РЕЦЕНЗИИ

В.А.Марченко. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. Киев: Наук.думка, 1986, 155 с.

Последнее двадцатилетие ознаменовалось бурным развитием нового перспективного направления в математической физике, связанного с применением обратных задач теории рассеяния к решению нелинейных эволюционных уравнений в частных производных. Начало этому направлению было положено известной работой М.Крускала, К.Гарднера, Дж.Грина и Р.Миуры [1], в которой задача Коши для нелинейного уравнения Кортевега - де Фриза (КдФ)

$$v_t - 6vv_x + v_{xxx} = 0, \; -\infty < x < \infty, \; v(x,t)\in R \tag{1}$$

была сведена к решению прямой и обратной задач теории рассеяния для линейного уравнения Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv y'' + v(x,t)y = \lambda^2 y, \; -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Разработанный к этому времени И.М.Гельфандом, М.Г.Крейном, Б.М.Левитаном, В.А.Марченко и Л.Д.Фаддеевым аппарат обратной задачи спектрального анализа, в частности обратной задачи теории рассеяния, для уравнения (2) (см., например, [2]) позволил проинтегрировать уравнение КдФ в классе быстро убывающих функций. Объяснение этому замечательному факту было дано в работе П.Лакса [3], где показано, что уравнение КдФ представимо с помощью пары линейных дифференциальных операторов L и A (L-A пары) в виде: $L_t=[A,L]$. Отсюда следовало, что зависимость от времени решений Йоста $y(x,t)$ уравнения (2) описывается уравнением $y_t=Ay$, что позволило найти эволюцию данных рассеяния для уравнения (2).

Важным шагом в становлении метода обратной задачи рассеяния явилась работа В.Е.Захарова и А.Б.Шабата [4], в которой было проинтегрировано нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + 2\alpha|u|^2 u=0, \; -\infty < x < \infty, \; u(x,t) \in C$$

в классе функций, стремящихся к постоянным при $x \longrightarrow \pm\infty$. Эта работа показала, что представление с помощью L-A пары не является исключительным свойством уравнения КдФ, и тем самым была открыта перспектива для применения метода обратной задачи рассеяния к другим нелинейным уравнениям. После этого был проинтегрирован целый ряд физически интересных уравнений, установлено, что они являются вполне интегрируемыми бесконечномерными системами [5], определен характер взаимодействия простейших убывающих решений таких уравнений - солитонов и т.п.

Следующим важным этапом в развитии теории вполне интегрируемых эволюционных уравнений в частных производных явилась разработка алгебро-геометрического метода, позволяющего находить специальные классы квазипериодических, в том числе периодических, решений таких уравнений [6].

Первые основополагающие результаты в этом направлении были получены С.П.Новиковым [7], который, в частности, ввел так называемые конечно-зонные решения, соответствующие конечному числу разрешенных зон в спектре оператора L и являющиеся аналогом солитонных решений, и В.А.Марченко, давшего полное решение периодической задачи Коши для уравнения Кортевега - де Фриза [8]. В работах П.Лакса, В.Б.Матвеева, А.Р.Итса, Б.А.Дубровина, И.М.Кричевера и др. эти идеи получили глубокое развитие и алгебро-геометрический метод приобрел в определенной степени завершенную форму.

Параллельно был разработан ряд специальных методов (метод Дарбу-Крума [9], метод „одевания" Захарова-Шабата [10] и др.), позволяющих „размножать" решения, если известны некоторые „затравочные" решения. На этом пути удалось построить решения неубывающие и неквазипериодические (например, решения типа солитонов на конечно-зонном фоне и др.).

Однако единого общего метода, с помощью которого можно было бы строить широкие классы решений вполне интегрируемых уравнений (в том числе неубывающих при $x \longrightarrow +\infty$ или $x \longrightarrow -\infty$), не существовало. В то же время такие решения имеют прямой физический смысл и важны для приложений. Например, в теории плазмы изучаются уравнения КдФ, стремящиеся к $C \pm C$ при $x \pm \infty$ (решения типа ступеньки [11]).

Рецензируемая книга В.А.Марченко в определенной мере ликвидирует этот пробел. Предлагаемый в ней метод интегрирования нелинейных уравнений проще всего объяснить на примере ставшего уже „архетипом" уравнения Кортевега - де Фриза, точнее, эквивалентного ему уравнения:

$$u_t + 6u_x^2 + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (v = -2u_x). \tag{3}$$

Как хорошо известно, простейшими решениями этого уравнения являются односолитонные решения, которые получаются подстановкой в (2) „бегущей волны" $u = u(x-at)$ и интегрированием получающегося обыкновенного уравнения при соответствующем подборе констант. Это дает

$$u = \Gamma^{-1}\Gamma_x, \quad \Gamma(x,t) = e^{ax-4a^3t} + me^{-ax+4a^3t}, \tag{4}$$

где a и m - числовые параметры. Функция $\Gamma(x,t)$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\Gamma_t + 4\Gamma_{xxx} = 0, \qquad \Gamma_{xx} = a^2\Gamma. \tag{5}$$

Общее решение первого из них (являющегося с точностью до числового коэффициента линейной частью исходного уравнения) представимо в виде суперпозиции бегущих с разными скоростями волн. Второе уравнение выделяет из них одну волну, распространяющуюся с фиксированной скоростью $4a^2$. Иными словами, односолитонное решение (4) уравнения (2) является логарифмической производной весьма простого (одноволнового) решения его линейной части.

Это простое наблюдение можно в определенном смысле обратить. А именно, логарифмическая производная от решения линейной системы (5) является решением нелинейного уравнения (3). Важно, что проверка этого утверждения использует лишь алгебраические операции, операции дифференцирования по x и t, их коммутативность, линейность и формулу Лейбница. Поэтому этот факт справедлив и для уравнений вида (3) и (5), решениями которых являются элементы $\hat{u}$, $\hat{\Gamma}$ любой операторной алгебры, в которой удается корректно определить операции дифференцирования $\partial_0=\frac{\partial}{\partial t}$, $\partial=\frac{\partial}{\partial x}$, т.е.

$$\partial_0\hat{u} + 6(\partial\hat{u})^2 + \partial^3\hat{u} = 0, \tag{6}$$

$$\hat{u} = \hat{\Gamma}\ \partial\ \hat{\Gamma}, \qquad \partial_0\hat{\Gamma} + \hat{u}\partial^3\ \hat{\Gamma}=0, \qquad \partial^2\ \hat{\Gamma} = \hat{a}^2\ \hat{\Gamma}. \tag{7}$$

Здесь $\hat{a}$ - произвольный постоянный элемент алгебры.

Уравнение (6) допускает аддитивную группу преобразований $\hat{u}\longrightarrow\hat{u}+\hat{C}$ с произвольным постоянным $\hat{C}$. Поэтому если $\hat{P}=\hat{P}^2$ есть постоянный идемпотент, принадлежаший алгебре, и в разложении

$$\hat{u} = \hat{u}P + \hat{u}(1-P) \tag{8}$$

второе слагаемое $\hat{u}(1-\hat{P})=\hat{N}$ не зависит от x и t, то первое слагаемое в (8), а также элемент

$$u(x,t) = \hat{P}\ \hat{u}(x,t)\hat{P} \tag{9}$$

удовлетворяют уравнению (6), если этим свойством обладает элемент $\hat{u}$. В частности, если $\hat{P}$-одномерный проектор в алгебре, то $\hat{u}_1(x,t)=u(x,t)\hat{P}$ и скалярная функция $u(x,t)$ будет решением исходного уравнения (3).

Эти соображения и составляют схему предлагаемого в монографии метода. А именно, пусть заданная в некоторой области плоскости (x,t) операторная функция $\Gamma(x,t)$ удовлетворяет условиям (7) и соотношению

$$\hat{\Gamma}_x(1-\hat{P}) = \hat{\Gamma}\hat{N}(1-\hat{P}), \tag{10}$$

где $\hat{\Gamma}$ и $\hat{N}$ - постоянные операторы и $\hat{P}$ - постоянный одномерный проектор. Если операторы $\Gamma(x,t)$ обратимы, то логарифмическая производная

$$\gamma = \hat{\Gamma}^{-1}\ \hat{\Gamma}_x \tag{11}$$

удовлетворяет операторному уравнению (6), а ее одномерная проекция (9) удовлетворяет скалярному уравнению (3).

Аналогично (4) решение уравнений (7) имеет вид

$$\hat{\Gamma}(x,t) = e^{\hat{a}x-4\hat{a}^3t} + \hat{m}e^{-\hat{a}x+4\hat{a}^3t} \tag{12}$$

с постоянными операторами $\hat{a}$ и $\hat{m}$. Эта оператор-функция будет удовлетворять и соотношению (10), если положить $\hat{N}=\hat{a}$ и в качестве оператора $\hat{m}$ взять решение уравнения $(\hat{a}\hat{m}+\hat{m}\hat{a})\ (1-\hat{P})=0$, эквивалентного уравнению

$$(\hat{a}\hat{m} + \hat{m}\hat{a}) = \hat{r}\hat{P}. \tag{13}$$

При этом если выбрать $\hat{a}$ и $\hat{P}$ произвольно, а $\hat{m}_0$ найти из уравнения $\hat{a}\hat{m}_0+\hat{m}_0\hat{a}=\hat{P}$, то оператор $\hat{m}=\hat{r}\hat{m}_0$ будет удовлетворять (12), если $\hat{r}$ перестановочен с $\hat{a}$. Это означает, грубо говоря, что соответствующие решения будут зависеть от произвольной функции $r(z)$, заданной на спектре оператора $\hat{a}$, которая и параметризует получаемый таким образом класс решений.

Таким образом, одномерные проекции операторных солитонов (11), (12) являются решениями уравнения (3), и естественно ожидать, что чем шире операторная алгебра, тем более широкий (многопараметрический) класс решений скалярного уравнения (3) мы получим. Нетрудно убедиться, что описанная схема включает и основанный на обратной задаче рассеяния метод интегрирования уравнения (3) в классе достаточно быстро убывающих, например, при $x\to\infty$ функций. Для этого нужно в качестве линейного пространства, в котором действуют операторные алгебры, взять счетно-нормированное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(\xi)$, все производные которых при $\xi\to+\infty$ убывают быстрее любой степени ξ^{-1}, положить

$$(Pf)\ (\xi) = f(0), \qquad (af)(\xi) = -f'(\xi)$$

и искать оператор $\hat{\Gamma}(\mathbf{x},t)$ в виде $1+\hat{T}(x,t)$, где $\hat{T}(x,t)$ задается ядром $T(\xi,\eta;x,t)$. Тогда несложные вычисления показывают, что

$$T(\xi,\eta;x,t) = F(2x + \xi + \eta;\ t) \quad \text{и} \quad K(\xi,x,t) = \int_0^\infty \gamma(\xi,\eta;x,t)d\eta$$

в виду (11) удовлетворяют интегральному уравнению

$$K(\xi + x,x,t) + F(2x + \xi;t) + \int_0^\infty F(2x + \xi + \eta;t) + K(\eta + x,x)d\eta = 0,$$

являющемуся уравнением В.А.Марченко обратной задачи теории рассеяния для ядра оператора преобразования $K(\xi,x,t)$ для уравнения Шредингера с потенциалом $u(x,t) = -\frac{d}{dx}K(x,x,t)$. При этом, согласно (5),

$$F(x,t) = \int_0^\infty e^{-\lambda(x-8\lambda^2t)}\mu\ d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r(\lambda)\ e^{i\lambda(x+8\lambda^2t)}\ d\lambda$$

и обратимость оператора $\hat{\Gamma}=1+\hat{\Gamma}$ обеспечивается неотрицательностью меры $\mu(d\lambda)$ и соотношениями $\overline{r(\lambda)}=r(-\lambda)$, $r(\lambda)\le1$.

В монографии показано, что при соответствующих модификациях этот метод применим к широкому кругу нелинейных эволюционных уравнений. Существенным в нем являются только алгебраические свойства операции дифференцирования и связанных с ней логарифмических производных. Поэтому в первой главе монографии рассматриваются нелинейные уравнения в абстрактной алгебре с дифференцированиями, что позволяет отчетливо выделить чисто алгебраическую структуру метода. В этой главе получен достаточно большой набор нелинейных уравнений, аналогичных (6), и соответствующих им линейных уравнений типа (7). Он включает абстрактные аналоги по существу всех известных вполне интегрируемых и имеющих физический смысл уравнений, в том числе таких, как нелинейное уравнение Шредингера, цепочки Тоды и Ленгмюра, уравнение Кадомцева-Петвиашвили.

Вторая глава посвящена простейшей реализации метода, когда в качестве основного кольца выбрана алгебра матриц порядка N. В основе этой реализации лежит наблюдение, состоящее в том, что матрицы Вронского W_N системы N функций удовлетворяют соотношению (10) при естественном выборе в качестве $\hat{P}$ проектора на первый орт, а в качестве $\hat{N}$ - матрицы, полученной единичной перестановкой столбцов. В силу конечномерности рассматриваемой алгебры матричные решения (12) линейных уравнений (5) зависят от матрицы $A=a^2$, т.е. от конечного числа параметров. Поэтому решения нелинейных скалярных уравнений, получаемые в результате проектирования, оказываются конечно-параметрическими, среди которых содержатся хорошо известные многосолитонные решения. Важным условием несингулярности получаемых решений является обратимость матриц Вронского, обсуждению которой посвящена значительная часть этой главы. Следует подчеркнуть, что предлагаемая процедура приводит к решениям соответствующих нелинейных уравнений и в тех случаях, когда обратимости нет, однако тогда решения оказываются сингулярными в тех точках (x,t), где W_N^{-1} не существует.

Третья глава является по существу центральной в книге. В ней строится реализация абстрактной схемы в алгебрах ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В качестве такого пространства выбирается пространство квадратично интегрируемых по некоторой мере μ функций $f(\omega)$, заданных на некотором измеримом пространстве (Ω,F,μ). Предполагая, что оператор $\hat{a}$ есть оператор умножения на некоторую функцию $a(\omega)$, а оператор $\hat{m}$ - интегральный, автор находит из уравнений (7) и (13) оператор $\hat{\Gamma}$ и формальное представление оператора $\hat{m}$, содержащее сингулярные интегралы. Для того чтобы придать строгий смысл этому представлению, а также логарифмической производной (11), необходимо решить следующие задачи. Во-первых, выяснить при каких условиях на весовую меру μ и ее носитель формальное представление оператора $\hat{m}$ определяет ограниченный оператор. Во-вторых, требуется обеспечить ограниченную обратимость оператора $\hat{\Gamma}(x,t)$ при всех x и t. В-третьих, необходимо удовлетворить определенным требованиям, обычно накладываемым на решения нелинейных уравнений и диктуемых их физическим смыслом. Таким типичным требованием является вещественность. Решение этих задач потребовало от автора привлечения весьма серьезных аналитических средств, включающих такие глубокие факты современного анализа, как теоремы Макенхоупта-Давида и Карлесона [12] об ограниченности сингулярных интегралов и ряд других. Результатом этой главы явилось построение широких классов решений (зависящих от функционального параметра - меры μ) основных нелинейных уравнений.

Последняя глава монографии посвящена выяснению функционально-аналитических свойств построенных классов решений. Прежде всего автор показывает, как нужно распорядиться параметрами для того, чтобы получить решения, убывающие при $x \longrightarrow \infty$, конечно-зонные решения и ряд других. Далее, выбирая соответствующим образом меру

μ, он строит новый класс ограниченных несингулярных решений, которые при $x \longrightarrow \infty$ не стремятся к квазипериодическим.

Уже эти результаты показывают, насколько широкий класс решений нелинейных эволюционных уравнений дает предлагаемый в монографии метод. Следует подчеркнуть, что важная со многих точек зрения задача внутреннего описания свойств возникающих классов решений в монографии по существу только начата. Предстоит еще также понять, как должна решаться одна из основных задач теории дифференциальных уравнений - задача Коши с неубывающими начальными данными того или иного класса. Отметим, что сам автор уже после выхода монографии в свет сделал в этом направлении весьма серьезные шаги, приведшие, в частности, к новым постановкам обратных задач спектрального анализа [13].

Таким образом, в обширной литературе, посвященной нелинейным эволюционным уравнениям, появилась монография, излагающая универсальный и независимый от уже существующих метод построения решений, опирающийся на прозрачную алгебраическую схему. Этот метод бесспорно найдет многочисленные применения в самых разнообразных задачах теории нелинейных уравнений и обратных задач.

Книга вышла на английском языке в издательстве „Райдель" практически одновременно с русским изданием.

Список литературы

[1] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. // Phys.Rev.Let. 1967. Vol.19. P.1095.

[2] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наук.думка, 1977. 329 с.

[3] Lax P.D. // Com.Pure. Appl.Math. 1968. Vol.21, N 5. P.457.

[4] Захаров В.Е., Шабат А.Б. // ЖЭТФ. 1971. Т.61. N 1. С.118.

[5] Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. // Функцион.анализ. 1971. Т.5, вып.4.С.18.

[6] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.:Наука, 1980. 421 с.

[7] Новиков С.П. //Функцион.анализ. 1974. Т.67, вып.12. С.2131.

[8] Марченко В.А. // ДАН СССР. 1974. Т.217. С.276-279.

[9] Matveev V.B. Comptes rendues de la recontre RCP - 264. Editions do CNRS. Paris, 1980. P.247.

[10] Захаров В.Е., Шабат А.Б. // Функцион.анализ. 1974. Т.8, вып.3. С.43.

[11] Гуревич А.В., Питаевский Л.П. // ЖЭТФ. 1973. Т.65. С.590.

[12] Дынькин Е.М., Осиленкер Б.П. Математический анализ. 1983. Т.21. С.42.

[13] Марченко В.А. // Что такое интегрируемость? / Под ред.В.Е.Захарова. М.: Наука, 1989.

Л.А.Пастур, Е.Я.Хруслов