



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

F. A. Berezin, Laplace operators on semisimple Lie groups and on certain symmetric spaces, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, Volume 12, Issue 1, 152–156

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

February 14, 2025, 03:45:22



- [3] Ю. М. Березанский, О центре группового кольца компактной группы, ДАН 72, № 5 (1950).
- [4] Ю. М. Березанский, Гиперкомплексные системы с дискретным базисом, ДАН 81, № 3 (1951).
- [5] Ю. М. Березанский, К теории почти-периодических последовательностей Б. М. Левитана, ДАН 81, № 4 (1951).
- [6] Ю. М. Березанский, О теории почти-периодических функций относительно сдвига в гиперкомплексных системах, ДАН 85, № 1 (1952).
- [7] Ю. М. Березанский, О гиперкомплексных системах, построенных по уравнению Штурма—Лиувилля на полуоси, ДАН 91, № 6 (1953).
- [8] Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн, Гиперкомплексные системы с компактным базисом, Укр. матем. журн. 3, № 2 (1951).
- [9] Ю. М. Березанский, О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам, Укр. матем. журн. 3, № 4 (1951).
- [10] Ю. М. Березанский, Об обобщенных почти-периодических функциях и последовательностях, связанных с дифференциальными и разностными уравнениями, Матем. сб. 32 (74), № 1 (1953).

ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА НА ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ И НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ф. А. Березин

1. Определение операторов Лапласа. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ — однородное многообразие с группой движений \mathfrak{G} и стационарной подгруппой \mathfrak{G}_0 . В пространстве функций на \mathfrak{M} рассмотрим операторы T_g , задаваемые формулой

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x).$$

Большой интерес представляют дифференциальные операторы на \mathfrak{M} , перестановочные с операторами T_g . Эти операторы мы, следуя И. М. Гельфанду [1], называем *операторами Лапласа* на \mathfrak{M} .

Обозначим через $\overset{\circ}{R}$ множество функций на \mathfrak{M} , постоянных на подмногообразиях, транзитивных относительно стационарной подгруппы: если $f \in \overset{\circ}{R}$ и $g \in \mathfrak{G}_0$, то $f(gx) = f(x)$. Очевидно, что множество $\overset{\circ}{R}$ инвариантно для операторов Лапласа. Оператор, индуцированный в R оператором Лапласа Δ , мы называем *радиальной частью* оператора Δ и обозначаем его $\overset{\circ}{\Delta}$.

В настоящей работе вычисляются радиальные части операторов Лапласа для случая, когда многообразием является полупростая группа \mathfrak{G} , движения в \mathfrak{G} задаются формулой $g \rightarrow g_1^{-1}gg_2$, а также для некоторых симметрических пространств.

2. Описание радиальных частей операторов Лапласа. А. Радиальные части операторов Лапласа на компактной полупростой группе. Рассмотрим в качестве примера группу \mathfrak{U} унитарных унимодулярных матриц. Движения в \mathfrak{U} задаются формулой

$$u \rightarrow u_1^{-1}uu_2, \tag{1}$$

движения из стационарной подгруппы точки e (e — единичная матрица) — формулой

$$u \rightarrow u_1^{-1} u u_1. \tag{2}$$

Как известно, всякую унитарную матрицу можно преобразованиями (2) привести к диагональному виду, причем получающаяся диагональная матрица единственна с точностью до произвольной перестановки собственных значений. Поэтому функции из $\overset{\circ}{R}$, т. е. такие, что $f(u_1^{-1} u u_1) = f(u)$, зависят лишь от собственных значений $\varepsilon_p = e^{it_p}$ матрицы u .

Теорема 1. Пусть $P(t_1, \dots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда оператор

$$\overset{\circ}{\Delta}(P) = \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^n}\right) j(t), \tag{3}$$

где

$$j(t) = \prod_{p < q} (e^{it_p} - e^{it_q}),$$

является радиальной частью некоторого оператора Лапласа на \mathbb{U}^1 .

Обратно. Радиальная часть всякого оператора Лапласа на группе \mathbb{U} представима в виде (3).

Теорема 1 может быть обобщена на произвольные компактные полупростые группы [2].

В. Радиальные части операторов Лапласа на комплексной полупростой группе. Рассмотрим в качестве примера группу \mathbb{G} комплексных унитарных матриц. Как и выше, радиальные части операторов Лапласа являются дифференциальными операторами в пространстве функций, зависящих лишь от собственных значений, которые мы опять обозначим через $\varepsilon_p = e^{it_p}$ (числа t_p могут быть комплексными).

Теорема 2. Пусть $P(t_1, \dots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда операторы

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta}(P) &= \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^n}\right) j(t), \\ \overset{\circ}{\bar{\Delta}}(P) &= \frac{1}{\bar{j}(\bar{t})} P\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{t}^n}\right) \bar{j}(\bar{t}), \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

где $j(t) = \prod_{p < q} (e^{it_p} - e^{it_q})$, являются радиальными частями некоторых операторов Лапласа на \mathbb{G} .

Обратно. Радиальная часть всякого оператора Лапласа на \mathbb{G} представима в виде многочлена от операторов (4).

В случае произвольной комплексной полупростой группы имеет место аналогичная теорема [2]. Выражения для радиальных частей операторов Лапласа на вещественных полупростых группах несколько сложнее [2].

1) Оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)$, входящий в выражение (3), получен из многочлена $P(t_1, \dots, t_n)$ путем формальной замены t_k на $\frac{\partial}{\partial t_k}$.

С. Радиальные части операторов Лапласа на многообразии классов смежности комплексной полупростой группы по максимальной компактной подгруппе. Рассмотрим в качестве примера группу \mathfrak{G} комплексных унитарных матриц n -го порядка. Ее максимальной компактной подгруппой является группа \mathfrak{U} унитарных унитарных матриц n -го порядка. Многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ можно отождествить с многообразием V эрмитовых унитарных положительно определенных матриц n -го порядка с движениями

$$v \rightarrow g^*vg, \quad (5)$$

где g^* — матрица, эрмитово-сопряженная матрица g . При $g \in \mathfrak{U}$ формула (5) переходит в

$$v \rightarrow u^{-1}vu. \quad (6)$$

Как известно, преобразованиями (6) можно всякую эрмитову матрицу привести к диагональной форме. Поэтому функции из $\overset{\circ}{R}$, на которых определены радиальные части операторов Лапласа, зависят лишь от собственных значений матрицы v , которые мы обозначим $\varepsilon_p = e^{t_p}$.

Теорема 3. Пусть $P(t_1, \dots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда оператор

$$\overset{\circ}{\Delta}(P) = \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) j(t), \quad (7)$$

где

$$j(t) = \prod_{p < q} (e^{t_p} - e^{t_q}),$$

является радиальной частью некоторого оператора Лапласа на V .

Обратно. Радиальная часть всякого оператора Лапласа на V представима в виде (7).

Аналогичная теорема имеет место для многообразия классов смежности произвольной комплексной полупростой группы по максимальной компактной подгруппе [2].

Д. Радиальные части операторов Лапласа на некоторых симметрических многообразиях нулевой кривизны. Примером пространств рассматриваемого типа является многообразие W всех эрмитовых матриц n -го порядка со следом 0 и движениями

$$\omega \rightarrow u^{-1}\omega u + \omega_1, \quad (8)$$

где u — унитарная матрица. Группа унитарных матриц является, очевидно, стационарной подгруппой для точки 0. Преобразованиями из стационарной подгруппы

$$\omega \rightarrow u^{-1}\omega u$$

можно, как известно, привести эрмитову матрицу к диагональному виду. Поэтому радиальная часть оператора Лапласа является оператором в пространстве функций от вещественных переменных t_1, \dots, t_n — собственных значений эрмитовой матрицы.

Теорема 4. Пусть $P(t_1, \dots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда оператор

$$\overset{0}{\Delta}(P) = \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) j(t), \quad (9)$$

где

$$j(t) = \prod_{p < q} (t_p - t_q),$$

является радиальной частью некоторого оператора Лапласа на W .

Обратно. Радиальная часть всякого оператора Лапласа на W представима в виде (9).

Общее определение пространств рассматриваемого типа см. в [3]. Для всех этих пространств справедлива теорема, аналогичная теореме 4.

Радиальные части операторов Лапласа на многообразии унитарной группы с движениями (1), многообразии эрмитовых положительно определенных матриц с движениями (5) и многообразии эрмитовых матриц со следом 0 и движениями (8) весьма сходны между собой. Это сходство вызвано связью между самими пространствами. Благодаря этой связи аналогичное сходство имеется между всеми формулами, относящимися к сферическим функциям на указанных многообразиях [3], [4]. Тройку многообразий, связанных между собой так, как три перечисленные, мы называем *родственными*. Общее определение родственных симметрических пространств см. в [3].

3. Некоторые общие свойства операторов Лапласа. Пусть \mathfrak{M} — произвольное однородное многообразие, обладающее инвариантной аффинной связностью. Пусть ∇_k — составленные с помощью этой связности операторы ковариантного дифференцирования и $q^{i_1 \dots i_k}(x)$ — инвариантное симметрическое тензорное поле на \mathfrak{M} .

Теорема 5. Оператор

$$\nabla(q) = \sum_{i_1 \dots i_k} q^{i_1 \dots i_k} \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k} \quad (10)$$

является оператором Лапласа на \mathfrak{M} , причем всякий оператор Лапласа на \mathfrak{M} однозначно представим в виде суммы операторов (10).

Рассмотрим в алгебре Ли G группы движений многообразия \mathfrak{M} базис ξ_1, \dots, ξ_n . Образует ассоциативную алгебру $B(G)$ с образующими ξ_1, \dots, ξ_n и соотношениями

$$\xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i = \sum_k C_{ij}^k \xi_k,$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры G . Очевидно, что алгебра дифференциальных операторов на многообразии \mathfrak{M} , порожденная операторами Ли, служит представлением алгебры $B(G)$. В частности, элементам z центра Z алгебры $B(G)$ отвечают операторы $\Delta(z)$, перестановочные с операторами Ли, и следовательно, с движениями на G , т. е. операторы Лапласа.

Теорема 6. Если \mathfrak{M} есть симметрическое пространство с полупростой группой движений, то операторами $\Delta(z)$ исчерпываются все операторы Лапласа на \mathfrak{M} .

Аналогичная теорема верна для симметрических многообразий нулевой кривизны, родственных симметрическим пространствам с полупростой группой движений.

Как показывают примеры, теорема 6 не может быть обобщена на произвольные однородные многообразия.

Из теоремы 6 вытекает важное следствие: *операторы Лапласа на перечисленных в теореме 6 многообразиях перестановочны между собой.* Действительно, по своему определению оператор Лапласа перестановочен со сдвигами, а значит с операторами Ли, следовательно, с многочленами от операторов Ли. Оператор же $\Delta(z)$ сам, очевидно, является многочленом от операторов Ли.

4. Применение операторов Лапласа. Значение операторов Лапласа для теории представлений связано с тем, что сферические функции являются собственными для этих операторов [1], [2], [5]. В частности, зональные сферические функции на однородных многообразиях являются собственными для радиальных частей операторов Лапласа. Решая, в частности, соответствующие дифференциальные уравнения, можно вычислить зональные сферические функции на полупростых группах (рассматриваемых как однородные многообразия относительно движений $g \rightarrow g_1^{-1}gg_2$), пространствах классов смежности комплексной полупростой группы по максимальной компактной и на многообразиях, аналогичных пространству эрмитовых матриц со следом 0 ([2], [3], [6]).

Отметим, что в первом случае зональными сферическими функциями являются характеры неприводимых представлений группы. Одновременно с их вычислением удается дать описание всех, с точностью до эквивалентности, неприводимых представлений полупростых групп в нормированных пространствах.

Для компактных и комплексных полупростых групп это проделано в [2], [6].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М. Гельфанд, Сферические функции на симметрических римановых многообразиях, ДАН 50, № 1 (1950).
- [2] Ф. А. Березин, Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, ДАН 107, № 1 (1956).
- [3] Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Моск. матем. о-ва 5 (1956).
- [4] Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, М. А. Наймарк, Представление групп, УМН XI, вып. 6 (1956), 13—40.
- [5] E. Cartan, Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rend. Circ. matem. Palermo 53 (1929), 217.
- [6] Ф. А. Березин, Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве, ДАН 110, № 6 (1956).
- [7] И. М. Гельфанд, Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. 16 (58): 1 (1950).
- [8] Harich-Chandra, On some application of the universal envelopping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 70, № 1 (1950), 28—47.