

## БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

П. Е. Марков

В работе [1] доказано, что всякая невырожденная  $n$ -мерная поверхность  $(n(n+3)/2+1)$ -мерного евклидова пространства является нежесткой в этом пространстве. С другой стороны, в работах [2] — [6] установлен ряд признаков жесткости гиперповерхностей в евклидовом и римановом пространствах. В настоящей заметке мы покажем, что случаи жесткости возможны и для  $n$ -мерных поверхностей и  $m$ -мерном плоском (евклидовом или псевдоевклидовом) пространстве при  $n+1 < m < n(n+3)/2+1$ . При этом мы ограничимся рассмотрением поверхностей, представимых в виде риманова произведения конечного числа гиперповерхностей плоских пространств.

**§ 1. Формулировка результата.** 1. Рассмотрим в плоском  $m$ -мерном пространстве  $S_m$   $n$ -мерную поверхность  $F_n$  ( $1 \leq n < m$ ) класса  $C^3$ , заданную уравнением  $r = r(x^1, \dots, x^n)$ . Будем считать, что дискриминант метрической формы  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) этой поверхности отличен от нуля. Предположим, что начиная с некоторого момента времени  $t=0$  поверхность  $F_n$  деформируется, переходя при  $t \geq 0$  в поверхность  $F_n^t$ , задаваемую уравнением  $r^t = r^t(x^1, \dots, x^n)$  ( $r^0 \equiv r$ ). Каждая величина  $A$  на  $F_n$  перейдет при этом в некоторую величину  $A^t$  на  $F_n^t$ . Величину  $\delta A \equiv (dA^t/dt)_{t=0}$  называют вариацией величины  $A$ . Мы будем рассматривать только такие деформации, при которых вариация длины каждой дуги на  $F_n$  равна нулю. В этом случае поле  $\delta r$  называется изги-

бающим полем поверхности  $F_n$ . По изгибающему полю деформация поверхности  $F_n$  определяется с точностью до членов второго порядка относительно  $t$  формулой  $r^i = r + t\delta r + t^2 z$ .

Будем называть две деформации поверхности  $F_n$  эквивалентными, если изгибающие поля, соответствующие этим деформациям, совпадают. Класс эквивалентных деформаций называется бесконечно малым (б. м.) изгибанием поверхности  $F_n$  в пространстве  $S_m$ . Б. м. изгибание  $F_n$  в  $S_m$  называется тривиальным, если соответствующее изгибающее поле имеет вид  $\delta r = \Omega r + \omega$ , где  $\Omega$  — произвольный постоянный бивектор в  $S_m$ ,  $\omega$  — произвольный постоянный вектор, а  $\Omega r$  — внутреннее произведение бивектора  $\Omega$  на вектор  $r$  [7, стр. 15]. Аналогичное определение тривиального б. м. изгибания приведено в [1]. Поверхность  $F_n$  называют жесткой в  $S_m$ , если каждое ее б. м. изгибание тривиально.

2. Пусть  $S_{n_1+1}^{(1)}$  и  $S_{n_2+1}^{(2)}$  — плоские пространства размерностей  $n_1 + 1$  и  $n_2 + 1$  соответственно. В прямом произведении  $S_{n_1+1}^{(1)} \times S_{n_2+1}^{(2)}$  введем ортонормированную систему координат  $Oy^1 \dots y^{n_1+n_2+2}$  так, чтобы оси  $Oy^{\alpha_1}$  ( $\alpha_1 = 1, 2, \dots, n_1 + 1$ ) принадлежали пространству  $S_{n_1+1}^{(1)}$ , а оси  $Oy^{n_1+1+\alpha_2}$  ( $\alpha_2 = 1, 2, \dots, n_2 + 1$ ) — пространству  $S_{n_2+1}^{(2)}$ . Рассмотрим в  $S_{n_1+1}^{(1)}$  и  $S_{n_2+1}^{(2)}$  гиперповерхности  $F_{n_1}^{(1)}$  и  $F_{n_2}^{(2)}$ , заданные соответственно уравнениями

$$y^{\alpha_1} = y^{\alpha_1}(x^1, \dots, x^{n_1}), \quad \alpha_1 = 1, 2, \dots, n_1 + 1, \quad (1)$$

$$y^{n_1+1+\alpha_2} = y^{n_1+1+\alpha_2}(x^{n_1+1}, \dots, x^{n_1+n_2}),$$

$$\alpha_2 = 1, 2, \dots, n_2 + 1. \quad (2)$$

Римановым произведением поверхностей  $F_{n_1}^{(1)}$  и  $F_{n_2}^{(2)}$  называется  $(n_1 + n_2)$ -мерная поверхность  $F_{n_1}^{(1)} \times F_{n_2}^{(2)}$  пространства  $S_{n_1+1}^{(1)} \times S_{n_2+1}^{(2)}$ , заданная в этом пространстве уравнениями (1), (2).

Если  $S_{n_\tau+1}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ) — плоские пространства размерностей  $n_\tau + 1$  и  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$  — гиперповерхность в  $S_{n_\tau+1}^{(\tau)}$ , то риманово произведение поверхностей  $F_{n_1}^{(1)}, F_{n_2}^{(2)}, \dots, F_{n_p}^{(p)}$  определяется формулой

$$F_{n_1}^{(1)} \times F_{n_2}^{(2)} \times \dots \times F_{n_p}^{(p)} = (F_{n_1}^{(1)} \times F_{n_2}^{(2)} \times \dots \times F_{n_{p-1}}^{(p-1)}) \times F_{n_p}^{(p)}.$$

Относительно каждой из поверхностей  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ) всюду будем предполагать, что в каждой ее точке существует хотя бы одно двумерное направление, определяемое линиями кривизны, по которому внутренняя кривизна поверхности отлична от нуля.

Обозначим  $\sum_{\tau=1}^p n_\tau = v_p$  и рассмотрим  $v_p$ -мерную поверхность  $F_{v_p} = F_{n_1}^{(1)} \times \dots \times F_{n_p}^{(p)}$  в пространстве  $S_{v_p+p} = S_{n_1+1}^{(1)} \times \dots \times S_{n_p+1}^{(p)}$ .

**ТЕОРЕМА А.** Если каждая из поверхностей  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$  жестка в  $S_{n_\tau+1}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ), то поверхность  $F_{v_p}$  жестка в  $S_{v_p+p}$ .

**С л е д с т в и е 1.** Для любого целого числа  $p \geq 1$  можно указать плоское пространство, в котором существует жесткая поверхность коразмерности  $p$ .

**§ 2. Основная система уравнений.** 1. Доказательство теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе, опирается на исследование связи решений линеаризованной системы уравнений Гаусса — Кодацци — Риччи с изгибающими полями поверхности. Изучению этой связи посвящен данный параграф.

2. Рассмотрим произвольную поверхность  $F_n$  в  $S_m$ . Пусть  $n_1, n_2, \dots, n_p$  ( $p = m - n$ ) — система неизотропных попарно ортогональных нормалей класса  $C^2$  этой поверхности (существование таких нормалей вытекает из рассуждений книги [8, стр. 176]). Разложение ковариантных производных  $r_{,ij}, n_{\sigma j, i}$  по векторам  $r_{,1}, r_{,2}, \dots, r_{,n}, n_1, n_2, \dots, n_p$  приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена:

$$\begin{cases} r_{,ij} = \sum_{\sigma=1}^p e_\sigma b_{\sigma|ij} n_\sigma, \\ n_{\sigma j, i} = -g^{kl} b_{\sigma|ki} r_{,l} + \sum_{\tau=1}^p e_\tau \mu_{\tau\sigma|i} n_\tau, \end{cases} \quad (3)$$

где  $e_\sigma = n_\sigma^2 = \pm 1$ ;  $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$ ;  $\sigma = 1, 2, \dots, p$ ;  $b_{\sigma|ij}, \mu_{\tau\sigma|i}$  — коэффициенты, удовлетворяющие условиям  $b_{\sigma|ij} = b_{\sigma|ji}, \mu_{\tau\sigma|i} = -\mu_{\sigma\tau|i}$ .

Варьируя равенства  $g_{ij} = r_{,i} r_{,j}$  и учитывая, что  $\delta g_{ij} = 0$ , получим следующую систему уравнений для изгибающего поля:

$$r_{,i} \delta r_{,j} + \delta r_{,i} r_{,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

3. Основной системой будем называть систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\sigma=1}^p e_{\sigma} (t_{\sigma|ik} b_{\sigma|i,l} - t_{\sigma|i} b_{\sigma|jk} + b_{\sigma|ik} t_{\sigma|jl} - b_{\sigma|i} t_{\sigma|jk}) = 0, \\ t_{\sigma|i,i,k} - t_{\sigma|ik,j} = \sum_{\rho=1}^p (t_{\rho|ij} \mu_{\rho\sigma|k} - t_{\rho|ik} \mu_{\rho\sigma|j} + \\ \qquad \qquad \qquad + b_{\rho|ij} \varepsilon_{\rho\sigma|k} - b_{\rho|ik} \varepsilon_{\rho\sigma|j}), \quad (5) \\ \varepsilon_{\rho\sigma|i,j} - \varepsilon_{\rho\sigma|i,i} = \\ \qquad \qquad \qquad = g^{kl} (t_{\rho|ik} b_{\sigma|jl} - t_{\rho|jk} b_{\sigma|il} + b_{\rho|ik} t_{\sigma|i,l} - b_{\rho|jk} t_{\sigma|i,i}) + \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_{\chi=1}^p (\varepsilon_{\chi\rho|i} \mu_{\chi\sigma|j} - \varepsilon_{\chi\rho|j} \mu_{\chi\sigma|i} + \mu_{\chi\rho|i} \varepsilon_{\chi\sigma|j} - \mu_{\chi\rho|j} \varepsilon_{\chi\sigma|i}), \end{array} \right.$$

где  $t_{\sigma|ij} = t_{\sigma|ji}$  и  $\varepsilon_{\rho\sigma|i} = -\varepsilon_{\sigma\rho|i}$  — неизвестные тензоры;  $\rho, \sigma = 1, \dots, p$ ;  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . Система (5) может быть получена варьированием уравнений Гаусса — Кодацци — Риччи (см. [8, стр. 228]). Следовательно, этой системе всегда удовлетворяют тензоры  $\delta b_{\sigma|ij}$ ,  $\delta \mu_{\tau\sigma|i}$ , так что каждому изгибающему полю поверхности  $F_n$  соответствует единственное решение системы (5). Имеет место

**ТЕОРЕМА 1.** *Если поверхность  $F_n$  односвязна, то каждому решению основной системы соответствует единственное (с точностью до тривиального) изгибающее поле поверхности  $F_n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $t_{\sigma|ki}$ ,  $\varepsilon_{\rho\sigma|i}$  — произвольное решение системы (5). Рассмотрим на  $F_n$  поля бивекторов

$$\begin{aligned} V_i = \sum_{\sigma=1}^p e_{\sigma} g^{kl} t_{\sigma|ki} r_{,l} \wedge n_{\sigma} + \\ + (1/2) \sum_{\tau, \sigma=1}^p e_{\tau} e_{\sigma} \varepsilon_{\tau\sigma|i} n_{\tau} \wedge n_{\sigma}. \quad (6) \end{aligned}$$

Путем несложных вычислений с использованием формул (3) и системы (5) нетрудно показать, что  $V_{i,j} = V_{j,i}$ . Следовательно, на  $F_n$  существует поле бивекторов  $V$  такое, что  $V_{,i} = V_i$ . Поле  $V$  определяется полями  $V_i$  с точностью до произвольного постоянного бивектора  $\Omega$ . Положим  $U_i = V \cdot r_{,i}$ . Из (6) получаем:  $u_{i,j} - u_{j,i} = v_{,j} r_{,i} - V_{,i} r_{,j} = 0$ . Следовательно, на  $F_n$  существует поле векторов  $\delta r$  такое, что  $\delta r_{,i} = u_i$ . Поле  $\delta r$  удовлетворяет системе (4) и, значит, является изгибающим. Поле  $\delta r$  определяется полем бивектора  $V$  с точностью до произвольного постоянного вектора  $\omega$ . Теорема доказана.

4. Система (5) всегда допускает решения вида

$$\begin{cases} t_{\sigma|ij} = \sum_{\tau=1}^p e_{\tau} \varphi_{\tau\sigma} b_{\tau|ij}, \\ \varepsilon_{\tau\sigma|i} = \varphi_{\tau\sigma|i} + \sum_{\rho=1}^p e_{\rho} (\varphi_{\rho\tau} \mu_{\rho\sigma|i} - \varphi_{\rho\sigma} \mu_{\rho\tau|i}), \end{cases} \quad (7)$$

где  $\{\varphi_{\tau\sigma}\}_{\tau, \sigma=1}^p$  — семейство произвольных скалярных функций на  $F_n$ , таких, что  $\varphi_{\tau\sigma} = -\varphi_{\sigma\tau}$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Если каждое решение основной системы имеет вид (7), то поверхность  $F_n$  является жесткой.

**Доказательство.** Для доказательства этой теоремы покажем, что в рассматриваемом случае всякое изгибающее поле поверхности  $F_n$  тривиально в каждой односвязной окрестности  $\Phi_n$ . Действительно, в условиях теоремы 2 равенства (6) принимают вид

$$\begin{aligned} V_{,i} = & \sum_{\tau, \sigma=1}^p e_{\tau} e_{\sigma} \varphi_{\tau\sigma} g^{kl} b_{\tau|ki} r_{,l} \wedge n_{\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\tau, \sigma, \rho=1}^p e_{\tau} e_{\sigma} e_{\rho} (\varphi_{\rho\tau} \mu_{\rho\sigma|i} - \varphi_{\rho\sigma} \mu_{\rho\tau|i}) n_{\tau} \wedge n_{\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\tau, \sigma=1}^p e_{\tau} e_{\sigma} \varphi_{\tau\sigma|i} n_{\tau} \wedge n_{\sigma}. \end{aligned}$$

С помощью (3) отсюда находим

$$V_{,i} = - (1/2) \sum_{\tau, \sigma=1}^p e_{\tau} e_{\sigma} (\varphi_{\tau\sigma} n_{\tau} \wedge n_{\sigma})_{,i}.$$

Следовательно, на  $\Phi_n$  имеем

$$V = \Omega - (1/2) \sum_{\tau, \sigma=1}^p e_{\tau} e_{\sigma} \varphi_{\tau\sigma} n_{\tau} \wedge n_{\sigma}.$$

Отсюда, учитывая, что  $(n_{\tau} \wedge n_{\sigma}) r_{,i} = 0$ , для полей  $u$  получаем:  $u_i = \Omega r_{,i}$ . Отсюда вытекает, что изгибающее поле  $\delta r$  имеет вид  $\delta r = \Omega r + \omega$ . Теорема доказана.

**§ 3. Доказательство утверждений, сформулированных в § 1.** 1. Поверхность  $F_{v_p}$  в  $S_{v_p+p}$  можно задать уравнениями

$$y^{v_{\tau-1}+k_{\tau}+\tau-1} = y^{v_{\tau-1}+k_{\tau}+\tau-1} (x^{v_{\tau+1}+1}, x^{v_{\tau-1}+2}, \dots, x^{v_{\tau}}),$$

где  $\tau = 1, 2, \dots, p$ ;  $k_{\tau} = 1, 2, \dots, n_{\tau} + 1$ ;  $v_{\tau} = \sum_{j=1}^{\tau} n_j$ ;  $v_0 = 0$ . При фиксированном значении индекса  $\tau$  эти уравнения представляют поверхность  $F_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  в  $S_{n_{\tau+1}}^{(\tau)}$ . Отсюда для метрического тензора  $g_{kl}(x^1, \dots, x^{v_p})$  ( $k, l = 1, 2, \dots, v_p$ )

поверхности  $F_{v_p}$  получаем:

$$g_{kl} = \begin{cases} g_{kl}^{(\tau)}(x^{v_{\tau-1}+1}, \dots, x^{v_\tau}), & k, l \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \\ 0, & k \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \quad l \notin [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \end{cases} \quad (8)$$

где  $g_{kl}^{(\tau)}$  — метрический тензор поверхности  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, p$ .

Покажем, что аналогичные равенства имеют место и для контравариантного метрического тензора  $g^{kl}(x^1, \dots, x^{v_p})$ . Действительно, тензор  $g^{kl}$  определяется системой уравнений

$$g^{kl}g_{lj} = \delta_j^k, \quad j, k, l = 1, 2, \dots, v_p. \quad (9)$$

При  $j, k, l \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$  эта система однозначно определяет контравариантный метрический тензор  $g^{kl}(x^{v_{\tau-1}+1}, x^{v_{\tau-1}+2}, \dots, x^{v_\tau})$  поверхности  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ . Пусть  $j \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$ ,  $k \notin [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$ . Тогда система (9) имеет вид  $g^{kl}g_{lj}^{(\tau)} = 0$  ( $\tau = 1, \dots, p$ ). При каждом фиксированном индексе  $k$  имеем систему  $n_\tau$  однородных линейных уравнений относительно  $n_\tau$  неизвестных  $g^{kl}$ . Отсюда получаем:  $g^{kl} = 0$  ( $k \notin [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$ ,  $l \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$ ). Таким образом, равенства (8) будут справедливы, если в них тензор  $g_{kl}$  заменить на тензор  $g^{kl}$ .

Для символов Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k$  ( $i, j, k, l = 1, 2, \dots, v_p$ ) теперь получаем

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{cases} \Gamma_{ij}^k(x^{v_{\tau-1}+1}, x^{v_{\tau-1}+2}, \dots, x^{v_\tau}), & i, j, k \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \\ 0, & k \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \quad i \notin [v_{\tau-1} + 1, v_\tau] \text{ или} \\ & k \notin [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \quad i \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau], \end{cases}$$

где  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля поверхности  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ).

Следовательно, если через  $\nabla_k^{(\tau)}$  обозначить оператор ковариантного дифференцирования по  $x^k$  относительно метрического тензора  $g_{ij}^{(\tau)}$  ( $i, j, k \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, p$ ) а через  $(\cdot)_{,k}$  — ковариантную производную по  $x^k$  относительно тензора  $g_{ij}$  на  $F_{v_p}$ , то для любого тензора  $T_{jl}^i$  на  $F_{v_p}$  при  $i, j, l \in [v_{\tau-1} + 1, v_\tau]$  будем иметь

$$T_{jl,k}^i = \nabla_k^{(\tau)} T_{jl}^i. \quad (10)$$

2. Пусть  $n^{v_{\tau-1+k\tau+1}} (x^{v_{\tau-1+1}}, x^{v_{\tau-1+2}}, \dots, x^{v_{\tau}})$  ( $k=1, 2, \dots, n_{\tau} - 1$ ) — компоненты нормали поверхности  $F_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  в  $S_{n_{\tau+1}}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ); положим

$$n_{\tau} = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{v_{\tau-1+\tau-1}}, n^{v_{\tau-1+\tau}}, n^{v_{\tau-1+\tau+1}}, \dots, n^{v_{\tau+\tau}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{v_p - v_{\tau} - \tau + p} \}$$

( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ). Получим  $p$  попарно ортогональных неизотропных векторов в  $S_{v_p+p}$  класса  $C^2$ , ортогональных векторам  $r_{\cdot 1}, r_{\cdot 2}, \dots, r_{\cdot v_p}$ . Примем векторы  $n_{\tau}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ) в качестве нормалей поверхности  $F_{v_p}$  в  $S_{v_p+p}$ . Относительно этих нормалей получаем

$$\begin{cases} \mu_{\tau\sigma|i} = 0, \\ b_{\tau|ij} = \begin{cases} b_{ij}^{(\tau)} (x^{v_{\tau-1+1}}, x^{v_{\tau-1+2}}, \dots, x^{v_{\tau}}), & i, j \in [v_{\tau-1} + 1, v_{\tau}], \\ 0, & i \text{ или } j \notin [v_{\tau-1} + 1, v_{\tau}], \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

где  $b_{ij}^{(\tau)}$  — коэффициенты, фигурирующие в (3) для поверхности  $F_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  в  $S_{n_{\tau+1}}^{(\tau)}$ ;  $\tau, \sigma = 1, 2, \dots, p$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, v_p$ .

3. Рассмотрим основную систему для поверхности  $F_{v_p}$ . В силу формул (10) и (11) при  $i, j, k, l \in [v_{\tau-1} + 1, v_{\tau}]$  из первых двух равенств этой системы получаем

$$\begin{cases} t_{\tau|ik} b_{jl}^{(\tau)} - t_{\tau|ij} b_{jk}^{(\tau)} + b_{ik}^{(\tau)} t_{\tau|jl} - b_{il}^{(\tau)} t_{\tau|jk} = 0, \\ \nabla_k^{(\tau)} t_{\tau|ij} - \nabla_j^{(\tau)} t_{\tau|ik} = 0 \end{cases}$$

( $\tau = 1, 2, \dots, p$ , по  $\tau$  не суммировать). При каждом фиксированном значении индекса  $\tau$  имеем основную систему для поверхности  $F_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  в  $S_{n_{\tau+1}}^{(\tau)}$ . Так как поверхность  $F_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  односвязна и жестка в  $S_{n_{\tau+1}}^{(\tau)}$ , то в силу теорем 1 и 2 эта система имеет только нулевое решение. Следовательно, получаем

$$t_{\tau|ij} = 0, \quad i, j \in [v_{\tau-1} + 1, v_{\tau}] \quad (\tau = 1, 2, \dots, p). \quad (12)$$

4. Дальнейшие рассуждения носят локальный характер. На каждой из поверхностей  $F_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  рассмотрим произвольную окрестность  $\Phi_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ). Этим окрестностям соответствует окрестность  $\Phi_{v_p} = \prod_{\tau=1}^p \Phi_{n_{\tau}}^{(\tau)}$  на  $F_{v_p}$ . Докажем, что при условии (12)  $\Phi_{v_p}$  жестка в  $S_{v_p+p}$ . Пусть  $t_{\tau|ij}, \varepsilon_{\tau\sigma|ij}$  — произвольное решение системы (5)

на  $\Phi_{v_p}$ . Положим

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{\tau|ij} &= t_{\tau|ij} - \sum_{\sigma=1}^p e_{\sigma} \varphi_{\sigma\tau} b_{\sigma|ij}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|i} &= \varepsilon_{\tau\sigma|i} - \varphi_{\tau\sigma|i},\end{aligned}$$

( $\tau, \sigma = 1, 2, \dots, p, i, j = 1, 2, \dots, v_p$ ). Для любых скалярных функций  $\varphi_{\tau\sigma} = -\varphi_{\sigma\tau}$  тензоры  $\tilde{t}_{\tau|ij}, \tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|i}$  удовлетворяют системе (5). При этом в силу (11) и (12) имеем

$$\tilde{t}_{\tau|ij} = 0, \quad i, j \in [v_{\tau-1} + 1, v_{\tau}], \quad \tau = 1, 2, \dots, p.$$

Выберем функции  $\varphi_{\tau\sigma}$  следующим образом. В каждой из окрестностей  $\Phi_{n_{\tau}^{(\tau)}}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p$ ) зафиксируем параметризацию  $\tilde{x}^{v_{\tau-1}+1}, \dots, \tilde{x}^{v_{\tau}}$ , сопряженную относительно второй основной формы этой окрестности в  $S_{n_{\tau}^{(\tau)}}$ . В этой параметризации имеем  $b_{\tau|ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Так как в каждой точке на  $F_{n_{\tau}^{(\tau)}}$  существует двумерное направление, определяемое линиями кривизны, по которому внутренняя кривизна отлична от нуля, то можно считать, что  $b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} \neq 0, \tau = 1, 2, \dots, p$ . В параметризации  $\tilde{x}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, v_p$ ) положим

$$\varphi_{\tau\sigma} = -\varphi_{\sigma\tau} = e_{\tau} \frac{t_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1}}{b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1}}, \quad \varphi_{\sigma\sigma} = 0,$$

$\tau, \sigma = 1, 2, \dots, p, \tau < \sigma$ . Значения функций  $\varphi_{\tau\sigma}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^{v_p})$  припишем точкам окрестности  $\Phi_{v_p}$ . Получим  $p(p-1)/2$  скалярных функций на  $\Phi_{v_p}$ . Покажем, что  $\tilde{t}_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} = 0$  при  $\tau < \sigma$  ( $\tau, \sigma = 1, 2, \dots, p$ ). Действительно, из определения тензоров  $\tilde{t}_{\sigma|ij}$ , учитывая, что  $b_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} = 0$  при  $\sigma \neq \tau$ , находим

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} &= t_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} - e_{\tau} \varphi_{\tau\sigma} b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} = \\ &= t_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} - \frac{t_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1}}{b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1}} \cdot b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} = 0.\end{aligned}$$

Положим в первом равенстве системы (5)  $j = l = v_{\tau-1} + 1$ . Учитывая только отличные от нуля слагаемые, будем иметь

$$e_{\tau} b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} \cdot \tilde{t}_{\tau|ik} + \sum_{j=1}^{\tau-1} e_{\tau} b_{\tau|ik} \tilde{t}_{\sigma|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} = 0 \quad (13)$$

$(i, k = 1, 2, \dots, v_p, \tau = 1, 2, \dots, p)$ . При  $\tau = 1$  имеем  $b_{1|11} \cdot \tilde{t}_{1|ik} = 0$ , откуда следует, что  $\tilde{t}_{1|ik} = 0$  ( $i, k = 1, \dots, v_p$ ). Далее, по индукции предположим, что  $\tilde{t}_{\tau|ik} = 0$  и докажем, что  $\tilde{t}_{\tau+1|ik} = 0$  ( $\tau = 1, 2, \dots, p-1, i, k = 1, 2, \dots, v_p$ ). Действительно, при сделанном предположении из (13) получаем  $b_{\tau+1|v_{\tau+1}, v_{\tau+1}} \cdot \tilde{t}_{\tau+1|ik} = 0$ . Отсюда следует, что  $\tilde{t}_{\tau+1|ik} = 0$ .

Таким образом, мы доказали, что  $\tilde{t}_{\tau|ik} = 0$  при  $\tau = 1, 2, \dots, p, i, k = 1, 2, \dots, v_p$ . Полагая теперь во втором равенстве системы (5)  $i = j = v_{\tau-1} + 1$  и учитывая только отличные от нуля слагаемые, будем иметь  $b_{\tau|v_{\tau-1}+1, v_{\tau-1}+1} \cdot \tilde{e}_{\tau\sigma|k} = 0, k \neq v_{\tau-1} + 1, k = 1, \dots, v_p, \tau, \sigma = 1, \dots, p$ . Отсюда следует, что  $\tilde{e}_{\tau\sigma|k} = 0$  при  $k \neq v_{\tau-1} + 1$ . Так как  $\tilde{e}_{\tau\sigma|k} = 0$  при  $\tau = \sigma$ , то при  $k = v_{\tau-1} + 1$  можно считать, что  $k \neq v_{\sigma-1} + 1$  и, следовательно,

$$\tilde{e}_{\tau\sigma|v_{\tau-1}+1} = -\tilde{e}_{\sigma\tau|v_{\tau-1}+1} = 0.$$

Таким образом, имеем:  $\tilde{t}_{\sigma|ij} = 0, \tilde{e}_{\tau\sigma|i} = 0$  ( $\tau, \sigma = 1, \dots, p, i, j = 1, \dots, v_p$ ). Отсюда в силу определения тензоров  $\tilde{t}_{\sigma|ij}, \tilde{e}_{\tau\sigma|i}$  вытекает, что всякое решение  $t_{\sigma|ij}, e_{\tau\sigma|i}$  системы (5) для поверхности  $F_{v_p}$  имеет вид (7). По теореме 2 это означает жесткость поверхности  $F_{v_p}$ .

5. Сформулированное в § 1 следствие вытекает из доказанной теоремы в силу произвола в выборе числа  $p$  и из наличия в каждом  $S_{n+1}$  жесткой гиперповерхности (см. ниже теорему Б).

**§ 4. О жесткости гиперповерхностей.** 1. Известно, что всякая гиперповерхность  $F_n$  пространства  $S_{n+1}$  неизгибаема при условии, что в каждой ее точке существует хотя бы два двумерных направления, определяемых линиями кривизны, по которым внутренняя кривизна поверхности отлична от нуля [8]. В данном параграфе мы докажем аналогичное утверждение для б. м. изгибаний.

2. **О п р е д е л е н и е.** Поверхность  $F_n$  называется локально жесткой в пространстве  $S_m$ , если всякая окрестность каждой точки на  $F_n$  является жесткой поверхностью в  $S_m$ .

**ТЕОРЕМА Б.** Если в каждой точке гиперповерхности  $F_n$  ( $n \geq 3$ ) пространства  $S_{n+1}$  существует хотя бы два двумерных направления, определяемых линиями кривизны, по которым внутренняя кривизна поверхности отлична от нуля, то поверхность  $F_n$  локально жестка в  $S_{n+1}$ .

Доказательство. В рассматриваемом случае система (5) принимает вид

$$\begin{cases} b_{ik}t_{jl} - b_{il}t_{jk} + b_{jl}t_{ik} - b_{jk}t_{il} = 0, \\ t_{ij,k} - t_{ik,j} = 0, \end{cases}$$

где  $b_{ik}$  — коэффициенты второй основной формы поверхности  $F_n$ , причем  $\text{rang} \| b_{ik} \| \geq 3$ . Пусть  $M$  — произвольная точка на  $F_n$ . Систему координат  $x^i$  можно считать такой, что в точке  $M$   $b_{11} \neq 0$ ,  $b_{22} \neq 0$ ,  $b_{33} \neq 0$ ,  $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$ . В этом случае из первого уравнения системы (14) получаем

$$\begin{cases} b_{11}t_{22} + b_{22}t_{11} = 0, \\ b_{22}t_{33} + b_{33}t_{22} = 0, \\ b_{11}t_{33} + b_{33}t_{11} = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы  $2b_{11}b_{22}b_{33} \neq 0$ , следовательно,  $t_{11} = t_{22} = t_{33} = 0$ .

Полагая в первом равенстве системы (14)  $i = k = 1$ ,  $j = 2$ ,  $l = 3$ , затем  $i = k = 2$ ,  $j = 3$ ,  $l = 1$ , наконец,  $i = k = 3$ ,  $j = 1$ ,  $l = 2$ , получим, что  $t_{ij} = 0$  при  $i, j = 1, 2, 3$ . Полагая в том же равенстве  $i = k = 1$ ,  $j = 2$ , будем иметь, что  $t_{2l} = 0$ ,  $l = 1, \dots, n$ . Положим теперь  $i = k = 2$ , будем иметь  $b_{22}t_{jl} = 0$ . Отсюда вытекает, что  $t_{jl} = 0$  ( $j, l = 1, \dots, n$ ). По теореме 2 это означает жесткость поверхности  $F_n$ . Теорема доказана.

3. Из доказательства теорем А и Б вытекает

*С л е д с т в и е 2. Если каждая из поверхностей  $F_{n_\tau}^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, \dots, p$ ) имеет размерность  $n_\tau \geq 3$ , и в каждой ее точке существует два двумерных направления ненулевой внутренней кривизны, определенных линиями кривизны, то поверхность  $F_p$  локально жестка в  $S_{v,p+r}$ .*

Таганрогский государственный  
педагогический институт

Поступило  
24.X.1977

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Я с о б w i t z Н., Implicit function theorems and isometric embeddings, Ann. Math., 95, № 2 (1972), 191—225.  
[2] Л и з у н о в а Л. Ю., О бесконечно малых изгибаниях гиперповерхностей в римановом пространстве, Изв. вузов, Математика, № 3 (1970) 36—42.

- [3] Сенькин Е. П., Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых поверхностей», Укр. геом. сб., 17, Харьков, 1974, 132—134.
- [4] Горзий Т. А., Жесткость выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства, Укр. геом. сб., 3, Харьков, 1973, 66—68.
- [5] Горзий Т. А., О локальной неизгибаемости выпуклых поверхностей эллиптического пространства, Укр. геом. сб., 18, Харьков, 1975, 49—50.
- [6] M a t s u y a m a I o s h i o, Rigidity of hypersurfaces with constant mean curvature, Tohoku Math. J., 28, № 2 (1976), 199—213.
- [7] Картан Э., Геометрия римановых пространств, М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936.
- [8] Эйзенхарт Л.-П., Риманова геометрия, М., ИЛ, 1948.