Г. П. Емгушева, В. А. Ногин, О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с нестандартным урезанием,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 71–74

Поскольку $\| F_1^{(j)}(p_0) \| \frac{1}{j \cdot 2^j} \to 0$ при $j \to \infty$ (так же, как и при фиксированном r_0, $r_0 > \beta_3$, $q \to \pm\infty$), из соотношения (12) получаем асимптотическое представление

$$F_1(p_0+1/2) = [E - Re^{-\sigma(p_0+1/2)}]^{-1} \left\{ t_0 [A + Be^{-\sigma(p_0-1/2)}] \frac{z(0)}{p_0^2 - 1/4} + \frac{t_0 e^{-\sigma(p_0-1/2)}}{p_0+1/2} B \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\sigma}^{0} \varphi_*(s) e^{-(p_0-1/2)s} ds + \frac{e^{-\sigma(p_0+1/2)}}{p_0+1/2} R \int_{-\sigma}^{0} \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p_0+1/2)s} ds \right\} + O\left(\frac{1}{|p_0|^3}\right), \tag{13}$$

r_0 фиксированное, $r_0 \geqslant \beta_3 + 1/2 + \varepsilon$, $q \to \pm\infty$.

Но тогда асимптотическое представление (9) справедливо уже при $r \geqslant \beta_3 + 1$. Продолжая подобную процедуру по шагам, получим в конце концов, что уточненное асимптотическое представление (13) справедливо по крайней мере в области $r_0 \geqslant 1/2 - \varepsilon$, тогда асимптотическое представление (9) справедливо в области $r \geqslant -\varepsilon$.

Поскольку справедливо предельное равенство [2], [6]:

$$z(\tau) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_3 - i\omega}^{\beta_3 + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp,$$

то, учитывая асимптотическое представление (9) и аналитичность вектор-функции $F(p)$, получаем предельное соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_3 - i\omega}^{\beta_3 + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - i\omega}^{-\varepsilon + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp = O(e^{-\varepsilon\tau}) [\| \varphi_*(s) \|_1 + \| \dot{\varphi}_*(s) \|_1], \quad -\sigma \leqslant s \leqslant 0,$$

отсюда и следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.— 576 с.
4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум.— М.: Мир, 1971.— 310 с.
5. Гребенщиков Б. Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания.— Свердловск, 1983.— С. 25—34.
6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1967.— 304 с.

г. Первоуральск

Поступили
полный текст 11.07.1988
краткое сообщение 30.08.1989

Г. П. Емгушева, В. А. Ногин

УДК 517.983

О СХОДИМОСТИ В $L_p(R^n)$ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С НЕСТАНДАРТНЫМ УРЕЗАНИЕМ

Гиперсингулярные интегралы (г. с. и.) вида

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) = \int_{R^n} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} \Omega(t) dt, \; \alpha > 0, \; l > \alpha, \tag{1}$$

где $(\Delta_t^l f)(x)$ — конечная разность функции $f(x)$ с центром в точке x и шагом t (центрированная или нецентрированная), нашли применение при решении интегральных уравнений первого рода с ядрами типа потенциала (см. книги [1], [2] и имеющуюся там библиографию).

Интеграл (1) абсолютно сходится на функциях $f(x)$, ограниченных вместе со всеми производными до порядка $[\alpha]+1$, если, напр., характеристика $\Omega(t)$ ограничена (см. [1], с. 69, для $\Omega(t)\equiv 1$). В наиболее важном с точки зрения приложений случае, когда $f(x)$ представима бесселевым или риссовым потенциалом с плотностью из L_p, интеграл (1) не является, вообще говоря, абсолютно сходящимся, и возникает вопрос о его истолковании. Отметим, что впервые г.с.и. (1) с постоянной характеристикой рассматривались в [3] на бесселевых потенциалах с L_p-плотностями и в [4] — на риссовых потенциалах. Их стандартное истолкование на указанных функциях имеет вид (см., напр., [1]—[7]):

$$(D^{\alpha}_{\Omega}f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,\Omega(t)\,dt, \tag{2}$$

где предел понимается по L_p-норме или почти всюду.

В данной статье рассматривается нестандартная трактовка сходимости г.с.и. (1). Показано, что урезание в (2) можно заменить более общим, „вырезая" достаточно произвольное семейство областей, содержащих начало координат, а именно, для широкого класса характеристик $\Omega(t)$ показано, что г.с.и. (1) можно понимать так:

$$(D^{\alpha}_{\Omega}f)(x)=\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{R^n\setminus G_\varepsilon}\frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,\Omega(t)\,dt,\ \ l>\alpha, \tag{3}$$

где $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — произвольное семейство открытых областей, содержащих начало координат и таких, что

$$\operatorname{mes}(G_\varepsilon\cap K)\to 0 \ \text{при}\ \varepsilon\to 0 \tag{4}$$

для любого компакта $K\subset R^n$. Заметим, что условие (4) равносильно следующему:

$$\int\limits_{R^n\setminus G_\varepsilon} g(x)\,dx\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\int\limits_{R^n} g(x)\,dx,\ \ g(x)\in L_1.$$

Последнее условие (а значит, и соотношение (4)) по существу является необходимым для корректного истолкования г.с.и. (1), представимых (как отмечалось выше) на „хороших" функциях абсолютно сходящимися интегралами по R^n.

Отметим, что г.с.и. вида (3) с постоянной характеристикой нашли применение при обращении и описании потенциалов по октанту в R^n, коммутирующих с растяжениями (см. [8]).

1°. Здесь установлено существование предела (3) на функциях $f(x)\in L_r$, для которых сходится г.с.и.

$$(D^{\alpha} f)(x)=\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt \tag{5}$$

(риссова производная). Пространство таких функций

$$L^{\alpha}_{p,r}(R^n)=\{f(x):\|f\|_{L^{\alpha}_{p,r}}\equiv\|f\|_{L_r}+\|D^{\alpha}f\|_{L_p}<\infty\},\ 1\leqslant p,\ r<\infty,\ \alpha>0,$$

было введено и исследовано С. Г. Самко в [4], [5] (см. также книги [1], [2]). Оно совпадает с пространством бесселевых потенциалов при $r=p$ и пространством риссовых потенциалов при $1<p<n/\alpha$, $r=np/(n-\alpha p)$. Относительно характеристики $\Omega(t)$ г.с.и. (3) предполагается, что

$$\sup_{\delta>0}\delta^{\beta}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{|\Omega(t)|\,dt}{|t|^{n+\beta}}<\infty, \tag{6}$$

где $0<\beta<1$ — фиксированное число такое, что $\beta\leqslant\min\{\alpha,\ n/2,\ n/p\}$. Неравенству (6) удовлетворяют (при любом $\beta>0$), напр., характеристики $\Omega(t)$, ограниченные в нуле и на бесконечности: $|\Omega(t)|\leqslant c$ при $|t|<\eta$ и $|t|>N$, и суммируемые в слое $\eta<|t|<N$; однородные характеристики, суммируемые на единичной сфере; стабилизирующиеся характеристики, рассмотренные в [5].

Теорема 1. *Пусть* $\Omega(t)$ *удовлетворяет условию* (6). *Тогда предел* (3) *существует на функциях* $f(x) \in L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$: $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$, $\alpha > 0$, *и не зависит от выбора семейства* $\{G_\varepsilon\}$ *открытых областей, содержащих начало координат и удовлетворяющих условию* (4). *Кроме того, г. с. оператор* (3) *ограничен из* $L^{\alpha}_{p,r}$ *в* L_p *и „усеченные" операторы* $D^{\alpha}_{\Omega,\varepsilon}$ *(интегралы по* $R^n \setminus G_\varepsilon$*) равномерно ограничены:* $\|D^{\alpha}_{\Omega,\varepsilon} f\|_{L_p} \leqslant c\|f\|_{L^{\alpha}_{p,r}}$, *где* c *не зависит от* ε.

Доказательство теоремы 1 проводится на основе представления $D^{\alpha}_{\Omega,\varepsilon} f = A_\varepsilon D^{\alpha} f$, где A_ε — некоторые операторы свертки, равномерно ограниченные в L_p и сильно сходящиеся при $\varepsilon \to 0$ к некоторому линейному ограниченному оператору. Основную трудность составляет доказательство равномерной ограниченности операторов A_ε, которое проводится с привлечением интерполяционной теоремы Марцинкевича.

Случай ограниченных характеристик был ранее рассмотрен в [8]. Заметим также, что для г. с. и. (2) с характеристиками, удовлетворяющими условию (6), указанные утверждения о сходимости и ограниченности установлены в [6]. (Отметим еще работу [9], в которой изучались более общие г. с. и., но лишь в рамках бесселевых потенциалов (т. е. при $r = p$) и при $0 < \alpha < 1$.)

2°. Далее рассматривается обратная задача. Пусть на функции $f(x) \in L_r$ сходится по L_p-норме г. с. и. (3) с некоторой характеристикой $\Omega(t)$. Будет ли тогда сходиться г. с. и. (5)? При выполнении некоторых условий эллиптичности дается положительный ответ на этот вопрос для характеристик двух типов: однородных нулевой степени и стабилизирующихся в нуле и на бесконечности как гёльдеровские функции. Соответствующие утверждения сформулируем в терминах обобщенных пространств

$$_{\Omega}L^{\alpha}_{p,r}(R^n) = \{f(x) : \|f\|_{_{\Omega}L^{\alpha}_{p,r}} = \|f\|_{L_r} + \|D^{\alpha}_{\Omega} f\|_{L_p} < \infty\},\ 1 \leqslant p,\ r < \infty,\ \alpha > 0,$$

где $D^{\alpha}_{\Omega} f$ — г. с. и. (3) с некоторой характеристикой, удовлетворяющей условию (6) (при $\alpha = 1, 3, \ldots$ считаем, что конечная разность в (3) центрированная, т. к. $D^{\alpha}_{\Omega} f \equiv 0$, $\alpha = 1, 3, \ldots$, для однородных характеристик $\Omega(t)$ в случае нецентрированной разности порядка $l > \alpha$; см. [1], с. 81; [2], с. 382).

Предположим, что $\Omega(t)$ либо однородна нулевой степени и $\Omega \in C^k(S^{n-1})$, $k \geqslant \max(0, [n/2] + 1 - \alpha)$ (S^{n-1} — единичная сфера в R^n), либо $\Omega(t)$ непрерывна при $t = 0$ и $t = \infty$ и

$$|\Omega(t) - \Omega(0)| \leqslant c|t|^{\delta_1},\ \delta_1 > 0,\ |t| < \eta;\ |\Omega(t) - \Omega(\infty)| \leqslant c|t|^{-\delta_2},\ \delta_2 > 0,\ |t| > N;$$

$$\sup_{\rho > 0} \int_{S^{n-1}} |\Omega(\rho\sigma)|\, d\sigma < \infty$$

(см. [5]; гл. 1, § 15). Через

$$D^{\alpha}_{\Omega}(\xi) = \int_{R^n} \frac{(e^{(i\xi\cdot t)/2} - e^{-(i\xi\cdot t)/2})^l}{|t|^{n+\alpha}}\, \Omega(t)\, dt$$

обозначим символ г. с. и. (3) ($D^{\alpha}_{\Omega}(\xi)$ выписан для случая центрированной разности).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$, $\alpha > 0$ *и*

$$D^{\alpha}_{\Omega}(\sigma) \neq 0,\ \sigma \in S^{n-1}, \tag{7}$$

либо

$$D^{\alpha}_{\Omega}(\xi)/|\xi|^{\alpha} \neq 0,\ \xi \in \dot{R}^n \tag{8}$$

($\dot{R}^n$ — *компактификация* R^n *одной бесконечно удаленной точкой) в случае однородных нулевой степени и стабилизирующихся характеристик соответственно. Тогда* $_{\Omega}L^{\alpha}_{p,r}(R^n) = L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ *(с точностью до эквивалентности норм).*

Случай $G_\varepsilon = \{t \in R^n : |t| < \varepsilon\}$ при некоторых дополнительных ограничениях на характеристику $\Omega(t)$ был ранее расмотрен в [5], [7]. При выполнении соотношений (7), (8) условия равномерной ограниченности L_p-норм „усеченных" интегралов из (3), (5) также оказываются равносильными.

Утверждения п. 1° получены Г. П. Емгушевой и В. А. Ногиным, а п. 2° — Г. П. Емгушевой. Подробные доказательства этих утверждений приведены в [10], [11].

Авторы благодарят проф. С. Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения.— 1-е изд.— Ростов-на-Дону, 1984.— 208 с.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— 1-е изд.— Минск, 1987.— 688 с.

3. Лизоркин П. И, Описание пространства $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Матем. сб.— 1970.— Т. 81 (123).— № 1.— С. 79—91.

4. Самко С. Г. О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1976.— Т. 40.— № 5.— С. 1143—1172.

5. Самко С. Г. Пространства $L_{p,r}^{\alpha}(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Studia Math.— 1977.— V. 61.— № 3.— P. 193—230.

6. Ногин В. А. О сходимости гиперсингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 3.— С. 80—82.

7. Ногин В. А., Самко С. Г. О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой // В сб.: Дифференц. и интегр. уравнения и их прилож.— Элиста, 1982.— С. 119—131.

8. Емгушева Г. П., Ногин В. А. Риссовы производные с нестандартным урезанием и их применение к обращению и описанию потенциалов, коммутирующих с растяжениями // ДАН СССР.— 1988.— Т. 300.— № 2.— С. 277—280.

9. Wheeden R. L. A note on a generalized hypersingular integral // Studia Math.—1972.— V. 44.— № 1.—P. 17—26.

10. Емгушева Г. П., Ногин В. А. О сходимости гиперсингулярных интегралов с нестандартным урезанием.— Ростов-на-Дону, 1987.— 40 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 22.05.1987, № 3714— В87.

11. Емгушева Г. П. О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с нестандартным урезанием.— Ростов-на-Дону, 1988.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 05.04.88, № 2590— В88.

г. Элиста
г. Ростов-на-Дону

Поступила
13.10.1989

И. Т. Зарецкая, А. Г. Руткас

УДК 517.98

УПРАВЛЯЕМЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

1°. Пусть $\Theta(\zeta)$ — голоморфная функция, значения которой суть ограниченные линейные операторы $\Theta(\zeta_0): \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ в гильбертовых пространствах F, G. Реализацией функции $\Theta(\zeta)$ называется ее представление

$$\Theta(\zeta) = \Theta_U(\zeta) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F, \quad \zeta^{-1} \in \rho(T), \tag{1}$$

с помощью блоков ограниченного оператора (узла)

$$U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : H \oplus \mathrm{F} \to H \oplus \mathrm{G}, \tag{2}$$

где H — гильбертово пространство. Если $\|\Theta(\zeta)\| < 1$ в круге $|\zeta| < 1$, то существует представление (1) с унитарным U, и $\Theta(\zeta)$ называется характеристической функцией (х. ф.) сжатия T [1]—[3]. Спектральный анализ сжатия T используется для исследования пассивных систем рассеяния с функцией рассеяния $\Theta(\zeta)$ [3], [4]. Ядро типа Шварца — Пика

$$F(\zeta, \mu) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\mu)}{1 - \bar{\zeta}\mu} & \dfrac{\Theta^*(\zeta) - \Theta^*(\mu)}{\bar{\zeta} - \bar{\mu}} \\ \dfrac{\Theta(\zeta) - \Theta(\mu)}{\zeta - \mu} & \dfrac{I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\mu)}{1 - \zeta\bar{\mu}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

для сжимающей оператор-функции $\Theta(\zeta)$ эрмитово-неотрицательно ($F \gg 0$ [1]). Для функций рассеяния $\Theta(\zeta)$ непассивных радиофизических систем ядро (3) лишь эрмитово-симметрично и естественным является представление вида (1) в пространстве реализации (2) с индефинитной метрикой [5], [6]. Если узел U (2) является унитарным (сжимающим) по отношению к метрике