$$0 < c_1 \leq \frac{\rho_\mu(z)}{\sqrt{|z|}} \leq c_2 < \infty, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

Тогда по утверждению 1г) имеем соотношение

$$0 < \tilde{c}_1 \leq \frac{\tilde{\rho}_\mu(z)}{\sqrt{|z|}} \leq \tilde{c}_2 < \infty.$$

Заметим, что функция  $s(\varphi)$  в этом случае не имеет скачков. Поэтому функция  $\tilde{\rho}_\mu(Re^{i\varphi})$  при фиксированном  $\varphi$  непрерывна по  $R$ . Следовательно, для любого малого  $\varepsilon$  можно найти  $R = R(\varepsilon)$  так, что  $\tilde{\rho}_\mu(Re^{i\varphi})/2R = \varepsilon$ . Тогда по определению функции  $\tilde{\rho}_\mu$  имеем

$$s(\varphi + \varepsilon) - s(\varphi - \varepsilon) = \frac{1}{\tilde{\rho}_\mu(Re^{i\varphi})}$$

или

$$\frac{s(\varphi + \varepsilon) - s(\varphi - \varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{R}{(\tilde{\rho}_\mu(Re^{i\varphi}))^2}.$$

Отметим, что случай дискретной меры по сути рассмотрен в теореме А. В теореме Б в несколько более жестких условиях рассматривается случай регулярной меры. Эти случаи однозначны в смысле асимптотики функции  $\rho_\mu$ . В первом случае функция  $\rho_\mu$  сравнима с постоянной, во втором случае  $\rho_\mu$  сравнима с  $\sqrt{|z|}$ . В заключение параграфа приведем примеры, показывающие, что в смысле асимптотики  $\rho_\mu$  большое разнообразие дает случай сингулярной меры.

6°. Для любого  $\alpha \in (0, 1/2)$  существует сингулярная функция  $s(\varphi)$  такая, что для меры  $d\mu = ds(\varphi) dr$  функция  $\rho_\mu$  удовлетворяет условию (R), причем

$$0 < c_1 \leq \rho_\mu(z) |z|^{-\alpha} \leq c_2 < \infty, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

Воспользуемся схемой Кантора. Возьмем произвольное  $\beta \in (0, 1/2)$  и рассмотрим последовательность интервалов  $I_{i_1, \dots, i_n}$ ,  $i_j = 0, 1$ , построенную следующим образом:  $I_0 = (0, \beta)$ ,  $I_1 = (1 - \beta, 1)$ . Если  $I_{i_1, \dots, i_n}$  опреде-

лен, то  $I_{i_1, \dots, i_n, j}$  имеет длину равную  $\beta^{n+1}$ , причем левый конец интервала  $I_{i_1, \dots, i_n, 0}$  совпадает с левым концом интервала  $I_{i_1, \dots, i_n}$ , правый конец интервала  $I_{i_1, \dots, i_n, 1}$  совпадает с правым концом  $I_{i_1, \dots, i_n}$ .

Функцию  $s_n$  положим равной  $2^{-n}(i_1 2^{n-1} + i_2 2^{n-2} + \dots + i_{n-1} 2 + i_n)$  в интервале  $I_{i_1, \dots, i_n}$ , доопределим на интервал  $(0, 2\pi)$  по формуле

$$s_n(\varphi) = \max \{s_n(\theta), \theta < \varphi, \theta \in \cup I_{i_1, \dots, i_n}\}.$$

Тогда  $s_n$  — монотонно неубывающая, непрерывная справа функция. Очевидно, последовательность  $s_n$  не возрастает при увеличении  $n$ . Предельную функцию обозначим через  $s$ . Тогда  $s(0) = 0$ ,  $s(1) = 1$  и  $ds$ -мера интервала  $I_{i_1, \dots, i_n}$  равна  $2^{-n}$ .

Оценим функцию  $\rho_\mu$  для меры  $d\mu = ds(\varphi) dr$ . Пусть  $z = Re^{i\varphi} \in \text{supp } \mu$  и  $n = \ln R / \ln \frac{2}{\beta} - x$ , где  $n$  — целое число и  $x \in (0, 1)$ . Если  $\varphi \in I_{i_1, \dots, i_n}$ , то  $ds$ -мера интервала  $(\varphi - \beta^n, \varphi + \beta^n)$  не меньше, чем  $2^{-n}$ :

$$s(\varphi + \beta^n) - s(\varphi - \beta^n) \geq \frac{1}{2^n}.$$

Рассмотрим ячейку  $P$ , лежащую в пересечении угла между направлениями  $\varphi \pm \beta^n$  с кольцом  $D(0, R + 2\beta^n R) \setminus D(0, R)$  и содержащую точку  $Re^{i\varphi}$ . Тогда

$$\mu(P) = (s(\varphi + \beta^n) - s(\varphi - \beta^n)) 2\beta^n R^n \geq 2R \left(\frac{2}{\beta}\right)^{-n} \geq 2.$$

Отсюда, по определению  $\tilde{\rho}_\mu$  имеем оценку

$$\tilde{\rho}_\mu(Re^{i\varphi}) \leq 2R\beta^n \leq \text{const } R^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln \beta}}.$$

Рассмотрим ячейку  $P_1$ , лежащую в пересечении угла между направлениями  $\varphi \pm \beta^{n+3}$  с кольцом  $D(0, R + 2\beta^{n+3} R) \setminus D(0, R)$ . С интервалом  $(\varphi - \beta^{n+3}, \varphi + \beta^{n+3})$  может пересекаться не более двух интервалов вида  $I_{i_1, \dots, i_{n+3}}$ . Поэтому

$$s(\varphi + \beta^{n+3}) - s(\varphi - \beta^{n+3}) \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Следовательно, имеем оценку

$$\mu(P_1) \leq \frac{1}{2^{n+2}} 2\beta^{n+3} R = 2^{x-1} \beta^{3-x} < 1.$$

Отсюда имеем нижнюю оценку

$$\tilde{\rho}_\mu(z) \geq 2\beta^{n+3} R \geq \text{const } R^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln \beta}}.$$

Если  $\beta$  положим равным  $2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ , то функция  $\tilde{\rho}_\mu$  будет удовлетворять условию

$$\tilde{\rho}_\mu(z) \sim |z|^{-\alpha}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in \text{supp } \mu.$$

В заключение автор выражает глубокую признательность В. В. Напалкову за внимание к работе.

## Литература

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент для функций с заданным ростом вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. С. 1308—1328.
3. *Юсмухаметов Р. С.* Достаточные множества в одном пространстве целых функций// Матем. сб. 1981. Т. 116(158). С. 425—439.
4. *Юсмухаметов Р. С.* Приближение субгармонических функций// Матем. сб. 1984. Т. 124(168). С. 393—415.
5. *Любарский Ю. И., Содин М. Л.* Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. Препринт № 17. Харьков: ФТИНТ, 1986.
6. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Отдел физики и математики с ВЦ  
Башкирского филиала АН СССР  
Уфа

Поступила в редакцию  
18.III.1987