



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Ковалев, Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы,  
*Журнал СВМО*, 2016, том 18, номер 3, 32–40

<https://www.mathnet.ru/svmo604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 апреля 2025 г., 00:53:33



УДК 517.928, 531.01

## Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы

© Н. В. Ковалев <sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассматриваются стационарные квазиконсервативные системы с одной степенью свободы с гамильтоновой невозмущенной системой. Исследуется прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем, обсуждается их аналитичность по малому параметру. Предложен метод построения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативных систем в переменных действие-угол. Сформулирован и доказан критерий существования замкнутых орбит в терминах неавтономных интегралов. Критерий существования замкнутых орбит применен для оценки количества предельных циклов одного класса уравнений Льенара.

**Ключевые слова:** квазиконсервативная система, неавтономный интеграл, периодические решения, предельные циклы, переменные действие-угол, разложение по малому параметру

### 1. Прямое разложение и аналитичность неавтономных интегралов по малому параметру

Рассматривается квазиконсервативная система с одной степенью свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \end{cases}, \quad (1.1)$$

где  $H = H(x, y)$  – функция Гамильтона невозмущенной системы,  $x$  – координата,  $y$  – импульс,  $\epsilon$  – малый параметр, а  $f_k = f_k(x, y)$  и  $g_k = g_k(x, y)$  – произвольные гладкие функции.

Неавтономным интегралом системы (1.1) называется функция  $I = I(x, y, t)$ , сохраняющая постоянное значение вдоль любого решения  $x(t)$ ,  $y(t)$  этой системы. Неавтономные интегралы системы (1.1) возникают однопараметрическими семействами. Действительно, если  $I = I(x, y, t)$  – неавтономный интеграл, то  $I = I(x, y, t + h)$  для произвольного фиксированного  $h$  – также неавтономный интеграл.

В настоящей работе будет построено семейство неавтономных интегралов  $I = I(x, y, t)$  системы (1.1) в виде прямого разложения [1] по малому параметру  $\epsilon$ :

$$I = I_0 + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \dots \quad (1.2)$$

Так как система (1.1) при  $\epsilon = 0$  допускает автономный интеграл  $H = const$ . Можно положить  $I_0 = H$ .

Из определения неавтономного интеграла следует

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dH}{dt} + \epsilon \frac{dI_1}{dt} + \epsilon^2 \frac{dI_2}{dt} + \dots = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y};$$

<sup>1</sup> Аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет), г. Москва; nick.kvlyv@gmail.com

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I_k}{\partial y} \dot{y}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляем  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  из системы (1.1) в (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \right] + \frac{\partial H}{\partial y} \left[ -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \right] + \\ &+ \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial x} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \right] + \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial y} \left[ -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \right] + \\ &+ \epsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial x} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \right] + \epsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial y} \left[ -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра  $\epsilon$ . Имеем уравнения

$$\epsilon^k : \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \{I_k, H\} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.4}$$

где

$$\{I_k, H\} = \frac{\partial I_k}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial I_k}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad F_k = -\frac{\partial H}{\partial x} f_k - \frac{\partial H}{\partial y} g_k - \sum_{n=1}^{k-1} \left[ \frac{\partial I_n}{\partial x} f_{k-n} - \frac{\partial I_n}{\partial y} g_{k-n} \right].$$

Конструкция в фигурных скобках называется скобкой Пуассона. (1.4) – линейные неоднородные уравнения в частных производных 1-ого порядка. Коэффициенты разложения (1.2) неавтономного интеграла есть частные решения уравнений (1.4).

Для интегрирования уравнений (1.4) необходимо найти три независимых интеграла системы характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{dI_k}{F_k}. \tag{1.5}$$

Один из этих интегралов – гамильтониан  $H = H(x, y)$ . Если  $(x_0, y_0)$  – регулярная точка невырожденной системы, то система (1.5) допускает два явно зависящих от времени интеграла  $K = K(x, y, t)$ ,  $L = L(x, y, t)$ . Независимость понимается в том смысле, что матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial t} & \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial t} & \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в окрестности точки  $(x_0, y_0, t_0)$ , где  $t_0$  – произвольный фиксированный начальный момент времени. Здесь же отметим, что построение интегралов  $L$  и  $K$  связано не только с квадратурами, но и с обращением функций. В таком виде метод неэффективен.

Очевидно, что если произвольно выбирать решение уравнений (1.4), то ряд (1.2) будет расходиться. В этом случае будем говорить о формальном неавтономном интеграле системы (1.1). Однако, если получить неавтономный интеграл системы (1.1) как решение некоторой задачи Коши для уравнения (1.3), то он будет аналитическим по  $\epsilon$ . Коэффициенты разложения (1.2) аналитического интеграла можно найти, решая соответствующие задачи Коши для уравнений (1.4). Единственное решение задачи Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &\equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} + f(x, y, \epsilon) \frac{\partial I}{\partial x} + g(x, y, \epsilon) \frac{\partial I}{\partial y} = 0, \\ I|_{t=0} &= \phi(x, y, \epsilon) \end{aligned} \tag{1.6}$$

аналитично по  $\epsilon$ , если аналитичны ряды  $f(x, y, \epsilon) = \epsilon f_1(x, y) + \dots$ ,  $g(x, y, \epsilon) = \epsilon g_1(x, y) + \dots$  и  $\phi(x, y, \epsilon) = \phi_0(x, y) + \epsilon \phi_1(x, y) + \dots$ . Точнее, если ряды  $f$ ,  $g$  и  $\phi$  равномерно аналитичны по  $\epsilon$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , то существует окрестность точки  $(x_0, y_0, 0)$ , в которой решение задачи (1.6) равномерно  $\epsilon$ -аналитично [2]. Этот результат развивает классическую теорему Пуанкаре об аналитичности решения дифференциального уравнения по малому параметру [3].

## 2. Построение неавтономных интегралов в переменных действие-угол

В системе (1.1) сделаем каноническую замену переменных

$$\begin{cases} x = X(r, \varphi) \\ y = Y(r, \varphi) \end{cases}, \quad (2.1)$$

где  $r$  – действие,  $\varphi$  – угол. В новых переменных система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} [\epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots] - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} [\epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots] \\ \dot{\varphi} = \omega(r) + \frac{\partial Y}{\partial r} [\epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots] - \frac{\partial X}{\partial r} [\epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots] \end{cases}, \quad (2.2)$$

где  $H = H(r)$  – функция Гамильтона невозмущённой системы,  $\omega(r) = \frac{\partial H}{\partial r}$ , а  $f_k = f_k(r, \varphi)$  и  $g_k = g_k(r, \varphi)$  – произвольные гладкие функции.

Как и в пункте 1, будем искать неавтономный интеграл системы (2.2) в виде прямого разложения по степеням параметра  $\epsilon$ :

$$I = H + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \dots \quad (2.3)$$

В переменных действие-угол уравнение (1.4) примет вид

$$\epsilon^k : \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} \omega(r) = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где

$$F_k = -\omega(r) \left[ \frac{\partial X}{\partial \varphi} g_k - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} f_k \right] - \sum_{n=1}^{k-1} \left( \frac{\partial I_n}{\partial r} \left[ \frac{\partial X}{\partial \varphi} g_{k-n} - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} f_{k-n} \right] - \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial Y}{\partial r} f_{k-n} - \frac{\partial X}{\partial r} g_{k-n} \right] \right).$$

Решениями уравнений (2.4) являются коэффициенты разложения (2.3). Характеристическая система уравнений (2.4)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dr}{0} = \frac{d\varphi}{\omega(r)} = \frac{dI_k}{F_k} \quad (2.5)$$

допускает три независимых интеграла:

$$\begin{aligned} r &= r_0, \\ \varphi - \omega(r)t &= \varphi_0, \\ I_k - \int F_k(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t) dt &= c_k, \end{aligned}$$

где  $r_0, \varphi_0, c_k$  – константы. Тогда решения уравнений (2.4):

$$I_k = \Phi \left( r, \varphi - \omega(r)t, \int F_k(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t) dt \right).$$

Обратите внимание, что решениями однородных уравнений

$$\epsilon^k : \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} \omega(r) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

являются произвольные гладкие функции  $I_k = S_k(t\omega(r) - \varphi, r)$ . Таким образом, переход к переменным действие-угол даёт эффективный метод для построения семейства неавтономных интегралов системы (1.1).

### 3. Критерий существования замкнутых орбит

Если система (1.1) допускает периодическое решение  $x = x(t), y = y(t)$ , то для любого  $t$  выполняется следующее соотношение:

$$I(x(t), y(t), t) = I(x(t+T), y(t+T), t+T) = I(x(t), y(t), t+T),$$

где  $I$  – неавтономный интеграл системы (1.1), а  $T$  – период решения.

Если решение  $r(t), \varphi(t)$  системы (2.2) соответствует периодическому решению  $x(t), y(t)$  системы (1.1), и при однократном обходе орбиты угол изменяется на  $2\pi$ , то для любого  $t$  выполняется следующее соотношение:

$$I(r(t), \varphi(t), t) = I(r(t+T), \varphi(t+T), t+T) = I(r(t), \varphi(t) + 2\pi, t+T),$$

где  $I$  – неавтономный интеграл системы (2.2), а  $T$  – период решения.

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть  $I(x(t), y(t), t), J(x(t), y(t), t)$  – независимые неавтономные интегралы системы (2.2). Тогда если выполняется

$$\begin{cases} I(R, \varphi_0, 0) = I(R, \varphi_0 + 2\pi, T) \\ J(R, \varphi_0, 0) = J(R, \varphi_0 + 2\pi, T) \end{cases}, \tag{3.1}$$

то  $r = R, \varphi = \varphi_0$  – начальные условия решения  $r(t), \varphi(t)$  системы (2.2), которое соответствует периодическому решению  $x(t), y(t)$  системы (1.1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По теореме о неявной функции, система

$$\begin{cases} I(r(t), \varphi(t), t) = C_1 = const \\ J(r(t), \varphi(t), t) = C_2 = const \end{cases},$$

имеет единственное решение  $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$  в окрестности точки  $(R, \varphi_0, 0)$ .

Преобразование

$$\begin{cases} \varphi \mapsto \varphi + 2\pi \\ t \mapsto t + T \end{cases}, \tag{3.2}$$

является симметрией для уравнений системы (2.2), так как они автономны и  $2\pi$ -периодичны по  $\varphi$ . В силу равенств (3.1) преобразование (3.2) переводит траекторию решения  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $r(0) = R$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$  в себя. Тогда очевидно

$$\begin{cases} r(t) = r(t+T) \\ \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi \end{cases}, \quad (3.3)$$

а соответствующее решение  $x(t)$ ,  $y(t)$  системы (1.1)  $T$ -периодично.  
Доказательство закончено.

Будем искать  $R$  и  $T$  в виде разложения по малому параметру  $\epsilon$ :

$$R = R_0 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \dots, \quad T = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots. \quad (3.4)$$

Подставляем  $R$  и  $T$  из (3.4) в (3.1). Группируя (3.1) по степеням  $\epsilon$  получаем системы для определения неизвестных коэффициентов разложений (3.4).

Заметим, что для определения разложений (3.4) до порядка  $\epsilon^k$  включительно, необходимо знать разложения интегралов  $I$  и  $J$  до порядка  $\epsilon^{k+1}$  включительно.

Кроме начальных условий замкнутого решения, теорема 3.1. позволяет также оценить количество замкнутых орбит. Покажем это на примере одного класса уравнений Льенара.

#### 4. Некоторый класс уравнения Льенара

Рассмотрим уравнение [4]

$$\ddot{x} + \epsilon P(x)\dot{x} + x = 0, \quad (4.1)$$

где

$$P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n,$$

$a_n$  — коэффициенты полинома  $P(x)$ .

Найдём семейство неавтономных интегралов уравнения (4.1) в виде разложения (2.3) до порядка  $\epsilon^2$  включительно.

Перейдём от уравнения (4.1) к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \epsilon y P(x) \end{cases}. \quad (4.2)$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы  $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

Перейдём к переменным действие-угол, сделав замену

$$\begin{cases} x = \sqrt{2r} \sin(\varphi) \\ y = \sqrt{2r} \cos(\varphi) \end{cases}. \quad (4.3)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{r} = -\epsilon 2r \cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) \\ \dot{\varphi} = 1 + \epsilon \sin(\varphi) \cos(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) \end{cases} \quad (4.4)$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы  $H = r$ .

Пользуясь формулами (2.4), (2.5) и удерживая только члены до порядка малости  $\epsilon^2$  включительно, получаем уравнения для определения первых двух неизвестных коэффициентов разложения (2.3):

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = 2r \cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)),$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_1}{\partial r} 2r \cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) - \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)).$$

Решая эти уравнения по порядку, получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + S_1(t - \varphi, r),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^N \left[ a_n^2 (2r)^{n+1} \left( (n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + a_n (2r)^{\frac{n}{2}} \left( 2r \frac{\partial S_1}{\partial r} Q_1^{(n)}(\varphi) - \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \right) \right] + S_2(t - \varphi, r),$$

где

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \int \cos^2(\varphi) \sin^n(\varphi) d\varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \int Q_1^{(n)}(\varphi) \cos^2(\varphi) \sin^n(\varphi) d\varphi.$$

Функции  $Q_1^{(n)}(\varphi)$  и  $Q_2^{(n)}(\varphi)$  представим в явном виде:

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \cos(\varphi) \sum_{m=0}^{n+1} b_m^{(n)} \sin^m(\varphi) + b^{(n)} \varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \sum_{m=0}^{n+1} \left[ \xi_m^{(n)} \sin^{n+m+1}(\varphi) \cos^2(\varphi) + \psi_m^{(n)} \sin^{n+m+1}(\varphi) + d_m^{(n)} \sin^{m+1}(\varphi) + c_m^{(n)} \varphi \sin^m(\varphi) \cos(\varphi) \right] + c^{(n)} \varphi^2,$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\xi_m^{(n)} = \frac{b_m^{(n)}}{n+m+3}; \quad \psi_m^{(n)} = \frac{2b_m^{(n)}}{(n+m+3)(n+m+1)};$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{n+2}; \quad b_n^{(n)} = 0; \quad b_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n} b_{n+1}^{(n)};$$

$$c_{n+1}^{(n)} = \frac{b^{(n)}}{n+2}; \quad c_n^{(n)} = 0; \quad c_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n} c_{n+1}^{(n)};$$

$$d_{n+1}^{(n)} = -\frac{b^{(n)}}{(n+2)^2}; \quad d_n^{(n)} = 0; \quad d_{n-1}^{(n)} = -\frac{n+2}{n^2} d_{n+1}^{(n)};$$

$$\left. \begin{aligned} b_{m-1}^{(n)} &= \frac{m+1}{m} b_{m+1}^{(n)}, & b_m^{(n)} &= 0 \\ c_{m-1}^{(n)} &= \frac{m+1}{m} c_{m+1}^{(n)}, & c_m^{(n)} &= 0 \\ d_{m-1}^{(n)} &= \frac{(m+1)(m+2)}{m^2} d_{m+1}^{(n)}, & d_m^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad m = n-2, n-4, \dots;$$

$$b^{(n)} = -\frac{1}{2} b_1^{(n)}; \quad c^{(n)} = -\frac{1}{4} c_1^{(n)}.$$

Заметим, что если  $n$  чётное, то  $b_0^{(n)} = 0$ ,  $c_0^{(n)} = 0$ ,  $d_0^{(n)} = 0$ ,  $\xi_0^{(n)} = 0$ ,  $\psi_0^{(n)} = 0$ ,  $b^{(n)} \neq 0$ ,  $c^{(n)} \neq 0$ ,  $d^{(n)} \neq 0$ , в другом случае  $b_0^{(n)} \neq 0$ ,  $c_0^{(n)} \neq 0$ ,  $d_0^{(n)} \neq 0$ ,  $\xi_0^{(n)} \neq 0$ ,  $\psi_0^{(n)} \neq 0$ ,  $b^{(n)} = 0$ ,  $c^{(n)} = 0$ ,  $d^{(n)} = 0$ .

Теперь, когда мы определили семейство неавтономных интегралов уравнения (4.1) в виде разложения (2.3) до порядка  $\epsilon^2$  включительно, проверим, существуют ли у уравнения (4.1) периодические решения, и если существуют, то сколько их. Для этого определим два независимых интеграла  $I$  и  $J$ .

$$I = H + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \dots, \quad (4.5)$$

где

$$S_1 = S_2 = 0, \quad I_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^N a_n^2 (2r)^{n+1} \left( (n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right).$$

$$J = H + \epsilon J_1 + \epsilon^2 J_2 + \dots, \quad (4.6)$$

где

$$S_1 = t - \varphi, \quad S_2 = 0, \quad J_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + t - \varphi,$$

$$J_2 = \sum_{n=0}^N \left[ a_n^2 (2r)^{n+1} \left( (n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + a_n (2r)^{\frac{n}{2}} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \right].$$

Учитывая

$$Q_1^{(n)}(2\pi) - Q_1^{(n)}(0) = 2\pi b^{(n)}, \quad Q_2^{(n)}(2\pi) - Q_2^{(n)}(0) = 2\pi(2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}),$$

запишем систему (3.1) для уравнения (4.1):

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + \epsilon \sum_{n=0}^N a_n^2 (2R)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n (2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T - 2\pi + \epsilon \sum_{n=0}^N a_n^2 (2R)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \end{cases}.$$



Подставим вместо  $R$  и  $T$  их разложения (3.4) и рассмотрим отдельно члены при различных степенях параметра  $\epsilon$ .

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T_0 - 2\pi = 0 \end{cases} . \quad (4.7)$$

$$\epsilon^1 : \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)} + \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)} + T_1 + \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \end{cases} . \quad (4.8)$$

Из системы (4.7) видно, что количество возможных корней  $R_0$  первого уравнения принадлежит отрезку  $\left[0; \left[\frac{N+2}{2}\right]\right]$ . Так как один из этих возможных корней всегда нулевой, количество возможных предельных циклов уравнения (4.1) принадлежит отрезку  $\left[0; \left[\frac{N}{2}\right]\right]$ .

Если в полиноме  $P(x)$  ненулевыми являются только коэффициенты при нечётных степенях  $x$ , то уравнение (4.1) имеет континуальное семейство периодических решений, а предельных циклов не существует. Решения систем (4.7) и (4.8):

$$\begin{cases} R_0 = R_0 \\ T_0 = 2\pi \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} R_1 = \frac{\sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)})}{\sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) b^{(n)}} \\ T_1 = 0 \end{cases} .$$

Таким образом мы определили для уравнения (4.1) семейство неавтономных интегралов в виде разложения (2.3) до порядка  $\epsilon^2$  включительно,  $R$  и  $T$  в виде разложений (3.4) до порядка  $\epsilon$  включительно и оценили количество предельных циклов.

*Дата поступления 13.07.2016*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Х. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, М., 1976, 456 с.
2. L. Bobisud, "On The Single First-Order Partial Differential Equation With A Small Parameter", *SIAM Review*, **8**, 1966, 479—493.
3. А. Пуанкаре, *Избранные труды в трёх томах*. Т. 1: *Новые методы небесной механики*, Наука, М., 1971, 772 с.

4. A. Lienard, “Etudes des oscillations entretenues”, *Revue generale de l'Electricite*, **23**, 1928, 901—912, 946—954.

## Straightforward expansion of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems with one degree of freedom

© N. V. Kovalev<sup>2</sup>

**Abstract.** Quasi-conservative stationary systems with one degree of freedom are considered. Straightforward expansion of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems is studied and analyticity of such integrals by small parameter is discussed. Method for constructing a set of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems in action-angle variables is proposed. Criterion of closed orbits' existence is obtained in terms of non-autonomous integrals. This criterion is used to estimate the number of limit cycles for one class of Lienard's equation.

**Key Words:** quasiconservative system, nonautonomous integral, periodic solutions, limit cycles, action-angle variables, small-parameter expansion

---

<sup>2</sup> Postgraduate student of the Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow; nick.kvlv@gmail.com