Доклады Академии наук
1992. Том 323, № 5

УДК 517.547.22+517.982.274 МАТЕМАТИКА

© А.В. АБАНИН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ОБОБЩЕННЫХ ЭКСПОНЕНТ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 3 II 1992)

1. Пусть E – локально-выпуклое пространство, элементами которого являются аналитические функции; f – целая функция, для которой $f(\lambda z) \in E$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$; $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность комплексных чисел. Последовательность $f(\Lambda) := \{f(\lambda_k z)\}$ называется абсолютно представляющей системой (АПС) в E [1], если каждую функцию $x \in E$ можно представить в виде суммы ряда $x(z) = \Sigma c_k f(\lambda_k z)$, $c_k \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, абсолютно сходящегося в E.

Исследования, связанные с АПС $f(\Lambda)$, охватывают широкий спектр проблем, начиная с методов построения конкретных АПС такого вида и кончая их приложениями к уравнениям типа свертки (см., например, [1–4]). При этом значительное внимание уделяется задаче о характеризации АПС $f(\Lambda)$ в различных терминах [1, 5–8]. В настоящей работе в достаточно общей ситуации, включающей как частный случай ряд известных систем и пространств, устанавливаются критерии того, будет $f(\Lambda)$ АПС в E или нет в зависимости от распределения Λ на плоскости. Метод исследования основан на использовании аппарата слабо достаточных множеств, непосредственным образом связанных с АПС вида $f(\Lambda)$ (по поводу этой связи см. [1, 5]). Перейдем к формулировке основных результатов.

2. Пусть $\rho \in (0, \infty)$; $\rho(r)$ $(\to \rho)$ – уточненный порядок в смысле Валирона; $\nu(r) = r^{\rho(r)}$; $H(\theta)$ – ограниченная 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция, для которой

$$\min_{\theta} [H(\theta) + H(\theta + \pi/\rho)] > 0.$$

Символом $[\rho(r), H)$ ($[\rho(r), H]$) обозначается пространство всех целых функций, имеющих при уточненном порядке $\rho(r)$ конечный тип и индикатор $< H(\theta)$ ($\leqslant H(\theta)$).

Возьмем неубывающую последовательность $\{H_n\}$ 2π-периодических ρ-тригонометрически выпуклых функций, аппроксимирующих $H(\theta)$ снизу. Для $\Omega \subset \mathbf{C}$ обозначим через τ_Ω топологию внутреннего индуктивного предела полунормированных пространств $E_{n,\Omega} = \{x \in [\rho(r), H): \|x\|_{n,\Omega} = \sup_{z \in \Omega} |x(z)| \times \exp[-\nu(|z|) H_n(\arg z)] < \infty\}$ в $[\rho(r), H)$. Всегда τ_Ω не сильнее $\tau_{\mathbf{C}}$. В случае, когда эти топологии совпадают, Ω называется слабо достаточным множеством (СДМ) для $[\rho(r), H)$.

Всюду в дальнейшем $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Через $n(\Lambda, X)$ обозначим число точек из Λ, попавших в множество X. Пусть K – компакт в $\mathbf{C}$ и $K(\delta)$ – δ-расширение K, т.е. $K(\delta) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{z\in K} C(z,\delta)\right)$, где $C(z,\delta) = \{w\colon\ |w-z| \leqslant \delta\}$. Положим

$$d^*_\Lambda(K,\delta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(\Lambda, rK(\delta))}{\nu(r)}, \qquad d^*_\Lambda(K) = \lim_{\delta\to 0} d^*_\Lambda(K,\delta).$$

Пусть, далее,

$$\gamma_\Lambda(\delta) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\nu(|\lambda_k|)} \int_0^{\delta|\lambda_k|} \frac{n(\Lambda, C(\lambda_k, x)) - 1}{x}\, dx, \quad \gamma_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \gamma_\Lambda(\delta).$$

Величина $d^*_\Lambda(K)$ характеризует глобальную плотность распределения Λ, а γ_Λ – локальную степень близости ее точек друг к другу. Наконец, обозначим через μ_H меру, ассоциированную по Риссу с субгармонической функцией $|z|^\rho H(\arg z)$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы последовательность Λ была СДМ для $[\rho(r), H)$, необходимо и достаточно, чтобы она содержала подпоследовательность M, удовлетворяющую условиям*:

(1) $d^*_M(K) \geqslant \mu_H(K)$ *для любого компакта K из* $\mathbf{C}$;

(2) $\gamma_M = 0$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 1. Д о с т а т о ч н о с т ь. Допустим, что для некоторой подпоследовательности M из Λ выполнены условия (1) и (2). Пусть $k > 1$, $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$, $S(k,\alpha,\beta) = z\colon \{1 \leqslant |z| \leqslant k, \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta\}$. Положим

$$d_M(\alpha,\beta) = \lim_{k\to 1} \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(\Lambda, rS(k,\alpha,\beta))}{\nu(kr) - \nu(r)};$$

$$\Delta_H(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi\rho}\left[H'(\beta-0) - H'(\alpha+0) + \rho^2 \int_\alpha^\beta H(\theta)\, d\theta\right].$$

Применив условие (1) к $K = S(k,\alpha,\beta)$, получим, что

(1′) $d_M(\alpha,\beta) \geqslant \Delta_H(\alpha,\beta)$ при всех α и β, $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$.

Тогда по теореме 1 из [7] M и тем более $\Lambda \supset M$ является СДМ для $[\rho(r), H)$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Остановимся на центральном месте в доказательстве необходимости, после которого нетрудно установить существование $M \subset \Lambda$ со свойствами (1) и (2).

Зафиксируем $\epsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\max\{\nu(|w|)H(\arg w)\colon\ w \in C(z, \delta|z|)\} \leqslant \nu(|z|)\ [H(\arg z) + \epsilon]$ при больших $|z|$. Далее, Λ разбивается на две подпоследовательности $M(\epsilon)$ и $\Lambda(\epsilon)$ так, чтобы $\gamma_{M(\epsilon)}(\delta) \leqslant \epsilon$ и чтобы

(3) $$\frac{1}{\nu(|\lambda|)} \int_0^{\delta|\lambda|} \frac{n(M(\epsilon), C(\lambda, x))}{x}\, dx > \epsilon, \quad \forall \lambda \in \Lambda(\epsilon).$$

Покажем, что $d^*_{M(\epsilon)}(K, 3\delta) \geqslant \mu_H(K)$ для любого компакта K. Именно это соотношение и играет основную роль в доказательстве необходимости. Предположим, рассуждая от противного, что для некоторого компакта K $d^*_{M(\epsilon)}(K, 3\delta) < \mu_H(K)$. Тогда, используя соображения, аналогичные приведенным в [7, с. 10–11], устанавливаем, что имеются $n \geqslant 1$; $r_m \uparrow \infty$ и целые функции φ_m из $[\rho(r), H_n]$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условиям

(4) $|\varphi_m(z)| \leqslant \exp\{\nu(|z|)[H_n(\arg z) + o(1)]\}$, $z \notin r_m K(2\delta)$, $z\to\infty$;

(5) $\exists\, \xi_m \in r_m K(2\delta)$: $|\varphi_m(\xi_m)| \geqslant \exp\{\nu(|\xi_m|)[H_n(\arg \xi_m) + \sigma]\}$;

(6) $\varphi_m(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in M(\epsilon) \cap (r_m K(3\delta))$,

где функция $o(1)$ и $\sigma > 0$ не зависят от m.

Учитывая (3), (6) и выбор δ и применяя формулу Иенсена к функции φ_m в круге $C(\lambda, \delta|\lambda|)$, где $\lambda \in \Lambda(\epsilon) \cap (r_m K(2\delta))$, получаем, что $|\varphi_m(\lambda)| \leqslant \exp \nu(|\lambda|)\, H_n(\arg \lambda)$ для таких λ, $m \geqslant m_0$. Отсюда и из (4) следует, что $\{\varphi_m\}$ – ограниченная в $[\rho(r), H_n]$ последовательность при наделении этого пространства топологией, определяемой набором преднорм

$$P_\Lambda = \left\{ \sup_{z \in \Lambda} |x(z)| \exp\left[-\nu(|z|)(H_n(\arg z) + \omega)\right] : \ \omega > 0 \right\}.$$

С другой стороны, из (5) заключаем, что $\{\varphi_m\}$ не ограничена в том же пространстве $[\rho(r), H_n]$ при наделении его топологией, задаваемой набором норм P_C. Но тогда по лемме 5 из [7] Λ не может быть СДМ в $[\rho(r), H)$. Противоречие.

Приводимый ниже результат следует из теоремы 1 и дает характеризацию СДМ для $[\rho(r), H)$ в различных терминах.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы последовательность Λ была СДМ для $[\rho(r), H)$, необходимо и достаточно, чтобы она содержала подпоследовательность M, удовлетворяющую хотя бы одному из следующих условий*:

а) *для M имеют место условия* (1) *и* (2);

б) *для M выполняются условия* (1′) *и* (2);

в) *M имеет при показателе $\rho(r)$ угловую плотность, равную $\Delta_H(\alpha, \beta)$, и выполняется* (2);

г) *существует целая функция L вполне регулярного роста с индикатором $H(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ и простыми нулями в точках из M, для которой совокупность всех ее нулей отличается от M не более чем на последовательность с нулевой плотностью и*

$$\lim_{k \to \infty,\ \lambda_k \in M} \left[\frac{1}{\nu(|\lambda_k|)} \ln |L'(\lambda_k)| - H(\arg \lambda_k) \right] = 0.$$

3. Применим теорему 2 к АПС вида $f(\Lambda)$. Пусть E – локально-выпуклое пространство аналитических функций и E'_β – сильное сопряженное к нему. Предположим, что обобщенное преобразование Лапласа T: $\forall \varphi \in E' \to \varphi(f(\lambda z))$ устанавливает топологический изоморфизм между E'_β и $[\rho(r), H)$. В терминологии работы [5] это означает, что E'_β допускает f-описание и это f-описание совпадает с $[\rho(r), H)$. Тогда, как показано в [5], $f(\Lambda)$ – АПС в E тогда и только тогда, когда Λ – СДМ для $[\rho(r), H)$. Отсюда и из теоремы 2 следует

Т е о р е м а 3. *Пусть пространство E и целая функция f таковы, что E'_β допускает f-описание в виде $[\rho(r), H)$. Для того чтобы $f(\Lambda)$ была АПС в E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий* а) – г) *теоремы* 2.

Следуя [1], будем говорить, что в E имеется нетривиальное разложение нуля (НРН) по системе $f(\Lambda)$, если найдется абсолютно сходящийся в E ряд вида $\Sigma c_k f(\lambda_k z)$, сумма которого равна нулю, а хотя бы один из коэффициентов c_k отличен от нуля.

С л е д с т в и е. *В предположениях теоремы* 3 *$f(\Lambda)$ является АПС в E тогда и только тогда, когда Λ содержит подпоследовательность M с угловой плотностью $\Delta_H(\alpha, \beta)$ такую, что в E имеется НРН по системе $f(M)$.*

Доказательство следствия проводится с помощью условия г) по схеме, разработанной Ю.Ф. Коробейником (см., например, [1]).

Теорема 3 позволяет дать полное описание последовательностей показателей

АПС вида $f(\Lambda)$ в различных пространствах. Для этого, очевидно, достаточно иметь соответствующее утверждение об f-описании сопряженного пространства.

П р и м е р ы. 1) Пусть $E_\rho(z) = \sum_{n\geq 0} z^n/\Gamma(1+n/\rho)$ – функция Миттаг-Леффлера; G – ограниченная ρ-выпуклая область с ρ-опорной функцией $H(-\theta)$ (при $\rho = 1$ имеем $E_1(z) = \exp z$ и выпуклую область). Обозначим через $\mathcal{H}(G)$ пространство всех функций, аналитических в области G, наделенное топологией компактной сходимости. Как известно [1], $(\mathcal{H}(G))'_\beta$ допускает E_ρ-описание, совпадающее с $[\rho, H)$.

2) Пусть $\rho_1(r)$ – уточненный порядок, $\rho_1(r) \to \rho_1 > 1$; $H_1(\theta)$ – ограниченная 2π-периодическая ρ_1-тригонометрически выпуклая положительная функция, причем $|z|^{\rho_1}H_1(\arg z)$ выпукла относительно z. Положим $\rho(t) = \rho_1(r)/[\rho_1(r) - 1]$, где $r^{\rho_1(r)-1} = t$; $H(\theta) = \sup\{\operatorname{Re}(z\exp i\theta) - |z|^{\rho_1}H_1(\arg z) : z \in \mathbf{C}\}$. Тогда $[\rho_1(r), H_1]'_\beta$ допускает exp-описание в виде $[\rho(r), H)$ (см. [9]).

Поскольку формулировки результатов, связанных с примерами 1) и 2), подобны друг другу, то мы приведем только тот, который относится к системам Миттаг-Леффлера и является обобщением и усилением соответствующих ему утверждений из [1–8]. Заметим только, что аналог приводимой ниже теоремы 4 в ситуации примера 2) содержит как частный случай и усиливает результаты из [10] для АПС экспонент в $[\rho_1(r), H_1]$.

Т е о р е м а 4. *Пусть G – ограниченная ρ-выпуклая область с ρ-опорной функцией $H(-\theta)$. Для того чтобы последовательность $E_\rho(\Lambda)$ была АПС в $\mathcal{H}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий* а) – г) *теоремы* 2 (*при $\rho(r) \equiv \rho$*) *либо чтобы нашлась такая подпоследовательность M из Λ с угловой плотностью при показателе ρ, равной $\Delta_H(\alpha, \beta)$, что*:

i_1) *в $\mathcal{H}(G)$ существует НРН по системе $E_\rho(M)$*;

или, что равносильно,

i_2) *имеется абсолютно сходящееся в $\mathcal{H}(G)$ разложение по крайней мере одной функции $E_\rho(\lambda z)$, $\lambda \notin M$, в ряд по системе $E_\rho(M)$.*

Аналоги теоремы 4 можно сформулировать и для других пространств и функций f. Например, для системы $f(\Lambda)$ в $\mathcal{H}(K_R)$, где f – целая функция с тейлоровскими коэффициентами, модули которых ведут себя достаточно правильно, $K_R = \{z : |z| < R\}$ или для АПС вида $\{\mathcal{K}_\alpha(\lambda_k, z)\}$ в $\mathcal{H}(G)$, где G – (ρ, α)-выпуклая область, рассматривавшихся в [11].

Ростовский государственный университет
Ростов-на-Дону

Поступило
13 II 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробейник Ю.Ф.* – УМН, 1981, т. 36, вып. 1, с. 73–126. 2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с. 3. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. 320 с. 4. *Коробейник Ю.Ф.* – Мат. сб., 1991, т. 182, № 5, с. 661–680. 5. *Коробейник Ю.Ф.* – Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986, т. 50, № 3, с. 539–565. 6. *Пасечник Г.М.* – ДАН, 1980, т. 252, № 3, с. 535–555. 7. *Абанин А.В.* – Мат. заметки, 1991, т. 49, вып. 2, с. 3–13. 8. *Абанин А.В.* – Изв. вузов. Математика, 1991, № 2, с. 3–12. 9. *Gruman L.* – Glasgow Math. J., 1973, vol. 14, № 2, p. 161–167. 10. *Мелихов С.Н.* – Изв. вузов. Математика, 1990, № 8, с. 53–65. 11. *Маергойз Л.С.* – ДАН, 1985, т. 285, № 5, с. 1058–1061.