В. В. Жук, Г. И. Натансон, К обратной задаче теории насыщения,
Матем. заметки, 1969, том 6, выпуск 5, 583–590

https://www.mathnet.ru/mzm6966

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 583—590

УДК 517.5

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ НАСЫЩЕНИЯ

В. В. Жук, Г. И. Натансон

Решается следующая задача. Дан класс функций K. Требуется указать насыщенный процесс приближения, для которого K является классом насыщения. Библ. 8 назв.

Как известно, процесс приближения $\{U_n\}$ называется *насыщенным с порядком насыщения* $\varphi(n)$, если для всех функций из рассматриваемого пространства, отличных от постоянной *), справедливо неравенство

$$\|f - U_n(f)\| \geqslant a_f \varphi(n), \tag{1}$$

где $a_f > 0$, и найдется такая отличная от постоянной функция, что

$$\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n)). \tag{2}$$

Множество функций, удовлетворяющих условию (2), называется *классом насыщения*.

Ряд математиков (Ж. Фавар, Г. Алексич, М. Заманский, Ф. И. Харшиладзе, А. Х. Турецкий, Р. Г. Мамедов и др.) рассматривал так называемую проблему насыщения:

Дан процесс приближения. Требуется установить, насыщен ли он, и, если это так, то найти порядок и класс насыщения.

В настоящей работе решается обратная задача:

Дан класс функций K. Требуется указать насыщенный процесс приближения, для которого K является классом насыщения.

---

*) Вместо подпространства констант иногда фигурируют и другие конечномерные подпространства.

Мы будем называть оператор U_n, определяющий такой процесс, *насыщающим оператором* класса K.

Условимся о следующем:

$\widetilde{C}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормировкой; рассматриваемые функции принадлежат $\widetilde{C}$, и операторы действуют из $\widetilde{C}$ в множество тригонометрических полиномов.

$E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

$S_n(f; x)$ есть n-я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f (иногда будем опускать x и писать $S_n(f)$, это относится и к другим операторам).

$\omega_k(f, \delta)$ есть k-й модуль гладкости функции f.

$\widetilde{f}$ — функция, тригонометрически сопряженная с f.

$\varphi(n)$ — строго положительная невозрастающая функция, $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Доказательства наших теорем строятся по одному и тому же плану. Сначала мы доказываем, что K есть класс насыщения введенного процесса (в предположении, что порядок насыщения равен $\varphi(n)$). Для этого показывается:

А) $f \in K \Rightarrow \| f - U_n(f) \| = O(\varphi(n))$;

В) $\| f - U_n(f) \| = O(\varphi(n)) \Rightarrow f \in K$.

Далее устанавливается, что $\varphi(n)$ действительно есть порядок насыщения, т. е. выполнено (1). Для этого достаточно показать:

С. Если $\| f - U_{n_l}(f) \| = O(\varphi(n_l))$ для некоторой подпоследовательности $\{n_l\}$ натурального ряда, то $f \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $K = \{f : E_n(f) = O(\varphi(n))\}$, *где функция* $\varphi(n)$ *удовлетворяет дополнительному условию* $\varphi(n) = O(\varphi(2n))$. *Насыщающим оператором для класса* K *будет*

$$U_n(f) = (1 + \varphi(n))\tau_n(f),$$

где

$$\tau_n(f) = n^{-1} \sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f)$$

— *оператор Валле-Пуссена.*

Доказательство. А) $E_n(f) = O(\varphi(n))$. Так как $\| \tau_n(f) \| \leqslant 3 \| f \|$ и $\| f - \tau_n(f) \| \leqslant 4E_n(f)$ (см., например, [1], стр. 211), то

$$\| f - U_n(f) \| \leqslant 4E_n(f) + 3\varphi(n) \| f \| = O(\varphi(n)).$$

B) $\| f - U_n(f) \| = O(\varphi(n))$. Тогда

$$E_{2n}(f) \leqslant E_{2n-1}(f) \leqslant \| f - U_n(f) \| = O(\varphi(n)) = \\ = O(\varphi(2n)) = O(\varphi(2n-1)).$$

C) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Поскольку при $\nu \leqslant n_l$ будет $a_\nu(\tau_{n_l}(f)) = a_\nu(f)$, где $a_\nu(f)$ — косинус-коэффициент Фурье функции f, то для этих n_l

$$\pi\varphi(n_l)\,|\,a_\nu(f)\,| = \\ = \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f;\,x)] \cos \nu x\, dx \right| = o(\varphi(n_l)),$$

т. е. $a_\nu(f) = 0$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Аналогично синус-коэффициенты $b_\nu(f) = 0$. Таким образом, $f \equiv 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $K = \{f : \omega_k(f, {}^1/n) = O(\varphi(n))\}$. *Насыщающим оператором будет*

$$U_n(f) = (1 - \varepsilon_k \varphi(n))\, B_n^{[k]}(f).$$

Здесь

$$B_n^{[k]}(f;\,x) = S_n(f;\,x) + 2^{-k} \sum_{\mu=0}^{k} C_k^\mu S_n(f;\,x + \mu\pi/n)(-1)^{\mu+1}$$

— оператор Р. М. Тригуба, обобщающий известный оператор С. Н. Бернштейна, $\varepsilon_k = \cos k\pi/2 + \sin k\pi/2$.

Доказательство. Воспользуемся найденными Р. М. Тригубом [2] соотношениями

$$\| f - B_n^{[k]}(f)\| = O(\omega_k(f, 1/n)), \\ \omega_k(f, 1/n) = O(\|f - B_m^{[k]}(f)\|).$$

A) $\omega_k(f, 1/n) = O(\varphi(n))$. В силу того, что $\| B_n^{[k]}(f) \| = O(\| f \|)$, имеем

$$\| f - U_n(f)\| \leqslant \| f - B_n^{[k]}(f)\| + \varphi(n)\| B_n^{[k]}(f)\| = \\ = O(\omega_k(f, 1/n)) + \varphi(n)\, \| f \| = O(\varphi(n)).$$

B) $\| f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Тогда

$$\omega_k(f, 1/n) = O(\| f - B_n^{[k]}(f) \|) = O(\| f - U_n(f) \| + \\ + \varphi(n)\| B_n^{[k]}(f) \|) = O(\varphi(n)).$$

C) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Запишем $B_n^{[k]}(f)$ в комплексной форме:

$$B_n^{[k]}(f; x) = \sum_{\nu=-n}^{n} (1 - \lambda_\nu^{(n)}) c_\nu e^{i\nu x},$$

где

$$\lambda_\nu^{(n)} = \left(\frac{1 - e^{i\nu\pi/n}}{2}\right)^k, \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t}\, dt.$$

Ясно, что при $0 < \nu \leqslant n_l$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f; x)] (\bar{c}_\nu e^{-i\nu x} + \bar{c}_{-\nu} e^{i\nu x})\, dx\right| = o(\varphi(n_l))$$

или, поскольку $|c_\nu| = |c_{-\nu}|$,

$$c_\nu|^2 |\lambda_\nu^{(n_l)} + \lambda_{-\nu}^{(n_l)} + \varepsilon_k \varphi(n_l)(2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)})| = o(\varphi(n_l)).$$

Но $\lambda_\nu^{(n_l)} = \lambda_{-\nu}^{-(n_l)}$, $\arg \lambda_\nu^{(n_l)} = k(\nu\pi/2n_l - \pi/2)$. Будем считать n_l столь большим, что $k\nu\pi/2n_l < \pi/2$. Тогда

$$\operatorname{sign}(\lambda_\nu^{(n_l)} + \lambda_{-\nu}^{(n_l)}) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} e^{i(k\nu\pi/2n_l - k\pi/2)} = \varepsilon_k.$$

Кроме того, $2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)} > 0$. Значит,

$$c_\nu|^2 [|\lambda_\nu^{(n_l)} + \lambda_{-\nu}^{(n_l)}| + \varphi(n_l)(2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)})] = o(\varphi(n_l)).$$

Отсюда $|c_\nu|^2 (2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)}) = o(1)$. Так как

$$\lim_{l\to\infty} \lambda_\nu^{(n_l)} = \lim_{l\to\infty} \lambda_{-\nu}^{(n_l)} = 0,$$

то $c_\nu = c_{-\nu} = 0$ при $\nu > 0$. Равенство $c_0 = 0$ доказывается еще проще. Итак, все коэффициенты Фурье функции f равны 0, т. е. $f \equiv 0$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$K = \{f : \omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(\varphi(n)),$$

где функция φ *такова, что каждое из соотношений*

$$E_n(f) = O(\varphi(n)), \; E_n(\tilde{f}) = O(\varphi(n))$$

влечет другое). Насыщающими операторами для класса K будут*

$$U_n(f) = (1 - \varphi(n))Z_n^{[k]}(f), \quad k \equiv 1 \pmod 2,$$

$$U_n(f) = (1 - \varphi(n))D_n^{[k]}(f), \quad k \equiv 0 \pmod 2.$$

Здесь

$$Z_n^{[k]}(f;\, x) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{n} [1 - (\nu/n)^k]\,(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$D_n^{[k]}(f;\, x) = \sum\nolimits_{\nu=-n}^{n} \left[1 - \left(\frac{|\nu|}{n}\right)^{k-1} \frac{1 - e^{i\nu\pi/n}}{2}\right] c_\nu e^{i\nu x}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай нечетного k.

А) $\omega_k(\widetilde{f},\, 1/n) = O(\varphi(n))$. Тогда по обобщенной теореме Джексона $E_n(\widetilde{f}) = O(\varphi(n))$, откуда $E_n(f) = O(\varphi(n))$. Но **)

$$\|f - Z_n^{[k]}(f)\| = O(E_n(f) + \omega_k(\widetilde{f},\, 1/n)).$$

Поэтому

$$\|f - U_n(f)\| = O(E_n(f) + \omega_k(\widetilde{f},\, 1/n) + \varphi(n)\|Z_n^{[k]}(f)\|) = O(\varphi(n)),$$

ибо

$$\|Z_n^{[k]}(f)\| = O(\|f\|).$$

В) $\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Так как (см. [6])

$$\omega_k(\widetilde{f},\, 1/n) = O(E_n(\widetilde{f}) + \|f - Z_n^{[k]}(f)\|),$$

то, учитывая, что $E_n(\widetilde{f}) = O(\varphi(n))$, получим

$$\omega_k(\widetilde{f},\, 1/n) = O(E_n(\widetilde{f}) + \|f - U_n(f)\| + \varphi(n)\|Z_n^{[k]}(f)\|) = O(\varphi(n)).$$

С) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Следовательно,

$$|a_\nu [1 - (1 - \varphi(n_l))(1 - (\nu/n_l)^k)]| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f;\, x)] \cos \nu x\, dx\right| = o(\varphi(n_l)),$$

---

*) Как показала Н. К. Бари [3], это будет выполнено, если $\sum_{k=n}^{\infty} \varphi(k)/k = O(\varphi(n))$.

**) Случай $k = 1$ исследован С. Б. Стечкиным [4]. Случай $k > 1$ см. в [5].

т. е.

$$|a_\nu|\,[(\nu\diagdown n_l)^k + \varphi(n_l)(1-(\nu\diagdown n_l)^k)] = o(\varphi(n_l)),$$

откуда $a_\nu = 0$.

Точно так же $b_\nu = 0$. Таким образом, $f \equiv 0$.

Перейдем к случаю четного k.

A) $\omega_k(\widetilde{f}, 1/n) = O(\varphi(n))$. По-прежнему $E_n(f) = O(\varphi(n))$. Так как для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n будет

$$\|B_n^{[1]}(T_n) - T_n\| \leqslant \frac{\pi}{2n}\|T_n'\|,$$

$$\|Z_n^{[k-1]}(T_n) - T_n\| = n^{-k+1}\|\widetilde{T}_n^{(k-1)}\|, \tag{3}$$

то из леммы § 5 работы [7] следует

$$\|D_n^{[k]}(T_n) - T_n\| \leqslant \frac{\pi}{2n^k}\|\widetilde{T}_n^{(k)}\|.$$

Применяя теорему из работы [6], найдем

$$\|D_n^{[k]}(f) - f\| = O(E_n(f) + \omega_k(\widetilde{f}, 1/n)).$$

Остальное аналогично случаю нечетного k.

B) $\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Из известного неравенства (см., например, [8], стр. 228)

$$n^{-1}\|T_n'\| \leqslant \frac{1}{2}\left\|T_n\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - T_n(x)\right\| = \|B_n^{[1]}(T_n) - T_n\|$$

и формулы (3) на основании цитированной леммы заключаем, что

$$\|D_n^{[k]}(T_n) - T_n\| \geqslant n^{-k}\|\widetilde{T}_n^{(k)}\|.$$

С помощью теоремы из статьи [6] получаем отсюда

$$n\omega_{k+1}(\widetilde{F}, 1/n) = O(\|D_n^{[k]}(f) - f\|),$$

где $\widetilde{F}$ — первообразная функции $\widetilde{f}$. Затем, как показано в [7],

$$\omega_k(\widetilde{f}, 1/n) = O(E_n(\widetilde{f}) + n\omega_{k+1}(\widetilde{F}, 1/n)).$$

Таким образом,

$$\omega_k(\widetilde{f}, 1/n) = O(E_n(\widetilde{f}) + \|D_n^{[k]}(f) - f\|).$$

Дальнейшее ясно.

C) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Имеем отсюда при $0 \leqslant \leqslant \nu \leqslant n_l$

$$\rho = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - U_{n_l}(f;\,x)]\,[\bar{c}_\nu e^{-i\nu x} + \bar{c}_{-\nu}e^{i\nu x}]\,dx\right| = \\ = o(\varphi(n_l)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\rho = \left|\,|c_\nu|^2\left\{1 - (1 - \varphi(n_l))\left[1 - \left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1}\frac{1 - e^{i\nu\pi/n_l}}{2}\right]\right\} + \right.$$

$$\left. + |c_{-\nu}|^2\left\{1 - (1 - \varphi(n_l))\left[1 - \left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1}\frac{1 - e^{-i\nu\pi/n_l}}{2}\right]\right\}\right| =$$

$$= 2|c_\nu|^2\left[\left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n_l} + \varphi(n_l)\left(1 - \left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n_l}\right)\right].$$

Следовательно,

$$|c_\nu|^2\,(1 - (\nu/n_l)^{k-1}\sin^2\nu\pi/2n_l) = o(1).$$

Значит, $c_\nu = 0$ и $f \equiv 0$.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что все факты, на которые мы опирались при доказательстве наших теорем, справедливы также в пространстве $\widetilde{L}$-суммируемых 2π-периодических функций. Далее, нигде в доказательствах мы не использовали специфики пространства $\widetilde{C}$. Поэтому утверждения теорем останутся в силе, если заменить $E_n(f)$ на $E_n(f)_{\widetilde{L}}$, $\omega_k(f,\,\delta)$ на $\omega_k(f,\,\delta)_{\widetilde{L}}$ и соответствующим образом понимать насыщение.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 29.V.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.

[2] Тригуб Р. М., О λ-суммах Фурье. Сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», Баку, 1965, стр. 389—396.

[3] Бари Н. К., О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., 19 (1955), 285—302.

[4] Стечкин С. Б., О приближении периодических функций суммами Фейера, Труды Матем. ин-та АН СССР, **62** (1961), 48—60.
[5] Жук В. В., О приближении 2π-периодической функции значениями некоторого ограниченного полуаддитивного оператора, I. Вестник Ленингр. ун-та, № 1 (1967), 21—35.
[6] Жук В. В., О приближении периодических функций линейными методами суммирования рядов Фурье, Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, Новгород, 1967, стр. 202—210.
[7] Жук В. В., О приближении 2π-периодической функции линейным оператором, Сб. «Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций», Ленинград, 1965, стр. 93—115.
[8] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.