

ЧЕРЕПЕНИН Н. Д.

## К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

Известны различные методы решения плоских задач о движении тел под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкости (см., например, [1]), каждый из которых развит в рамках тех или иных упрощающих предположений и применим к какому-либо специальному, часто узкому классу задач. Здесь предлагается некоторая общая схема, которая может быть использована для решения стационарных и квазистационарных задач указанного типа, линейаризованных в предположениях теории волн малой амплитуды, при совместном или раздельном учете сил тяжести, поверхностного натяжения, неравномерности давления на свободной поверхности и т. п., а также в случае поверхности раздела двух жидкостей разной плотности.

Указанные задачи могут быть сформулированы в общем виде следующим образом:

Пусть  $D$  — двусвязная область плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , заключенная между осью  $x$  и простым замкнутым контуром  $C$  — обтекаемым профилем, расположенным в нижней полуплоскости. Требуется определить функцию  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  — комплексный потенциал возмущений или его составляющую в базисе  $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$  (для квазистационарной задачи), аналитическую в  $D$  и удовлетворяющую граничным условиям

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} w = u(s) \quad \text{на } C, \quad (1)$$

$$\operatorname{Re} \{L_n w\} = q(x) \quad \text{при } y = 0, \quad (2)$$

где  $u(s)$  — заданная функция дуговой абсциссы  $s$  на  $C$ , определяемая законом движения контура,  $L_n$  — линейный дифференциальный оператор

$$L_n w = \sum_{j=0}^n a_j \frac{d^j w}{dz^j}, \quad (3)$$

вид которого зависит от учитываемых физических эффектов и закона движения контура  $C$ .

Например:

$$а) \quad L_n \varpi = \frac{d\varpi}{dz} + i \frac{g}{V^2} \varpi$$

— для случая поступательного движения тела со скоростью  $V$  под свободной поверхностью тяжелой жидкости ( $g$  — ускорение свободного падения),

$$б) \quad L_n \varpi = -i \frac{d\varpi}{dz} + \frac{\omega^2}{g} \varpi$$

— для случая установившихся колебаний контура с угловой частотой  $\omega$  под свободной поверхностью тяжелой жидкости,

$$в) \quad L_n \varpi = -i \frac{\alpha}{\rho V^2} \frac{d^2 \varpi}{dz^2} + \frac{d\varpi}{dz} + i \frac{g}{V^2} \varpi$$

— для того же движения, что и в а), но с учетом силы поверхностного натяжения  $\alpha$  ( $\rho$  — плотность жидкости),

$$г) \quad L_n \varpi = i \frac{\alpha}{\rho g} \frac{d^3 \varpi}{dz^3} - i \frac{d\varpi}{dz} + \frac{\omega^2}{g} \varpi$$

— при учете поверхностного натяжения для движения, такого же, как и в б).

Функция  $q(x)$ , фигурирующая в (2), определяется заданным распределением давления  $p$  на поверхности жидкости. Так, в случаях а) и в)

$$q(x) = \frac{p(x) - p_\infty}{\rho V}$$

В приведенных примерах коэффициенты  $a_j$  в (3) суть комплексные постоянные, хотя это и не является необходимым условием для дальнейшего; достаточно того, чтобы  $a_j(x)$  можно было аналитически продолжить во всю комплексную плоскость (например, если  $a_j(z)$  — целые функции).

Следует отметить, что единственность решения поставленной задачи обеспечивается, вообще говоря, лишь при выполнении некоторых дополнительных условий, которые в вышеприведенных примерах формулируются как известные условия на бесконечности (так называемые условия излучения) [6], [7].

Сформулированная задача может быть отнесена к классу краевых задач теории потенциала, известных под названием обобщенных задач Римана — Гильберта — Пуанкаре [2] для

многовязной области\*. Исследование подобных задач в общей постановке дано в работах [3], [4]. Здесь предлагается иная схема решения, развитая применительно к данной задаче, учитывающая особенности последней и являющаяся эффективной для ряда вышеупомянутых гидродинамических приложений.

Если  $E(C)$  — область вне контура  $C$ , то нахождение функции  $w_c(z)$ , аналитической в  $E(C)$  и удовлетворяющей на  $C$  условию (1), является по существу задачей Неймана, решение которой обычно не представляет трудностей и часто выражается в замкнутой форме. С точки зрения гидродинамики — это классическая задача обтекания контура, движущегося по заданному закону. Здесь мы будем считать функцию  $w_c(z)$  известной.

Введем в рассмотрение еще функцию  $G_\tau(z)$ , аналитическую в  $E(C)$  и удовлетворяющую граничным условиям

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} \left[ G_\tau(z) + \frac{M}{z - \tau} \right] = 0 \text{ при } z \in C, \quad (4)$$

$$G_\tau(\infty) = 0,$$

где  $\tau \in E(C)$ ,  $M = \text{const}$ .

Нетрудно доказать существование и единственность этой функции и построить ее в такой форме

$$G_\tau(z) = - \left[ M \chi_\tau(z) + r^2 \frac{M \zeta'(\tau) / \zeta^2(\tau)}{\zeta(z) - r^2 / \zeta(\tau)} \right], \quad (5)$$

где

$$\chi_\tau(z) = \begin{cases} \frac{\zeta(z) - \zeta(\tau) - \zeta'(\tau)(z - \tau)}{(z - \tau)[\zeta(z) - \zeta(\tau)]} & \text{при } z \neq \tau, \\ \zeta''(\tau) / 2\zeta'(\tau) & \text{при } z = \tau, \end{cases}$$

а  $\zeta(z)$  — функция, конформно отображающая область  $E(C)$  на  $E(K)$  — внешность круга  $K$  радиуса  $r$  в плоскости  $\zeta$  [7]. Обратная функция в  $E(K)$  может быть разложена в ряд Лорана

$$z = \zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \dots, \quad (6)$$

причем точка  $z = k_0$  является конформным центром тяжести контура  $C$ .

\* Граничному условию (1) для однообразия с (2) можно придать вид

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \frac{dw}{dz} \right\} = u(s) \text{ на } C,$$

где  $\theta = \theta(s)$  — угол между осью  $x$  и внешней нормалью к контуру  $C$ .

Легко убедиться, что

$$G_\tau(z) = O(\tau^{-2}) \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Кроме того, если контур  $C$  в плоскости  $z$  удалять, устремляя  $k_0 \rightarrow \infty$  при фиксированных  $k_1, k_2, \dots$ , то из (6) вытекают такие соотношения эквивалентности

$$\begin{aligned} |\zeta(z)| &\sim |k_0|, \quad |\zeta'(z)| \sim 1, \quad |\zeta''(z)| \sim 2 \frac{|k_1|}{|k_0|^3}, \quad |\zeta'''(z)| \sim \\ &\sim 6 \frac{|k_1|}{|k_0|^4}, \quad \dots, \end{aligned}$$

при учете которых из (5) следует, что

$$|G_\tau(z)| \sim |M| \frac{|k_1| + r^2}{|k_0|^3} \text{ при } k_0 \rightarrow \infty, \quad (7)$$

т. е. абсолютная величина  $G_\tau(z)$  быстро убывает при удалении контура  $C$  в бесконечность.

Заметим, что с гидродинамической точки зрения функция  $G_\tau(z)$  представляет собой комплексный потенциал возмущений, вносимых присутствием контура  $C$  в поле скоростей, индуцируемых диполем с комплексным моментом  $-2\pi M$ , помещенным в точке  $\tau$ , при безциркуляционном обтекании контура.

Следует отметить, что рассматриваемую задачу можно обобщить на случай, когда контур  $C$  состоит из  $m$  замкнутых кривых — обтекаемых профилей ( $m \geq 1$ ). Существование и единственность функции  $G_\tau(z)$  в этом случае, как легко убедиться, вытекают из решения так называемой видоизменённой задачи Дирихле [2], однако построение  $G_\tau(z)$  в замкнутом виде уже не представляется возможным.

Решение поставленной задачи будет, вообще говоря, многозначной функцией. Ограничимся здесь ради краткости нахождением однозначного решения. В классе многозначных функций задача может быть обычно решена путем введения добавочных членов в виде элементарных многозначных функций, что не доставляет каких-либо принципиальных дополнительных трудностей [6], [7].

Известно, что однозначная аналитическая в многосвязной области функция может быть представлена в виде интеграла типа Коши с действительной плотностью, взятого по границе области [2]. Следовательно, имеет место такое представление искомого решения

$$\omega(z) = \omega_c(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\tau)}{z - \tau} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mu(\tau)}{z - \tau} d\tau,$$

причем  $\mu(\tau)$  — действительная непрерывная функция.

Рассмотрим сумму  $\sigma(z) = w_c(z) + v(z) + \Phi(z)$ , в которой

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\tau)}{z - \tau} d\tau, \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z, \tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где  $F(z, \tau) = 2\pi i G_\tau(z)$ , если  $G_\tau(z)$  определяется равенством (5) при  $M = \frac{1}{2\pi i}$ . Тогда на основании (4)

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} [v(z) + \Phi(z)] = 0 \text{ при } z \in C,$$

$$\Phi(\infty) = 0$$

и разность

$$R(z) = w(z) - \sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mu(\tau)}{z - \tau} d\tau - \Phi(z),$$

будучи регулярной всюду в  $E(C)$  и обращающейся в нуль на бесконечности, удовлетворяет условию  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} R(z) = 0$  на  $C$ , т. е. тождественно равна нулю в  $E(C)$ .

Таким образом, справедливо следующее интегральное представление искомой функции, автоматически удовлетворяющее условию (1):

$$w(z) = w_c(z) + v(z) + \Phi(z). \quad (9)$$

Входящая в него действительная функция  $\mu(\tau)$  ( $-\infty < \tau < \infty$ ) подлежит определению из условия (2) на оси  $x$  при учете вышеупомянутых дополнительных условий.

Результат подстановки (9) в (2) запишем в виде равенства

$$\operatorname{Re} \{L_n v + L_n [w_c + \Phi]\} = q(x) \text{ при } y = 0,$$

которое, очевидно, эквивалентно следующему

$$\operatorname{Re} \{L_n v + \bar{L}_n [\bar{w}_c + \bar{\Phi}]\} = q(x) \text{ при } y = 0.$$

Здесь

$$\bar{w}_c(z) = \overline{w_c(\bar{z})}, \quad \bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \bar{L}_n = \sum_{j=0}^n \bar{a}_j \frac{d^j}{dz^j}.$$

Теперь, как легко видеть, в фигурные скобки заключена функция, аналитическая во всей нижней полуплоскости, в которой, следовательно, имеет место равенство

$$L_n v + \bar{L}_n [\bar{w}_c + \bar{\Phi}] = S q, \quad (10)$$

где  $S$  — оператор Шварца для нижней полуплоскости

$$Sq = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)}{z - \tau} d\tau + iC_0, \quad (11)$$

$C_0$  — произвольная действительная постоянная.

Равенство (10) можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение относительно функции  $v(z)$

$$L_n v = f(z),$$

$$f(z) = Sq - \bar{L}_n(\bar{w}_\epsilon + \bar{\Phi}),$$

общее решение которого может быть записано в виде

$$v(z) = L_n^{-1} f = \sum_{j=1}^n \varphi_j(z) \int \frac{A_{nj}(u)}{W_n(u)} f(u) du. \quad (12)$$

Здесь  $\varphi_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — фундаментальная система решений однородного уравнения  $L_n v = 0$ ,

$$W_n(z) = W_n(z_0) \exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{a_{n-1}}{a_n} du\right)$$

— соответствующий детерминант Вронского,

$$A_{nj}(z) = (-1)^{n+j} \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \dots & \varphi_{j-1}(z) & \varphi_{j+1}(z) & \dots & \varphi_n(z) \\ \varphi'_1(z) & & \varphi'_{j-1}(z) & \varphi'_{j+1}(z) & & \varphi'_n(z) \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(z) & \dots & \varphi_{j-1}^{(n-2)}(z) & \varphi_{j+1}^{(n-2)}(z) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(z) \end{vmatrix}.$$

Эти формулы упрощаются для физически реальных решений вышеуказанных задач гидродинамики, для которых  $a_j = \text{const}$ , а  $\varphi_j(z) = e^{s_j z}$ , где числа  $s_j$  — корни характеристического многочлена  $Q_n(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j$  — имеют вид  $s_j =$

$= -2\pi i/\lambda_j$ , в котором  $\lambda_j$  — длины свободных волн, отвечающих решению соответствующей однородной задачи при отсутствии контура  $C$ . Тогда вместо (12) имеем согласно [8]

$$v(z) = L_n^{-1} f = \sum_{j=1}^n \frac{e^{s_j z}}{Q'_n(s_j)} \int e^{-s_j u} f(u) du. \quad (13)$$

Произвольные константы, появляющиеся в результате операций (11), (12) или (13), подлежат определению из вышеупомянутых дополнительных условий.

Подставляя в (12) или (13) выражение для  $f(z)$  и учитывая (8), после перестановки порядка интегрирования получаем

$$v(z) = H_n q - K_n \bar{w}_c + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} K_n \bar{F} \mu(\tau) d\tau, \quad (14)$$

где  $H_n = L_n^{-1} S$ ,  $K_n = L_n^{-1} \bar{L}_n$ .

Этому равенству соответствует операторное уравнение для определения  $\mu(x)$

$$\mu = \beta + A\mu, \quad (15)$$

в котором линейный интегральный оператор  $A$  имеет вид

$$A\mu = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (16)$$

$$K(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \{ K_n \bar{F} \}_{z=x},$$

а свободный член определяется как

$$\beta(x) = 2 \operatorname{Re} \{ H_n q - K_n \bar{w}_c \}_{z=x}.$$

Во всем этом легко убедиться, устремив в (14) точку  $z$  к оси  $x$  ( $y \rightarrow 0$ ) и выделив в предельном равенстве действительную часть.

Таким образом, задача сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода (15) в некотором функциональном пространстве  $E$ .

Следует подчеркнуть одно важное свойство оператора  $A$  (16). Соотношение (7), записанное для  $F(x, \tau)$ , показывает, что величина  $|F(x, \tau)| = O(h^{-3})$  при  $h \rightarrow \infty$ , т. е. быстро убывает с ростом погружения  $h$  контура  $C$ . Это дает основание считать, что  $K(x, \tau)$  и  $\|A\|_{E \rightarrow E}$  также будут стремиться к нулю при  $h \rightarrow \infty$ . Следовательно, начиная с некоторого погружения  $h_0$ ,

$$\|A\|_{E \rightarrow E} < 1 \text{ при } h > h_0 \quad (17)$$

и при этом уравнение (15) будет иметь одно и только одно решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений в виде ряда

$$\mu = \beta + A\beta + A^2\beta + \dots, \quad (18)$$

сходящегося к искомой функции  $\mu(x)$  в смысле метрики пространства  $E$  [9].

Так, в вышеуказанных задачах о поступательном движении и колебаниях контура под свободной поверхностью жидкости можно установить, что для пространства  $C_M$  непрерывных и ограниченных на оси  $x$  функций

$$\|A\|_{C_M \rightarrow C_M} = \sup_x \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, \tau)| d\tau = O(h^{-2}) \text{ при } h \rightarrow \infty,$$

и получить оценки для величин  $h$ , при которых заведомо выполняется условие (17) и ряд (18) сходится к искомому решению  $\mu(x)$  абсолютно и равномерно [5], [6], [7].

Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим решение задачи о поступательном движении цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости (случай а, причем  $u(s) = V \cos \vartheta(s)$ ,  $q(x) = 0$ ). Легко убедиться, что в этом случае

$$w_c(z) = -V \frac{r^2}{z + ih}, \quad F(z, \tau) = \frac{r^2}{(\tau - ih)^2 \left( z + ih - \frac{r^2}{\tau - ih} \right)},$$

если  $r$  — радиус цилиндра,  $-ih$  — координата его центра.

Уравнение (14), равносильное полученному из него интегральному уравнению (15), при учете условия излучения

$$\frac{dw}{dz} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty$$

приобретает вид ( $v = g/V^2$ )

$$v(z) = V r f_1(z - ih) + \frac{r^2}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - ih - \frac{r^2}{\tau + ih}} - 2i\nu e^{-i\nu z} \int_{+\infty}^z \frac{e^{i\nu u} du}{u - ih - \frac{r^2}{\tau + ih}} \right] \frac{\mu(\tau)}{(\tau + ih)^2} d\tau \right\},$$

и если воспользоваться разложением

$$\frac{1}{z - ih - \frac{r^2}{\tau + ih}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(z - ih)^{k+1} (\tau + ih)^k}$$

и учесть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\tau)}{(\tau + ih)^{k+1}} d\tau = -\frac{2\pi i}{k!} \frac{d^k v}{dz^k}(-ih) \quad (k = 0, 1, \dots),$$

то в результате получим

$$v(z) = Vrf_1(z - ih) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} f_k(z - ih) \frac{d^k v}{dz^k}(-ih). \quad (19)$$

Здесь и выше

$$f_k(z) = r^k \left( \frac{1}{z^k} - 2i\gamma e^{-i\gamma z} \int_{+\infty}^z \frac{e^{i\gamma u}}{u^k} du \right) = \\ = \frac{(i\gamma)^k}{(k-1)!} \left\{ \frac{(k-1)!}{(i\gamma z)^k} + 2 \left[ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(l-1)!}{(i\gamma z)^l} - e^{-i\gamma z} \text{Ei}(i\gamma z) \right] \right\},$$

$\gamma = \nu r$ ,  $\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^u}{u} du$  — интегральная показательная функция.

Дифференцируя уравнение (19) в точке  $-ih$  и обозначая

$$q_k = k! \alpha^{-(k+1)} + 2 \left[ \sum_{l=1}^k (l-1)! \alpha^{-l} - e^{-\alpha} \text{Ei}^*(\alpha) \right] + 2\pi i e^{-\alpha}, \\ \alpha = 2h\nu, \quad \text{Ei}^*(x) = \text{Re Ei}(x),$$

будем иметь (20)

$$\frac{d^j v}{dz^j}(-ih) = (-i\nu)^{j-1} \left[ V\gamma^2 q_j - \sum_{k=1}^{\infty} q_{j+k-1} \gamma^{k+1} \frac{(ir)^{k-1}}{(k-1)! k!} \frac{d^k v}{dz^k}(-ih) \right].$$

Соотношения (19) и (20) позволяют методом последовательных итераций получать приближения сколь угодно высокого порядка для функции  $v(z)$ , а следовательно, и для  $\mu(x)$ . При этом если в правую часть (20) подставляется  $m$ -е приближение величин  $\frac{d^k v}{dz^k}(-ih)$ , то в левой части получается  $(m+1)$ -е приближение для  $\frac{d^j v}{dz^j}(-ih)$ , что, как легко видеть, соответствует схеме (18) для нахождения  $\mu(x)$ .

Вместо бесконечных рядов в (19) и (20) при вычислениях следует использовать ряды, усеченные в соответствии с требуемой степенью точности, тогда и результирующие соотношения записываются в виде усеченных степенных рядов.

Подобная процедура проделана в работе [10], в результате чего были получены формулы весьма высокой точности для гидродинамических характеристик течения и показано, что даже для небольших значений  $h/r$  уже в результате

первых трех итераций достигается практически точный результат. Это свидетельствует о высокой скорости сходимости указанных последовательных приближений.

Аналогичные результаты получены и при решении задачи о цилиндре, осциллирующем вблизи границы раздела двух жидкостей разной плотности [11], т. е. при условиях на оси  $x$  более общего вида, чем в случае *б*. Заметим, что первая задача была решена в [10] также для поверхности раздела.

В заключение добавим, что предлагаемый метод может быть применен также для учета эффектов, вносимых нелинейностью точных граничных условий на поверхности жидкости, когда это делается посредством асимптотической схемы возмущений [12], позволяющей свести нелинейную задачу к последовательности задач, принадлежащих к рассмотренному в настоящей статье классу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панченков А. Н. Гидродинамика подводного крыла. Киев, „Наукова думка“, 1965.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., „Наука“, 1968.
3. Шерман Д. И. К общей задаче теории потенциала. — „Изв. АН СССР, сер. матем.“, 1946, т. 10, № 2.
4. Хасанов Э. Г. Обобщенная краевая задача Гильберта. — „Уч. зап. Ростовского-на-Дону ун-та“, 1959, т. 66, вып. 7.
5. Черепенин Н. Д. О движении цилиндра под свободной поверхностью жидкости. — „Изв. вузов. Математика“, 1976, № 6.
6. Черепенин Н. Д. Один метод решения задачи о движении тел вблизи поверхности раздела двух жидкостей. — Сборник аспирантских работ. Математика. Механика. Казань, Изд-во КГУ, 1973.
7. Черепенин Н. Д. О колебаниях контура вблизи поверхности раздела двух жидкостей. — Труды семинара по крайевым задачам, вып. 11, Изд-во Казан. ун-та, 1974.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., „Наука“, 1971.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., „Наука“, 1965.
10. Черепенин Н. Д. К задаче о движении круглого цилиндра вблизи границы раздела двух жидкостей. — Труды семинара по теории оболочек, вып. 4. Казанск. физ.-тех. ин-т, АН СССР, 1974.
11. Черепенин Н. Д. Задача о цилиндре, осциллирующем вблизи границы раздела двух жидкостей. — Там же.
12. Salvesen N. On higher-order wave theory for submerged two-dimensional bodies. — J. Fluid Mech., v. 38, p. 2, 1968.

*Доложено на семинаре 30 января 1976 г.*