A. S. Blagoveschensky, On waves generated by sources localized at infinity, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2018, Volume 471, 59–75

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 471, 2018 г.

**А. С. Благовещенский**

# О ВОЛНАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ИСТОЧНИКАМИ, ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.

Пространство-время $\mathbb{R}^4$ компактифицируется с помощью присоединения многообразия бесконечно удаленных точек. Ставится и решается задача построения решения волнового уравнения с правой частью (источником волн) – обобщенной функцией с носителем на многообразии бесконечно удаленных точек. Формулируются условия, которым должен удовлетворять источник. Эти условия имеют весьма жесткий характер.

**1.** В данной статье рассматривается волновое уравнение

$$U_{tt} - \triangle_X U = \Phi(X,t). \qquad (1)$$

Здесь $X = \{X_1, X_2, X_3\} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $\Delta_X$ – оператор Лапласа по переменным $X$.

Уравнение (1) описывает распространение волн, порожденных источниками, распределенными в пространстве-времени. Распределение источников задается правой частью $\Phi(X,t)$. Тождественное равенство нулю функции $\Phi(X,t)$ означает отсутствие источников волн, находящихся на конечном расстоянии. В связи с этим возникает вопрос: существовали ли эти волны вечно? или все-таки "на бесконечности" существовал источник, породивший эти волны? Несмотря на то, что постановка вопроса представляется надуманной, она допускает строгую математическую, естественную в некотором смысле формулировку.

Основная идея дальнейшего рассмотрения заключается в том, что мы осуществляем компактификацию пространства $\mathbb{R}^4$, присоединяя к нему многообразие бесконечно удаленных точек и рассматриваем уравнение (1) на компактифицированном пространстве $\mathbb{R}^4$. Волновым полем, отвечающим бесконечно удаленным источникам, естественно назвать решение уравнения (1), где в правой части стоит обобщенная функция, сосредоточенная на этом бесконечно удаленном многообразии. Указанная программа была реализована в работе [1], где

---

*Ключевые слова*: волновое уравнение, функция описывающая источник, двойное преобразование Кельвина, предельный переход.

Исследование выполнено при поддержке гранта СПбГУ No. 11.38.263.2014.

описаны источники типа $\delta$-функции, сосредоточенной на бесконечно удаленном многообразии, и соответствующие им волновые поля, причем оказалось, что функция, описывающая такие источники, должна удовлетворять весьма жестким ограничениям. В статье [2] с обсуждаемой здесь точки зрения рассмотрены плоские волны. В настоящей работе удалось существенно расширить класс допустимых источников. Точные формулировки – в разделе 6. Условия на функции, задающие источники, формулируются в терминах преобразования Радона или преобразования Фурье (формулы (25) и (28)).

**2.** Для выбора естественного способа компактификации пространства $\mathbb{R}^4$ обратим внимание на следующее, легко проверяемое свойство волнового уравнения (1).

Пусть $U(X,t)$ – произвольное решение однородного уравнения (1), достаточно быстро убывающее на бесконечности в пространственных направлениях (т.е. при $X \to \infty$). Пусть точка $(X,t)$ стремится к бесконечности так, что $X(t) = (t+p)\omega + \Delta X(t)$, где $\omega \in \mathbb{R}^3$ – произвольный фиксированный единичный вектор ($|\omega|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1$), $p \in \mathbb{R}$, $p$ – фиксированная константа, $t \to \pm\infty$; $\Delta X(t)$ обладает свойствами:

1) $|\Delta X(t)| = o(t)$,

2) $2t\langle\omega, \Delta X(t)\rangle + |\Delta X(t)|^2 = o(t)$, $\langle\omega, \Delta X\rangle := \Sigma\omega_i \Delta X_i$.

Такой способ ухода на бесконечность ($[p,\omega]$-стремление) означает, грубо говоря, что точка уходит на бесконечность со скоростью, равной единице, т.е. скоростью распространения волн.

*Существует предел* $\lim\limits_{t\to\infty} tU(X(t),t) = f(p,\omega)$, *не зависящий от выбора* $\Delta X(t)$, *удовлетворяющего условиям* 1), 2).

Обратим специально внимание на то, что величина предела не зависит от того, стремится ли $t$ к плюс или минус бесконечности. Если же точка уходит на бесконечность со скоростью большей или меньшей скорости волн, т.е. в пространственном или времени-подобном направлении, то указанный предел есть нуль. Эти факты легко могут быть доказаны с помощью явных формул для решения задачи Коши, [3 с. 204, 4].

Высказанные соображения делают естественным следующий способ компактификации пространства $\mathbb{R}^4$. Присоединим к пространству бесконечно удаленные точки, получающиеся при $[p,\omega]$-стремлении точек к бесконечности, при этом отождествим точки, получающиеся при

$t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ при фиксированных $p$ и $\omega$. Все бесконечно удаленные точки, получающиеся при уходе точки на бесконечность в нехарактеристическом направлении, отождествим. Множество пар $(p, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, дополненное точкой $p = \infty$, можно рассматривать как параметризацию на множестве бесконечно удаленных точек.

Отметим специальный случай $[p, \omega]$-стремления к бесконечности, когда $\Delta X(t)$ не зависит от $t$; $X(t)$ уходит на бесконечность вдоль характеристической прямой

$$X(t) = \omega(t + p) + \Delta X. \tag{2}$$

Свойства 1), 2) выполнены, если $\langle \omega, \Delta X \rangle = 0$. Прямые (2) заметают характеристическую плоскость в $\mathbb{R}^4$

$$\langle \omega, X \rangle - t = p.$$

Тем самым пары $(p, \omega)$ можно рассматривать и как параметры, задающие характеристические плоскости.

Компактифицированное пространство приобретает структуру $C^\infty$-многообразия. Чтобы доказать это, достаточно указать окрестности бесконечно удаленных точек, диффеоморфные шару в $\mathbb{R}^4$ и координаты в этих окрестностях.

Введем предварительно операцию инверсии[1] относительно точки $X^*, t^*$:

$$(X, t) \xrightarrow{J_{X^*,t^*}} (\xi, \tau),$$

где $\xi = \frac{X - X^*}{(t-t^*)^2 - |X - X^*|^2}$, $\tau = \frac{t - t^*}{(t-t^*)^2 - |X - X^*|^2}$. Пусть точка $(X, t)$ $[p, \omega]$-стремится к бесконечности. Тогда при условии, что $\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p \neq 0$, $\xi \to \widehat{\xi} = \frac{\omega}{2(\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p)}$, $\tau \to \widehat{\tau} = \frac{1}{2(\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p)}$. Очевидно, точка $(\widehat{\xi}, \widehat{\tau})$ лежит на конусе $\widehat{\tau}^2 - \widehat{\xi}^2 = 0$. Примем за координаты в окрестности бесконечно удаленной точки $(p, \omega)$ декартовы координаты $(\xi, \tau)$ в окрестности $(\widehat{\xi}, \widehat{\tau})$ – образа бесконечно удаленной точки $(p, \omega)$ при инверсии $J_{X^*,t^*}$. Ограничение $\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p \neq 0$ на $(p, \omega)$ легко снимается с помощью изменения выбора точки $(X^*, t^*)$. Тем самым компактифицированное пространство $\mathbb{R}^4$ приобретает структуру бесконечно дифференцируемого многообразия. Можно показать ([5 с. 354, 6]), что указанное

[1]Преобразование инверсии в совокупности с преобразованиями Лоренца, сдвига и растяжения образуют конформную группу преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

многообразие диффеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ с отождествленными противоположными точками.

**3.** Преобразование инверсии тесно связано с уравнением (1). А именно: пусть $U(X,t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Тогда функция

$$V(\xi,\tau) =: KU = \frac{1}{\tau^2 - |\xi|^2} U\left(\frac{\xi}{\tau^2 - |\xi|^2}, \frac{\tau}{\tau^2 - |\xi|^2}\right) \tag{3}$$

при $\tau^2 - |\xi|^2 \neq 0$ также удовлетворяет уравнению

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = 0.$$

Преобразование (3) носит название преобразование Кельвина (Отметим также, что некоторые предпочитают называть его преобразованием Бейтмена [7]). Преобразование Кельвина может быть построено с помощью инверсии относительно любой точки $(X^*, t^*)$.

**Определение.** *Пусть функция $V$ удовлетворяет уравнению*

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = \Phi(\xi,\tau),$$

*где $\Phi(\xi,\tau)$ – есть обобщенная функция с носителем на конусе $\tau^2 = \xi^2$ (образе многообразия точек на бесконечности). Будем интерпретировать функцию $U(X,t) = (K^{-1}V)(X,t)$ как волновое поле, порожденное источниками, локализованными на бесконечности.*

**4. Примеры.** Здесь рассмотрено с указанных выше позиций два хорошо известных решения волнового уравнения.

**Пример 1.** Плоская волна. Пусть $U = f\big(t - \langle X, \omega_0\rangle\big)$, где $\omega_0$ – единичный вектор, точка $(X,t)$ $[p,\omega]$-стремится к бесконечности. Для простоты будем рассматривать простейшую реализацию $[p,\omega]$-стремления точки к бесконечности: $X(t) = (t+p)\omega$ $(t \to \infty)$. Функцию $f$ предполагаем финитной и бесконечно дифференцируемой. Очевидно, при $\omega \neq \omega_0$ $\lim\limits_{t\to\infty} tf\big(t-(t+p)\langle\omega,\omega_0\rangle\big) = 0$, при $\omega = \omega_0$ и $f(-p) \neq 0$ этот предел равен бесконечности. Эти соображения подсказывают, что указанный предел является обобщенной функцией от переменных $p, \omega$.

Справедливо утверждение: $[p,\omega]$-предел

$$\lim_{t\to\pm\infty} tU\big(X(t),t\big) = 2\pi\delta_{\omega_0}(\omega)g^{\pm}(p),$$

где $g^+(p) = \int\limits_{-p}^{\infty} f(s)\,ds$, $\quad g^-(p) = -\int\limits_{-\infty}^{-p} f(s)\,ds$, $\quad \delta_{\omega_0}(\omega)$ – дельта функция на единичной сфере, сосредоточенная в точке $\omega_0$.

Действительно, рассмотрим функционал

$$t(U,\psi) = t \iint f\bigl(t-(t+p)\langle\omega,\omega_0\rangle\bigr)\psi(p,\omega)\,dp\,dS_\omega.$$

Здесь $\psi(p,\omega) = \psi(p,\theta,\varphi)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$, финитная по переменной $p$; $\theta$, $\varphi$ – сферические координаты на единичной сфере, угол $\theta$ отсчитывается от направления $\omega_0$.

Пусть $\widehat{\psi}(p,\cos\theta) = \int\limits_0^{2\pi}\psi(p,\theta,\varphi)\,d\varphi$. Легко видеть, что функция $\widehat{\psi}(p,\sigma)$ бесконечно дифференцируема на полосе $\mathbb{R}\times[-1,1]$, финитна по $p$, $\widehat{\psi}(p,1) = 2\pi\psi(p,\omega_0)$. Тогда функционал $t(U,\psi)$ приобретает вид:

$$t(U,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\, t\int\limits_0^{\pi} f\bigl(t-(t+p)\cos\theta\bigr)\widehat{\psi}(p,\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\, t\int\limits_{-1}^{1} f\bigl(t-(t+p)\sigma\bigr)\widehat{\psi}(p,\sigma)\,d\sigma.$$

Заметим, что функция $tf\bigl(t-(t+p)\sigma\bigr)$ обладает свойствами:

1) Интеграл $t\int\limits_a^b f\bigl(t-(t+p)\sigma\bigr)d\sigma = -\frac{t}{t+p}\int\limits_{t(1-a)-ap}^{t(1-b)-bp} f(s)\,ds$ ограничен при всех $(a,b)\in[-1,1]$.

2) Этот интеграл стремится к нулю при всех $b<1$, $t\to\infty$. При $b=1$ $\quad \lim\limits_{t\to\pm\infty} t\int\limits_a^1 f\bigl(t-(t+p)\sigma\bigr)d\sigma \to g^\pm(p)$.

Свойства 1), 2) означают, что функция $tf\bigl(t-(t+p)\sigma\bigr)\to\delta(\sigma)g^\pm(p)$, функционал $t(U,\psi)\to 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\, g^\pm(p)\psi(p,\omega_0)$.

Заметим, что “скачок” плоской волны на бесконечности, т.е. разность $[p,\omega]$-пределов при $t\to\pm\infty$ есть $2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds\,\delta_{\omega_0}(\omega)$. В частности, плоская волна непрерывна на бесконечности, если нулевой момент функции $f(s)$ равен нулю.

**Пример 2.** Фундаментальное решение волнового уравнения.

$$E^+(t-t_0,X)=\frac{1}{2\pi}\epsilon(t-t_0)\delta\bigl((t-t_0)^2-X^2\bigr)\quad (t_0>0).$$

Здесь $\epsilon(\,\cdot\,)$ – функция Хевисайда.

$$\begin{aligned}
KE^+&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\epsilon\Bigl(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Bigr)\,\delta\Bigl(\Bigl(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Bigr)^2-\frac{\xi^2}{\gamma^2}\Bigr)\\
&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\epsilon\Bigl(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Bigr)\,\delta\Bigl(\frac{\tau^2-\xi^2}{\gamma^2}-2\frac{\tau t_0}{\gamma}+t_0^2\Bigr)\\
&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\epsilon\Bigl(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Bigr)\,\delta\Bigl(\frac{1}{\gamma}-2\frac{\tau t_0}{\gamma}+t_0^2\Bigr)\\
&=\frac{1}{2\pi t_0^2}\operatorname{sgn}\gamma\,\epsilon\Bigl(\frac{\tau}{2\tau\tau_0-\tau_0^2}-\frac{1}{\tau_0}\Bigr)\,\delta\bigl((\tau-\tau_0)^2-\xi^2\bigr)\\
&=\frac{1}{2\pi t_0^2}\;\epsilon\Bigl((\tau_0-\tau)\Bigl(\tau-\frac{\tau_0}{2}\Bigr)\Bigr)\,\delta\bigl((\tau-\tau_0)^2-\xi^2\bigr)\,,
\end{aligned}$$

где $\gamma=\tau^2-\xi^2$, $\tau_0=t_0^{-1}$.

Тем самым $(KE^+)(\xi,\tau)$ при $\tau>\frac{\tau_0}{2}$ в терминах переменных $\xi$, $\tau$ пропорциональна антипричинному фундаментальному решению $E^-=E^+(\tau_0-\tau,\xi)$. Функция $\Box_{\xi,\tau}(KE^+)(\xi,\tau)$ отлична от нуля в точке $(0,\tau_0)$ (образе точки $(0,t_0)$ при инверсии) и при $\tau^2=\xi^2$, $\tau=\tau_0/2$. Это означает, что $E^+(X,t)$ описывает поле, порожденное: 1) точечным источником, сосредоточенным в точке $(0,t_0)$, и 2) источниками на пересечении конуса $t-t_0=|X|/2$ с бесконечностью.

**5.** Здесь и в дальнейшем нам будет удобно, вместо обозначения координат $(X_1,X_2,X_3,t)$, использовать обозначение $(x,z,t)$ (соответственно $(\xi,\zeta,\tau)$), где $x=(x_1,x_2)=(X_1,X_2)$, $z=X_3$, $(x,z,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$. Под $x^2$ в дальнейшем понимаем $x_1^2+x_2^2$, $\Gamma=t^2-x^2-z^2$, $(x,y):=x_1y_1+x_2y_2$.

Далее вместо преобразования Кельвина используем композицию $\widetilde{K}$ двух преобразований Кельвина: первое, опирающееся на инверсию относительно точки $(0,0,0)$:

$$(x,z,t)\to(x',z',t'),\quad x'=\frac{x}{t^2-x^2-z^2},$$

$$z'=\frac{z}{t^2-x^2-z^2},\quad t'=\frac{t}{t^2-x^2-z^2},$$

второе – относительно точки $x' = 0$, $z' = t' = \frac{1}{2h}$: $(x', z', t') \to (\xi, \zeta, \tau)$, т.е.

$$\xi = \frac{x'}{(t' - 1/2h)^2 - x'^2 - (z' - 1/2h)^2},$$

$$\zeta = \frac{z' - 1/2h}{(t' - 1/2h)^2 - x'^2 - (z' - 1/2h)^2},$$

$$\tau = \frac{t' - 1/2h}{(t' - 1/2h)^2 - x'^2 - (z' - 1/2h)^2}.$$

Итоговое преобразование $(x, z, t) \to (\xi, \zeta, \tau)$ имеет вид:

$$\xi = \frac{xh}{h - t + z}, \quad \zeta = \frac{zh - \Gamma/2}{h - t + z}, \quad \tau = \frac{th - \Gamma/2}{h - t + z}. \tag{4}$$

Формула обращения этой двойной инверсии:

$$x = \frac{\xi h}{h + \tau - \zeta}, \quad z = \frac{\zeta h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}, \quad t = \frac{\tau h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}. \tag{4a}$$

Отметим полезное соотношение

$$h - t + z = \frac{h^2}{h + \tau - \zeta}. \tag{5}$$

Плоскость $h + \tau - \zeta = 0$ является образом многообразия бесконечно удаленных точек. После перехода к координатам $(\xi, \zeta, \tau)$ возникает в свою очередь многообразие бесконечно удаленных точек, получающихся при стремлении к бесконечности координат $(\xi, \zeta, \tau)$. Плоскость $h - t + z = 0$ является прообразом этого многообразия. Найдем вид вышеупомянутого двукратного преобразования Кельвина $\widetilde{K}$:

$$\begin{aligned} & U(x,z,t) \to W(x',z',t') = \frac{1}{\Gamma'} U\Big(\frac{x'}{\Gamma'}, \frac{z'}{\Gamma'}, \frac{t'}{\Gamma'}\Big) \to V(\xi,\zeta,\tau) \\ &= \frac{1}{\gamma} W\Big(\frac{\xi}{\gamma}, \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{1}{2h}, \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{2h}\Big) = \frac{1}{\gamma\Gamma'} U\Big(\frac{\xi h}{h+\tau-\zeta}, \frac{\zeta h + \gamma/2}{h+\tau-\zeta}, \frac{\tau h + \gamma/2}{h+\tau-\zeta}\Big). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma' = t'^2 - x'^2 - z'^2 &= \Big(\frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{2h}\Big)^2 - \Big(\frac{\zeta}{\gamma} + \frac{1}{2h}\Big)^2 - \frac{\xi^2}{\gamma^2} \\ &= \frac{\tau^2 - \zeta^2 - \xi^2}{\gamma^2} + \frac{\tau - \zeta}{h\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\tau - \zeta}{h\gamma} = \frac{h + \tau - \zeta}{h\gamma}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$V(\xi,\zeta,\tau) = (\widetilde{K}U)(\xi,\zeta,\tau) = \frac{h}{h+\tau-\zeta}U\Big(\frac{\xi h}{h+\tau-\zeta}, \frac{\zeta h+\gamma/2}{h+\tau-\zeta}, \frac{\tau h+\gamma/2}{h+\tau-\zeta}\Big). \quad (6)$$

Формула обращения преобразования $\widetilde{K}$ имеет вид:

$$(\widetilde{K}^{-1}V)(x,z,t) = U(x,z,t) = \frac{h}{h-t+z}V\Big(\frac{xh}{h-t+z}, \frac{zh-\Gamma/2}{h-t+z}, \frac{th-\Gamma/2}{h-t+z}\Big). \quad (7)$$

**6.** *Далее под волновым полем, порожденным источниками на бесконечности будем понимать решение однородного уравнения* (1) *при* $(X,t)\in\mathbb{R}^4$, *имеющее вид* (7), *где функция* $V(\xi,\zeta,\tau)$ *удовлетворяет уравнению:*

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V - V_{\zeta\zeta} = F(\xi,\zeta,\tau), \quad (8)$$

*причем* $F(\xi,\zeta,\tau)$ *– обобщенная функция с носителем на плоскости* $h+\tau-\zeta=0$ – образе множества бесконечно удаленных точек.

Будем далее предполагать, что $F(\xi,\zeta,\tau)$ имеет вид конечной суммы:

$$F(\xi,\zeta,\tau) = \sum_{k=0}^{m} \delta^{(k)}(h+\tau-\zeta)\, f_k(\xi,\zeta), \quad (9)$$

где $f_k(\xi,\zeta)\in Z$. Здесь через $Z$ обозначено множество бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих при некотором $\beta$ (зависящем от $f$), любом $\sigma\geqslant 0$ и любом мультииндексе $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ оценкам

$$\Big|\frac{\partial^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\partial\xi_2^{\alpha_2}\partial\zeta^{\alpha_3}} f(\xi,\zeta)\Big| \leqslant \frac{M_{\alpha\sigma}|1+\zeta^2|^\beta}{(1+\xi^2)^\sigma}. \quad (10)$$

(Мы выделяем направление $\zeta$, так как стремление $\zeta$ к бесконечности при $h+\tau-\zeta=0$ в терминах промежуточных координат $(x',z',t')$ означает стремление точки к вершине конуса $\Gamma'=0$ – особой точке многообразия бесконечно удаленных точек).

**7.** Решение уравнения (8) будем строить с помощью свертки функции $F(\xi,\zeta,\tau)$ и фундаментального решения волнового уравнения. В большинстве приложений используется фундаментальное решение

$$E^+(\xi,\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(\tau)\delta(\tau^2-\xi^2-\zeta^2),$$

где $\varepsilon(\tau)$ – функция Хевисайда. Решение $E^+(\xi,\zeta,\tau)$ удовлетворяет принципу причинности. В нашей ситуации однако роль принципа причинности представляется сомнительной в связи с тем, что в сколь угодно малой (в терминах переменных $(\xi,\zeta,\tau)$) окрестности образа бесконечно удаленной точки находятся как точки, являющиеся образами точек, расположенных в далеком прошлом, так и в отдаленном будущем. Поэтому мы будем использовать как причинное фундаментальное решение $E^+(\xi,\zeta,\tau)$, так и антипричинное $E^-(\xi,\zeta,\tau) = E(\xi,\zeta,-\tau)$.

Представим каждую функцию $f_k(\xi,\zeta)$ в виде суммы

$$f_k(\xi,\zeta) = f_k^+(\xi,\zeta) + f_k^-(\xi,\zeta),$$

где каждое из слагаемых принадлежит $Z$, в остальном разбиение произвольно. Построим решение уравнения (8) в виде

$$V = \sum_{k=0}^{m} \left(V_k^+ + V_k^-\right),$$

где

$$\begin{aligned} V_k^\pm &= E^\pm(\tau,\xi,\zeta) * \left(\delta^{(k)}(h+\tau-\zeta) f_k^\pm(\xi,\zeta)\right) \\ &= \frac{\partial^k}{\partial\tau^k} E^\pm(\tau,\xi,\zeta) * \left(\delta(h+\tau-\zeta) f_k^\pm(\xi,\zeta)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Свертки в формуле (11) определены, так как интегрирование в них (см. далее формулы (12),(13)) фактически производится по параболоиду. Уход $\zeta'$ на бесконечность означает одновременно и стремление $\xi'$ к бесконечности пропорционально $\sqrt{|\zeta'|}$. Выбирая показатель $\sigma$ в оценке (10) достаточно большим, всегда можно добиться сколь угодно быстрого степенного убывания подынтегральной функции.

Рассмотрим $V_k^+$,

$$\begin{aligned} V_k^+ = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k} \int\limits_{\tau'<\tau} &\delta\Big((\tau-\tau')^2 - (\zeta-\zeta')^2 - (\xi-\xi')^2\Big) \\ &\times \delta(h+\tau'-\zeta') f_k^+(\xi',\zeta') d\xi'\, d\zeta' d\tau' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k} \int\limits_{\zeta'-h<\tau} \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2 - (\zeta-\zeta')^2 - (\xi-\xi')^2\Big) f_k^+(\xi',\zeta')\, d\xi'\, d\zeta'.$$

Очевидно, при $\tau < \zeta - h$ носитель $\delta$-функции, стоящей под знаком интеграла, не пересекается с полупространством $\zeta' < \tau + h$ и $V_k^+(\xi,\zeta,\tau) = 0$.

При $\tau > \zeta - h$ носитель $\delta$-функции полностью помещается в полупространстве $\zeta' - h < \tau$; тем самым указание $\zeta' - h < \tau$ под знаком интеграла является излишним, $V_k^+$ может быть записано в виде

$$V_k^+(\xi,\zeta,\tau) = \varepsilon(\tau-\zeta+h) \times \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f_k^+(\xi',\zeta')\,d\xi' d\zeta'. \quad (12)$$

Аналогично

$$V_k^-(\xi,\zeta,\tau) = \varepsilon(\zeta-\tau-h) \times \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f_k^-(\xi',\zeta')\,d\xi' d\zeta'. \quad (13)$$

**8.** Преобразуем выражение для

$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'.$$

Пусть $k=1$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int \delta\Big((\tau+h-\zeta')^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= 2\int (\tau+h-\zeta')\delta'\Big((\tau+h-\zeta')^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= 2\int \delta'\Big((2\zeta'-\tau-h-\zeta)(\zeta-\tau-h)-(\xi-\xi')^2\Big)(\tau+h-\zeta') f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'. \quad (14)$$

Так как $\delta'\big((2\zeta'-\tau-h-\zeta)(\zeta-\tau-h)-(\xi-\xi')^2\big)$ можно представить в виде $\frac{1}{2(\zeta-\tau-h)}\frac{\partial}{\partial\zeta'}\delta'\big((2\zeta'-\tau-h-\zeta)(\zeta-\tau-h)-(\xi-\xi')^2\big)$, то равенство (14) можно продолжить

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int \delta\Big((\tau-\zeta'-h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \frac{1}{\zeta-\tau-h}\int \delta\Big((\tau-\zeta'-h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big)\frac{\partial}{\partial\zeta'}(\zeta'-\tau-h) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \int \delta(\Lambda) b^{-1}\sum_{j=0}^{1} P_{1j}(a,b)\frac{\partial}{\partial\zeta'} f(\xi',\zeta')\,d\xi' d\zeta', \quad (15)$$

где аргумент $\delta$-функции обозначен через $\Lambda$, $\tau+h-\zeta' =: a$, $\tau+h-\zeta =: b$. Справедливо представление

$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int\delta(\Lambda)f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= b^{-k}\int\delta(\Lambda)\sum_{j=0}^{k}P_{kj}(a,b)\,\frac{\partial j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')d\xi'\,d\zeta', \quad (16)$$

где $P_{kj}$ – однородные полиномы степени $j$ своих аргументов. Докажем это представление с помощью индукции. При $k = 1$ оно верно (формула (15)). Пусть оно верно при каком-то $k$, тогда

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\int\delta(\Lambda)f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\int\delta(\Lambda)b^{-k}\sum_{j=0}^{k}P_{kj}(a,b)\frac{\partial j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \int\frac{\partial}{\partial\tau}\big(\delta(\Lambda)\big)\cdot b^{-k}\sum_{j=0}^{k}P_{kj}(a,b)\frac{\partial j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$+ \int\delta(\Lambda)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(b^{-k}\sum_{j=0}^{k}P_{kj}(a,b)\Big)\frac{\partial j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'.$$

Аналогично предыдущему, имеем:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\int\delta(\Lambda)f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \int\delta(\Lambda)\frac{\partial}{\partial\zeta'}\cdot\left(ab^{-k-1}\cdot\sum_{j=0}^{k}P_{kj}(a,b)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')\right)d\xi'\,d\zeta'$$

$$+ \int\delta(\Lambda)\bigg(-kb^{-k-1}\cdot\sum_{j=0}^{k}P_{kj}(a,b)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')$$

$$+ b^{-k}\sum_{j=0}^{k}\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')\bigg)\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \int\delta(\Lambda)b^{-k-1}\bigg(-\sum_{j=0}^{k}\Big(P_{kj}(a,b)+a\frac{\partial}{\partial a}P_{kj}(a,b)\Big)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^{j}}f(\xi',\zeta')$$

$$+ a\sum_{j=0}^{k+1} P_{kj}(a,b)\frac{\partial^{j+1}}{\partial\zeta'^{j+1}} f(\xi',\zeta') - k\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\frac{\partial^{j}}{\partial\zeta'^{j}} f(\xi',\zeta')$$
$$+ b\sum_{j=0}^{k}\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big) P_{kj}(a,b)\frac{\partial^{j}}{\partial\zeta'^{j}} f(\xi',\zeta')\Big)\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$= \int \delta(\Lambda) b^{-k-1}\cdot \sum_{j=0}^{k+1} P_{k+1,j}(a,b)\frac{\partial^{j}}{\partial\zeta'^{j}} f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'.$$

Формула (16) доказана, причем для полиномов $P_{kj}(a,b)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$P_{k+1,j}(a,b)$$
$$= -P_{kj}(a,b) - a\frac{\partial}{\partial a}P_{kj}(a,b) + aP_{k,j-1}(a,b) - kP_{kj}(a,b) + b\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b)$$

или

$$P_{k+1,j}(a,b) = -(1+k)P_{kj}(a,b) - a\frac{\partial}{\partial a}P_{kj}(a,b) + b\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b) + aP_{k,j-1}(a,b). \quad (17)$$

Соотношение (17) верно при всех $j = 0,\dots k+1$, если принять, что $P_{k,-1}(a,b) = P_{k,k+1}(a,b) = 0$, $P_{00}(a,b) = 1$. Выпишем несколько первых полиномов $P_{kj}(a,b)$ :

$$P_{00}(a,b)=1,\ \ P_{10}(a,b)=-1,\ \ P_{11}(a,b)=a,\ \ P_{20}(a,b)=2!,$$
$$P_{21}(a,b)=-4a+b,\ \ P_{22}(a,b)=a^2,\ \ P_{30}(a,b)=-3!,\ \ P_{31}(a,b)=18a-3b,$$
$$P_{32}(a,b)=-9a^2+3ab,\ \ P_{33}(a,b)=a^3$$

и т.д. В частности, при всех $k$ :

$$P_{k0} = (-1)^k k!, \quad P_{kk} = a^k. \quad (18)$$

Итак, построенное решение уравнения (8) имеет вид:

$$V(\xi,\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}(\tau+h-\zeta)^{-k}\int \delta(\Lambda)\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(\tau+h-\zeta',\tau+h-\zeta)$$
$$\times\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j}\Big(\epsilon(\tau+h-\zeta)f_k^+(\xi',\zeta') + \epsilon(\zeta-\tau-h)f_k^-(\xi',\zeta')\Big)\,d\xi'\,d\zeta'. \quad (19)$$

**9.** Перейдем в выражении (19) к исходным функции $U$ и переменным $(x, z, t)$. В силу формулы (7):

$$U(x,z,t) = \frac{h}{h-t+z} V\Big(\frac{hx}{h-t+z}, \frac{hz-\Gamma/2}{h-t+z}, \frac{ht-\Gamma/2}{h-t+z}\Big).$$

Выполним сначала подстановку в аргументе $\delta$-функции $\Lambda$: с учетом того, что

$$\tau + h + \zeta = \frac{x^2+(z+h)^2-t^2}{t-h-z} = \frac{x^2}{t-h-z} - (t+z+h),$$

$$\tau + h - \zeta = -\frac{h^2}{h-t+z},$$

$$\Lambda = \Big(2\zeta' + \frac{x^2}{t-h-z} - (t+z+h)\Big)\frac{h^2}{t-h-z} - \xi'^2 - \frac{2(x,\xi')h}{t-h-z} - \frac{x^2h^2}{(t-h-z)^2}$$
$$= \frac{2h^2}{t-h-z}\Big(\zeta' - \xi'^2\frac{t-h-z}{2h^2} + \frac{(x,\xi')}{h} - \frac{t+h+z}{2}\Big).$$

С учетом однородности $\delta$-функции и однородности полиномов $P_{kj}$, а также формулы (5), получаем:

$$U(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{h^{2k+1}}\iint \delta\Big(\zeta' - \xi'^2\frac{t-h-z}{2h^2} + \frac{(x,\xi')}{h} - \frac{t+h+z}{2}\Big)$$
$$\times \sum_{j=0}^{k}(h-t+z)^{k-j}P_{kj}\Big(h^2+hz-\Gamma/2-(h-t+z)\zeta', h^2\Big)$$
$$\times \frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j}\Big(\epsilon(h-t+z)f_k^+(\xi',\zeta') - \epsilon(t-z-h)f_k^-(\xi',\zeta')\Big)\,d\xi'\,d\zeta'. \tag{20}$$

**10.** Как видно из формулы (20), построенное решение является гладкой непрерывной функцией от $x, z, t$ всюду, за исключением, может быть, плоскости $t = z + h$ (эта плоскость является прообразом многообразия бесконечно удаленных в смысле координат $(\xi, \zeta, \tau)$ точек).

Исследуем поведение функции $U$ в окрестности плоскости $t = z+h$. Существуют пределы при $t \to z+h+0$ и при $t \to z+h-0$ решения $U(x, z, t)$. Действительно,

$$U(x,z,z+h+0) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{h^{2k+1}}\iint d\xi'\,d\zeta'\,\delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big)$$
$$\times P_{kk}\Big(h^2+hz-\frac{(h+z)^2-z^2-x^2}{2}, h^2\Big)\frac{\partial^k}{\partial\zeta'^k}f_k^-(\xi',\zeta')$$

или, с учетом формулы (18):

$$U(x,z,z+h+0) = -\frac{1}{2\pi h}$$
$$\times \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^-(\xi',\zeta'). \quad (21)$$

Аналогично, предел

$$U(x,z,z+h-0) = \frac{1}{2\pi h}$$
$$\times \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^+(\xi',\zeta'). \quad (22)$$

Тем самым построенная функции $U$ имеет особенность типа скачка при $t = z+h$ . При этом неожиданностью является тот факт (подмеченный впервые А. А. Новицкой), что повышение сингулярности источника (добавление членов с производными от $\delta$-функции в формуле (9)) не влечет за собой повышение сингулярности решения.

Найдем величину скачка решения $U(x,z,t)$ при $t = z+h$:

$$\big[U(x,z,t)\big]\big|_{t=z+h} = U(x,z,z+h+0) - U(x,z,z+h-0)$$
$$= -\frac{1}{2\pi h} \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big)$$
$$\times \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} \big(f_k^-(\xi',\zeta') + f_k^+(\xi',\zeta')\big)$$
$$= -\frac{1}{2\pi h} \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k(\xi',\zeta'). \quad (23)$$

Замечательно, что *несмотря на то, что сама функция $U$ зависит от способа разбиения функций $f_k(\xi,\zeta)$ на слагаемые $f_k^+(\xi,\zeta)$ и $f_k^-(\xi,\zeta)$, величина скачка $U$ при $t = z+h$ не зависит от произвола, заключающегося в этом разбиении.*

**11.** Как следует из построения функции $U$, она удовлетворяет однородному уравнению (1) всюду, за исключением, может быть, плоскости $t = z+h$.

Будем интерпретировать функцию $U(x,z,t)$ как обобщенную. Результат применения оператора Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta_x$ к функции $U$ есть

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta_x\Big)U = 2\frac{\partial}{\partial z}\big[U(x,z,t)\big]\Big|_{t=z+h}\delta(t-z-h). \tag{24}$$

Уравнение (24) означает, что если волновое поле $U(x,z,t)$ испытывает скачок на характеристической плоскости $t-z=h$, то оно отвечает источнику, описываемому функцией, стоящей в правой части равенства (24). Поскольку мы пытаемся описать поля, порождаемые источниками, локализованными только на бесконечности, то следует потребовать, чтобы при всех $(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\big[U(x,z,t)\big]\Big|_{t=z+h} = 0,$$

или, переобозначая $z+h \to z$, $x/h \to -x$ и опуская штрихи в переменных интегрирования

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^k \iint d\xi\, d\zeta\, \delta\big(z+(x,\xi)-\zeta\big)\frac{\partial^{k+1}}{\partial\zeta^{k+1}}f_k(\xi,\zeta) = 0. \tag{25}$$

Равенство (25) представляет собой условие на функции $f_k(\xi,\zeta)$ (рассматриваемого класса $Z$), необходимое и достаточное для того, чтобы функция вида (9) описывала источник волн, локализованный на бесконечности. Ниже это условие переформулируется в терминах преобразования Фурье.

**12.** Перепишем условие (25) в форме

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^k H_k(x,z) = 0,$$

где

$$H_k(x,z) := \iint d\xi\, d\zeta\, \delta\big(z+(x,\xi)-\zeta\big)g_k(\xi,\zeta)d\xi d\zeta,$$

$$g_k(\xi,\zeta) := \frac{\partial^{k+1}}{\partial\zeta^{k+1}}f_k(\xi,\zeta).$$

Заметим теперь, что функцию $H_k(x,z)$ можно рассматривать при фиксированном $x$ как интеграл по параметру $\xi$ от свертки по переменной

$z$ обобщенных функций $g_k(\xi, z)$ и $\delta\big(z + (x,\xi)\big)$:

$$H_x(x,z) = \int d\xi \Big(\delta\big(z + (x,\xi)\big) * g_k(\xi, z)\Big). \tag{26}$$

Переходя в равенстве (26) к преобразованию Фурье по $z$, найдем с учетом того, что: $\Phi_{z\to q}\big(\delta(z-a)\big) = e^{-iaq}$

$$\Phi_{z\to q}\big(H_k(x,z)\big) = \int d\xi e^{iq(x,\xi)} \widetilde{g}_k(\xi, q) = \widehat{g}_k(p,q)|_{p=-qx}, \tag{27}$$

где через $\widetilde{g}_k(\xi, q)$ обозначено $\widetilde{g}_k(\xi, q) := \Phi_{z\to q}\big(g_k(\xi,z)\big)$, через $\widehat{g}_k(p,q) := \Phi_{\xi\to p, z\to q}\big(g_k(\xi,z)\big)$. В итоге необходимое и достаточное условие (25) локализации источника на бесконечности в терминах преобразования Фурье имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^k \widehat{g}_k(-qx, q) = 0. \tag{28}$$

## Список литературы


1. A. Blagovestchensky, *On wave fields the sources disposed in the infinity.* — J. Inv. Ill-posed Problems **16** (2008), 1–11.
2. А. С. Благовещенский, *Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014).
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* М., Мир, 1964.
4. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых задачах для волнового уравнения.* Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Л., Наука, 1971.
5. З. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени.* М., Мир, 1988.
6. А. С. Благовещенский, *Обобщенный оператор Даламбера на компактифицированном псевдоэвклидовом пространстве.* — Матем. заметки **85** No. 5, (2009).
7. H. Bateman, *The conformal transformations in four dimensions and their applications to geometrical optics.* — Proc. London Math. Soc. **7** (1909), 70–89.



Blagoveschensky A. S. On waves generated by sources localized at infinity.

The space-time $\mathbb{R}^4$ is compactified by adding the manifold of infinitely distant points. The problem of constructing the solution of the wave equation with the right-hand side (the source of waves) which is a generalized function supported by the variety of infinitely distant points is posed and solved. Strict necessary and sufficient conditions that the source must satisfy, are formulated.

Физический факультет
С.-Петербургский
государственный университет
*E-mail*: a.blagoveshchensky@spbu.ru

Поступило 1 ноября 2018 г.