

УДК 519.6:517.958

## КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУР

ДАЙКОВСКИЙ А. Г., ПОРТУГАЛОВ Ю. И., РЯБОВ А. Д.

(Серпухов)

В периодических структурах вычисляются волны любого вида. В соответствии с представлением Флоке задача формулируется для одного элемента периодичности, а при наличии симметрии — для его половины. Для дискретной аппроксимации дифференциальной задачи использованы 8-узловые четырехугольные конечные элементы. Алгебраическая задача на собственные значения решается методом итераций подпространства.

Определение собственных электромагнитных волн в объеме, ограниченном идеально проводящей металлической поверхностью, состоит в нахождении собственных значений и собственных функций однородных уравнений Максвелла. Эта задача имеет многочисленные приложения, в частности является одной из основных при проектировании ускоряющих структур в ускорителях заряженных частиц. Для ее численного решения имеется ряд программ [1]–[3], которые можно разделить на две категории. К первой относятся программы, использующие метод сеток (конечные разности или конечные элементы). Программы второй категории основаны на методе частичных областей. Последний использовался, например, в [4]–[7], где можно найти ссылки на более ранние публикации.

### § 1. Постановка задачи

Для полей, меняющихся во времени по закону  $e^{i\omega t}$ , уравнения Максвелла имеют вид

$$(1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -ik\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = ik\mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Граничное условие на металле

$$(2) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{v} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — комплексные амплитуды поля,  $k = \omega/c$ ,  $\mathbf{v}$  — нормаль. В случае периодических направляющих структур собственные волны можно искать в представлении Флоке

$$\mathbf{E}(x, y, z) = e^{-i\theta z/L} \mathcal{E}(x, y, z), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = e^{-i\theta z/L} \mathcal{H}(x, y, z),$$

где  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  — периодические с периодом  $L$  комплексные вектор-функции,  $L$  — геометрический период структуры по оси  $z$ . Из этих соотношений следуют равенства, которые называют условиями квазипериодичности:

$$(3) \quad \mathbf{E}(x, y, z+L) = e^{-i\theta} \mathbf{E}(x, y, z), \quad \mathbf{H}(x, y, z+L) = e^{-i\theta} \mathbf{H}(x, y, z).$$

Ограничимся вещественными значениями параметра  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , имеющего в этом случае смысл набега фазы волны на периоде  $L$ ;  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  определяют тип, а  $\theta$  — вид волны.

Обоснование представления Флоке, а также трактовку решений, соответствующих комплексным значениям  $\theta$ , см. в [8]; там же даны ссылки на оригинальные работы.

Вместо (1)–(3) рассмотрим задачу для волнового уравнения

$$(4) \quad \nabla^2 W + k^2 W = 0$$

с граничными условиями на металле I рода

$$(5) \quad W \times \nu = 0, \quad \nabla \cdot W = 0$$

или II рода

$$(6) \quad [\nabla \times W] \times \nu = 0, \quad W \cdot \nu = 0,$$

где  $W$  означает  $E$  или  $H$  соответственно (5) и (6), а в случае периодической структуры — еще и с условиями квазипериодичности

$$(7) \quad W(x, y, z+L) = e^{-i\theta} W(x, y, z).$$

Система собственных функций задач (4)–(7) является, как известно [9], прямой суммой вихревой и потенциальной подсистем. Поэтому, по крайней мере для некрратных собственных значений,

$$k^2 = \left( \int |W|^2 dv \right)^{-1} \int |\nabla \times W|^2 dv$$

либо

$$k^2 = \left( \int |W|^2 dv \right)^{-1} \int |\nabla \cdot W|^2 dv.$$

Если же одно и то же собственное значение соответствует и вихревой, и потенциальной собственным функциям, имеем дело с инвариантным подпространством, натянутым на эти функции. В этом случае можно рекомендовать перейти от  $E$ -компонент к  $H$ -компонентам либо наоборот. Вихревая функция будет при этом соответствовать одному и тому же электромагнитному полю ( $E, H$ ), а спектр потенциальной подсистемы изменится.

Если резонатор имеет плоскость симметрии, достаточно рассмотреть элементарный фрагмент области, продолжая решение симметрично или антисимметрично через эти плоскости на всю область. Граничные условия I рода соответствуют антисимметричному, а II рода — симметричному продолжению.

Для периодической структуры будем различать случаи, когда для фрагмента периодичности можно выбрать плоскость симметрии  $z = \text{const}$  и когда такой плоскости не существует. Обращаясь к (4)–(7), видим, что  $W$  определено с точностью до фазового множителя. Этот произвол можно устранить в постановке задачи для симметричного периода. Если  $-L/2 \leq z \leq L/2$  — период с плоскостью  $z=0$ , то, полагая в этой плоскости фазу равной нулю, будем иметь для  $W$  граничные условия

$$(8a) \quad \text{Im } W_x = 0, \quad \text{Im } W_y = 0, \quad \text{Im } \frac{\partial}{\partial z} W_z = 0,$$

$$(8b) \quad \text{Re } \frac{\partial}{\partial t} W_x = 0, \quad \text{Re } \frac{\partial}{\partial z} W_y = 0, \quad \text{Re } W_z = 0$$

в плоскости  $z=0$  и

$$(9a) \quad \operatorname{Im}(e^{i\theta/2}W_x) = 0, \quad \operatorname{Im}(e^{i\theta/2}W_y) = 0, \quad \operatorname{Im}\left(e^{i\theta/2}\frac{\partial}{\partial z}W_z\right) = 0,$$

$$(9b) \quad \operatorname{Re}\left(e^{i\theta/2}\frac{\partial}{\partial z}W_x\right) = 0, \quad \operatorname{Re}(e^{i\theta/2}\frac{\partial}{\partial z}W_y) = 0, \quad \operatorname{Re}(e^{i\theta/2}W_z) = 0$$

в плоскости  $z=L/2$ .

## § 2. Решение алгебраической задачи на собственные значения

Численное решение задачи (4)–(7) будет заключаться в ее дискретизации методом конечных элементов и в сведении к алгебраической системе вида

$$(10) \quad Aw = \lambda Bw$$

с вообще говоря эрмитовыми, положительно-определенными матрицами  $A$  и  $B$ . Комплексность последних связана с условием квазипериодичности. В задаче (10) имеет смысл искать не все собственные значения и векторы, а только те, которые относятся к низкочастотной части спектра. Для решения такой частичной задачи ниже используется метод обратных итераций с одновременным итерированием нескольких собственных векторов (см. [10]–[13]).

Для вещественных  $(n \times n)$ -матриц  $A$  и  $B$  метод итераций подпространства выглядит следующим образом. Выберем  $m$  линейно независимых векторов, и пусть они образуют матрицу  $X_0$  размера  $n \times m$ . Тогда на  $k$ -м шаге итерационного процесса выполняется следующее:

- 1) решается система  $AY_k - \lambda_0 BY_k = BX_{k-1}$ ;
- 2) формируются матрицы  $C_k = Y_k^T AY_k$ ,  $D_k = Y_k^T BY_k$ ;
- 3) решается малая задача на собственные значения  $C_k Q_k = D_k Q_k \Omega_k$ ;
- 4) вычисляется  $X_k = Y_k Q_k$ .

На этапе 1) выделяется подпространство, которое при  $k \rightarrow \infty$  стремится к инвариантному подпространству, натянутому на  $m$  собственных векторов с собственными значениями, ближайшими к  $\lambda_0$ . Этапы 2)–4) – процедура Рэля – Ритца получения из итерированного подпространства наилучших приближений к этим собственным значениям и векторам. Этап 1) реализован в виде LU-разложения матрицы  $A - \lambda_0 B$ . На этапе 3) можно использовать стандартные программы, основанные на QR-алгоритме или на методе Якоби [12]. Заметим, что, находя ортонормированные в  $D_k$ -норме собственные векторы малой задачи, автоматически получаем ортонормированные приближения Рэля – Ритца, а следовательно, в пределе  $k \rightarrow \infty$  – и собственные векторы

$$X_k^T B X_k = Q_k^T Y_k^T B Y_k Q_k = Q_k^T D_k Q_k = I.$$

В случае эрмитовых матриц  $A$  и  $B$ ,  $A = A_1 + iA_2$ ,  $B = B_1 + iB_2$ , имеем

$$A_1^T = A_1, \quad A_2^T = -A_2, \quad B_1^T = B_1, \quad B_2^T = -B_2.$$

Представим их в виде симметричных расширенных вещественных матриц:

$$A \leftarrow \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_1 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^T & B_1 \end{Bmatrix}.$$

Очевидно, что для каждого собственного значения  $\lambda$  наряду с собственным вектором  $w = |u, v|^T$  собственным вектором является и вектор  $\bar{w} =$

$=|-v, u|^T$ , ортогональный  $w$  в  $B$ -норме ( $\bar{w}^T B w = 0$ ), т. е. каждое собственное значение по крайней мере двукратно вырождено.

Свойства матриц  $A$  и  $B$  позволяют экономично реализовать этапы 1)–4). Пусть  $X$  — опять матрица  $m$  линейно независимых столбцов. Матрица  $X$  имеет размеры  $(2n \times m, n)$ , т. е. размеры  $(u, v)$ . Сформируем матрицу  $\|X: \bar{X}\|$ , которую примем за начальное приближение. Тогда (индекс  $k$  опущен) выполняется следующее:

1') решается система  $A\bar{Y} - \lambda_0 B\bar{Y} = B\bar{X}$ , а система  $A\bar{Y} - \lambda_0 B\bar{Y} = B\bar{X}$  не решается, так как  $\bar{Y} = \bar{Y}$  (экономия);

2') формируются матрицы  $C = \|Y: \bar{Y}\|^T A \|Y: \bar{Y}\|$ ,  $D = \|Y: \bar{Y}\|^T B \|Y: \bar{Y}\|$ , при этом

$$C = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2^T & C_1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2^T & D_1 \end{vmatrix},$$

где  $C_1 = Y^T A Y$ ,  $D_1 = Y^T B Y$ ,  $C_2 = Y^T A \bar{Y}$ ,  $D_2 = Y^T B \bar{Y}$ , матрицы  $C_1, D_1$  симметричные, а  $C_2, D_2$  антисимметричные (экономия на свертках при формировании матриц  $C, D$ );

3') решается малая задача

$$CQ = DQ\Omega;$$

легко видеть, что матрицы  $C, D$  наследуют свойства матриц  $A$  и  $B$ , так что малая задача имеет вид

$$C \|R: \bar{R}\| = D \|R: \bar{R}\| \begin{vmatrix} \Omega_m & 0 \\ 0 & \Omega_m \end{vmatrix},$$

где  $\Omega_m = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  — матрица собственных значений,  $Q = \|R: \bar{R}\|$  — матрица собственных векторов малой задачи;

4') вычисляется  $X = \|Y: \bar{Y}\| R$  (экономия:  $\bar{X}$  не вычисляется).

Изложенная в 1')–4') модификация позволяет вдвое сократить объем вычислений и сэкономить память ЭВМ.

### § 3. Осесимметричные структуры

Пусть имеется осесимметричная структура и  $w$  означает  $e$  либо  $h$ , где  $e = \{e_z, e_\rho, e_\varphi\}$  и  $h = \{h_z, h_\rho, h_\varphi\}$  — амплитуды поля, полученные после отделения гармонической зависимости по  $\varphi$ , т. е. зависящие только от координат  $z, \rho$ . Тогда волновое уравнение (4) принимает вид ( $\nabla \equiv (\partial/\partial z, \partial/\partial \rho)$ )

$$(11a) \quad -\nabla_\rho \nabla w_z + \left( \frac{n^2}{\rho} - k^2 \rho \right) w_z = 0,$$

$$(11b) \quad -\nabla_\rho \nabla w_\rho + \left( \frac{n^2 + 1}{\rho} - k^2 \rho \right) w_\rho + \frac{2n}{\rho} w_\varphi = 0,$$

$$(11b) \quad -\nabla_\rho \nabla w_\varphi + \left( \frac{n^2 + 1}{\rho} - k^2 \rho \right) w_\varphi + \frac{2n}{\rho} w_\rho = 0.$$

Будем считать  $n \neq 0$ , поскольку случай с  $n=0$  приводит к более простой скалярной задаче. Нам понадобится система (11) в несколько более общей записи, точнее — в проекциях на оси  $(x_1, x_2, \varphi)$ , повернутые в плоскости  $(z, \rho)$  на угол  $\alpha$  по отношению к осям  $(z, \rho, \varphi)$ , так что  $w$  имеет компоненты  $(w_1, w_2, w_\varphi)$ .

Нетрудно получить следующую систему:

$$(11'a) \quad -\nabla_{\rho}\nabla w_1 + \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right)^2 \frac{1}{\rho} + \frac{n^2}{\rho} - k^2 \rho \right] w_1 + \\ + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} w_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{2n}{\rho} w_{\varphi} = 0,$$

$$(11'b) \quad -\nabla_{\rho}\nabla w_2 + \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{\rho} + \frac{n^2}{\rho} - k^2 \rho \right] w_2 + \\ + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} w_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \frac{2n}{\rho} w_{\varphi} = 0,$$

$$(11'в) \quad -\nabla_{\rho}\nabla w_{\varphi} + \left( \frac{n^2 + 1}{\rho} - k^2 \rho \right) w_{\varphi} + \\ + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{2n}{\rho} w_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \frac{2n}{\rho} w_2 = 0.$$

Заметим, что  $\partial \rho / \partial x_1 = \sin \alpha$ ,  $\partial \rho / \partial x_2 = \cos \alpha$ .

Выпишем граничные условия (5) и (6) для системы (11'). Пусть  $(v, \tau)$  — локальная подвижная система координат, естественным образом связанная с граничным контуром в плоскости  $(z, \rho)$ . Тогда условия (5) принимают вид

$$(12) \quad w_{\varphi} = 0, \quad w_{\tau} = 0, \quad \rho \frac{\partial w_v}{\partial v} + u_v \left( \frac{\partial \rho}{\partial v} \pm \frac{\rho}{r} \right) = 0,$$

где  $r$  — локальный радиус кривизны контура, причем знак «+» соответствует выпуклости границы в сторону нормали, а в противном случае используется знак «-». Соответственно, условия (6) имеют вид

$$(13) \quad \rho \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial v} w_{\varphi} = 0, \quad w_v = 0, \quad \frac{\partial w_{\tau}}{\partial v} \pm \frac{w_{\tau}}{r} = 0.$$

Напомним, что (12) и (13) относятся к граничным условиям на металле, если, соответственно,  $w=e$  или  $w=h$ . На плоскостях симметрии  $z=\text{const}$  в зависимости от симметрии исходных мод выбираются либо (12), либо (13), которые в этом случае выглядят особенно просто:

$$(14) \quad w_{\varphi} = 0, \quad w_{\rho} = 0, \quad \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0,$$

$$(15) \quad \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_{\rho}}{\partial z} = 0, \quad w_z = 0.$$

На оси

$$(16) \quad w_z = \begin{cases} \frac{\partial w_{\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial \rho} = 0, & n = 1, \\ w_{\rho} = w_{\varphi} = 0, & n > 1. \end{cases}$$

Дискретизация и сведение задачи (11')—(16) к алгебраической осуществляется стандартно методом конечных элементов [14]. Пусть сечение структуры в плоскости  $(z, \rho)$  разбито на конечные элементы с какой-либо нумерацией узлов  $i, i=1, 2, \dots, N$ , и системой базисных функций  $\{\psi_i(z, \rho)\}$ . Представим  $w$  в виде интерполанта:

$$w = \sum_j w^j \psi_j.$$

Узловые значения  $w^j$  будем проектировать во всех внутренних узлах сетки на оси  $(z, \rho, \varphi)$ , а в узлах на границе металла — на направления

$(v, \tau, \varphi)$ . Домножив (11') на  $\psi_i$  и проинтегрировав по частям, в каждом внутреннем узле получим уравнения для  $w_z^j, w_\rho^j, w_\varphi^j$ :

$$(17) \quad \sum_j \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & a_{ij} + b_{ij} & 2nb_{ij} \\ 0 & 2nb_{ij} & a_{ij} + b_{ij} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_z^j \\ w_\rho^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix} \equiv \sum_j M_{ij} \begin{vmatrix} w_z^j \\ w_\rho^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$a_{ij} = \int \left[ \rho \nabla \psi_i \nabla \psi_j + \left( \frac{n^2}{\rho} - k^2 \rho \right) \psi_i \psi_j \right] ds, \quad b_{ij} = \int \frac{\psi_i \psi_j}{\rho} ds.$$

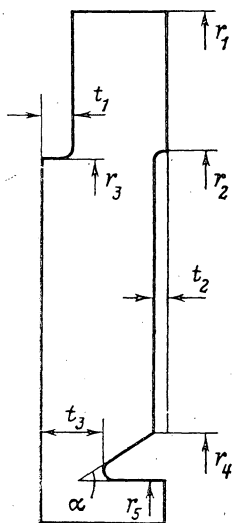
Для граничного узла  $i$  из (11') следуют уравнения для  $(w_1^i, w_2^i, w_\varphi^i)$ :

$$(18) \quad \sum_j \begin{vmatrix} a_{ij} + b_{ij} \sin^2 \alpha & b_{ij} \sin \alpha \cos \alpha & 2nb_{ij} \sin \alpha \\ b_{ij} \sin \alpha \cos \alpha & a_{ij} + b_{ij} \cos^2 \alpha & 2nb_{ij} \cos \alpha \\ 2nb_{ij} \sin \alpha & 2nb_{ij} \cos \alpha & a_{ij} + b_{ij} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix} \equiv \\ \equiv \sum_j M_{ij}' \begin{vmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1^i \\ I_2^i \\ I_\varphi^i \end{vmatrix},$$

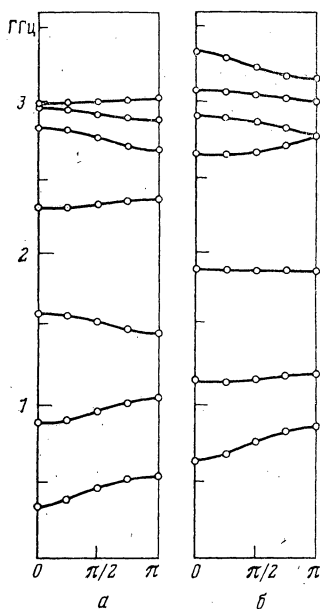
где

$$(19) \quad I_1^i = \int \rho \psi_i \frac{\partial w_1}{\partial v} dc, \quad I_2^i = \int \rho \psi_i \frac{\partial w_2}{\partial v} dc, \\ I_\varphi^i = \int \rho \psi_i \frac{\partial w_\varphi}{\partial v} dc.$$

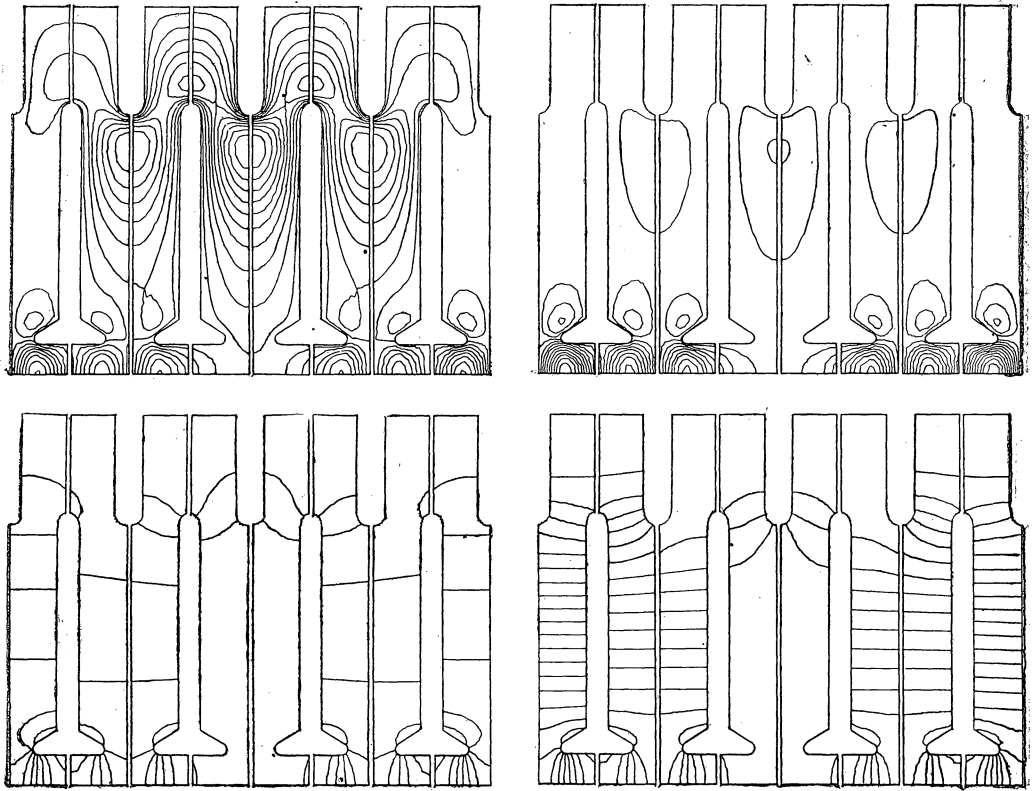
В (19) при интегрировании по границе элемента можно заменить  $\partial w_1 / \partial v$  и  $\partial w_2 / \partial v$  на  $\partial w_\rho / \partial v$  и  $\partial w_z / \partial v$  с точностью до  $O(\delta c / r)$  и далее воспользоваться условиями (12) и (13);  $\delta c$  — линейный размер элемента. Для окончательного замыкания задачи осталось установить связь проекций  $w'$  во внутренних узлах с проекциями в узлах на границе в уравнениях (17) и обратную связь в уравнениях (18). Пусть  $(i, j)$  — фиксированная пара индексов, входящая одновременно в суммы (17) и (18), и пусть  $i$  — внутренний узел, а  $j$  — граничный. Учитывая, что  $w^i$  и  $w^j$  проектируются



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

в разных системах координат в (17), (18), сделаем соответствующие замены:

$$\begin{vmatrix} w_z^j \\ w_\rho^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_\varphi^j \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w_1^i \\ w_2^i \\ w_\varphi^i \end{vmatrix} = P^T \begin{vmatrix} w_z^i \\ w_\rho^i \\ w_\varphi^i \end{vmatrix}.$$

Тогда матричные элементы связи компонент  $w^i$  с  $w^j$  в (17) и  $w^j$  с  $w^i$  в (18) равны, соответственно,  $M_{ij}P$  и  $M_{ij}^i P^T$ . Непосредственным перемножением легко получить  $(M_{ij}P)^T = M_{ij}^i P^T$ , что означает симметрию полной матрицы.

Таблица 1

$l$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$
1	13091.176	29185.197	44452.795
2	18466.246	35513.542	51115.480
3	23729.908	41614.487	57559.565

Таблица 2

$h, T$	$\delta f_{11}$	$\delta f_{21}$	$\delta f_{31}$	$\delta f_{12}$	$\delta f_{22}$
$\sim 1/4, \sim 5$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$
$\sim 1/8, \sim 30$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$
$\sim 1/12, \sim 70$	$3.1 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$
$\sim 1/16, \sim 150$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
$\sim 1/20, \sim 280$	$4.4 \cdot 10^{-7}$	$7.8 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$6.9 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$

Замечания. 1. Взяв вместо условий симметрии (14), (15) условия квазипериодичности (7) для произвольного и (8), (9) для симметричного периодов, можно аналогичным образом показать симметрию матриц дискретной задачи.

2. Для корректности аппроксимаций в окрестности выпуклого угла (условие на ребре [4], [18]) последний предлагается сглаживать и локально мельчить сетку с тем, чтобы можно было пренебречь членом  $O(\delta c/r)$ .

На фиг. 1 показана параметризация полуячейки ускоряющей структуры с шайбами и диафрагмами. Для значений параметров  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ , равных, соответственно, 190, 137, 133, 35, 17 мм, и для  $t_1, t_2, t_3$ , равных 8, 5, 22 ( $\alpha=30^\circ$ ), вычисленные низшие дисперсионные ветви даны на фиг. 2. При этом фиг. 2, а соответствует волнам с одной вариацией по азимуту, а фиг. 2, б — с двумя. На фиг. 3 показаны изолинии  $e_\varphi$  и  $h_\varphi$  для  $\theta=\pi/4$  двух нижних ветвей фиг. 2, а. Поля в ячейках восстановлены с использованием квазипериодичности по значениям в первой полуячейке. На фиг. 4 для одного из вариантов структуры показано векторное поле  $(e_z, e_\rho)$  волн вида  $\theta=2\pi/3$  типа  $EH_1$ .

#### § 4. Краткие сведения о комплексе программ

Изложенная методика реализована в комплексе программ с общим названием PRUD-W, который состоит из модулей следующего назначения: генератор сетки восьмиузловых изопараметрических элементов; основная программа комплекса, предназначенная для нахождения собственных частот и полей;

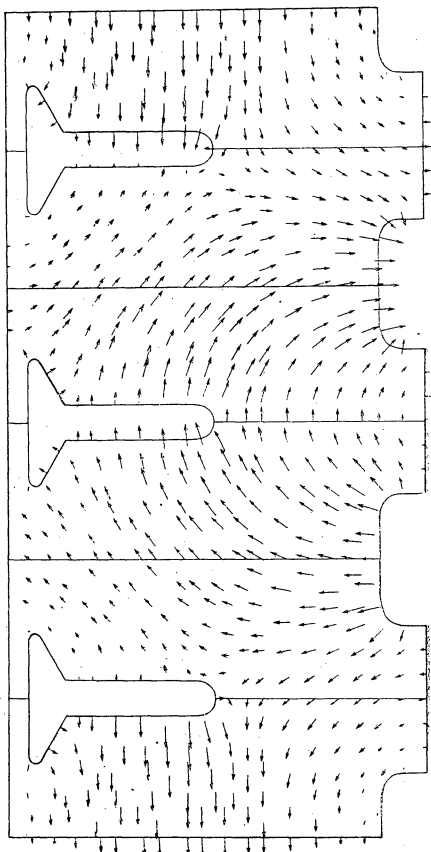
модуль вычисления необходимых для приложений вторичных величин — радиотехнических характеристик структур;

вывод на графическое устройство сеток, векторных полей, изолиний компонент полей и т. д.

Для проверки правильности работы программы и отдельных ее блоков, а также для оценки точности, времени счета, возможности вычисления колебаний с кратными собственными значениями рассматривались задачи, имеющие аналитическое решение: колебания в цилиндрическом и сферическом резонаторах.

Рассмотрим азимутально однородные колебания с ненулевыми компонентами поля  $e_z, e_\rho, h_\varphi$  в сферическом резонаторе. В сферической системе координат компонента  $h_\varphi$  имеет вид  $h_\varphi(r, \theta) = j_l(kr)P_l(\cos \theta)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , где  $j_l(z)$  — сферические функции Бесселя,  $P_l(z)$  — полиномы Лежандра. Условие на металле  $\partial(rh_\varphi)/\partial r$  дает для сферы единичного радиуса низшие частоты (в МГц), сведенные в табл. 1.

Результаты численного решения этой же задачи с помощью комплек-



Фиг. 4

са PRUD-W сведены в табл. 2, из которой можно получить представление о сходимости и точности метода при различном числе узлов. В табл. 2 через  $\delta f$  обозначена разность между вычисленным и точным значением частоты,  $h$  — линейный размер элемента,  $T$  (в с) — полное время вычисления пяти частот на ЭВМ с быстродействием порядка 1Mflops. Время счета практически не зависит от начального приближения.

По сравнению с программами из [1], [15], где решается лишь резонаторная задача, комплекс PRUD-W предоставляет новые возможности получения дисперсионных характеристик периодических структур. Это связано с безусловной и быстрой сходимостью метода итераций подпространства и с возможностью получать сразу несколько (до 10) собственных векторов. Задав набег фазы и количество итерируемых векторов, можно получить точки сразу на нескольких ветвях дисперсионной характеристики.

Авторы благодарят А. Г. Абрамова, С. Ю. Ершова, Т. Д. Рябову за участие на отдельных этапах работы и А. Г. Свешникова за обсуждение статьи.

#### Литература

1. Weiland T. On the computation of resonant in cylindrically symmetric cavities.— Nucl. Instrum. and Methods, 1983, v. 216, p. 329–348.
2. Weiland T. On the numerical solution of Maxwell's equations and applications in the field of accelerator physics.— Preprint DESY. Hamburg, 1984, № 84-006.
3. Keil E. Computer programs in accelerators physics.— Preprint CERN. Geneva, 1984, № 84-01.
4. Миттга Р., Лу С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
5. Андреев В. Г. Определение геометрии структуры со знакопеременным ускоряющим полем на  $\pi/2$ -волне.— Ж. техн. физ., 1971, т. 41, вып. 4, с. 788–796.
6. Keil E. Diffraction radiation of charged rings moving in a corrugated cylindrical pipe.— Nucl. Instrum. and Methods, 1972, v. 100, p. 419–427.
7. Zotter B., Vane K. Transverse resonances of periodically widened cylindrical tubes with circular cross section.— Preprint SLAC. Stanford, 1979, PEP-NOTE 308.
8. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983.
9. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
10. Rutishauser H. Computational aspects of F. L. Bauer's simultaneous iteration method.— Numer. Math., 1969, v. 13, p. 4–13.
11. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
12. Уилкинсон Дж. Х., Райни С. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.
13. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
14. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
15. Halbach K., Holsinger R. F. Superfish — a computer program for evaluation of RF cavities with cylindrical symmetry.— Particle Accelerator, 1976, v. 7, p. 213–222.

Поступила в редакцию 17.I.1985  
Переработанный вариант 10.IX.1985