Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 5

МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ ДЛЯ КОСЫХ ЦИЛИНДРОВ

© А. А. Щербаков

Косым цилиндром мы называем комплексное многообразие, расслоенное на односвязные и конформно-эквивалентные римановы поверхности так, что проекция вдоль слоев является голоморфной субмерсией и у расслоения существует голоморфное сечение. Косой цилиндр называется униформизуемым, если существует его послойное голоморфное вложение в произведение базы на сферу Римана.

В работе доказывается, что если косой цилиндр является многообразием Штейна, то в нем существует возрастающая последовательность послойно вложенных косых цилиндров со строго псевдовыпуклой гладкой границей, трансверсальной слоям, такая, что их объединение совпадает с исходным многообразием. Показано, что если существует исчерпывающая последовательность *униформизуемых* послойно вложенных косых цилиндров, то косой цилиндр, являющийся их объединением, также униформизуем.

Введение

Рассмотрим семейство римановых поверхностей M_p, аналитически зависящих от параметра $p \in B$. Это значит, что на их объединении M существует структура комплексного многообразия, согласованная с комплексной структурой на слоях. Пусть все римановы поверхности M_p голоморфно (конформно) эквивалентны. Такое семейство является гладким расслоением. В случае односвязной базы B, например, если B — шар, оно гладко эквивалентно прямому произведению базы на слой. Аналогичной голоморфной эквивалентности может не быть даже в простейших случаях: например, шар в $\mathbb{C}^2$, рассматриваемый как семейство кругов, параметризованное кругом $U \subset \mathbb{C}$, биголоморфно не эквивалентен произведению $U \times U$. Возникает вопрос: существует ли послойное голоморфное вложение нашего семейства в произведение базы на некоторую „объемлющую“ риманову поверхность? (Например, в том случае, когда слой односвязен, — в произведение базы на сферу.)

Ключевые слова: многообразия Штейна, римановы поверхности, одновременная униформизация.

Работа поддержана грантами CRDF RVI-229, INTAS 93-0570-ext, РФФИ 95-01-01258.

Описанная ситуация встречается в теории слоений на аналитические кривые, в частности в теории аналитических дифференциальных уравнений с комплексным временем. Для ее формализации служат понятия косого цилиндра и одновременной униформизуемости.

Определение 1. *Косым цилиндром с базой B и слоем E* называется набор (M, B, E, π, s), где M и B — комплексные многообразия, E — односвязная риманова поверхность, $\pi : M \to B$ — голоморфная сюрьективная субмерсия такая, что для каждого $p \in B$ слой $\pi^{-1}(p)$ биголоморфно (= конформно) эквивалентен E и $s : B \to M$ — голоморфное сечение. Многообразие M называется *тотальным пространством* косого цилиндра. Слой в точке p будем обычно обозначать M_p.

Основным примером является семейство универсальных накрывающих над слоями некоторого голоморфного слоения на аналитические кривые, рассматривавшееся в [1–3]. Допуская вольность речи, далее мы называем косым цилиндром тотальное пространство M. Мы также обычно отождествляем базу B с образом голоморфного сечения sB и говорим о пересечении слоя с базой.

Определение 2. Косой цилиндр с базой B и односвязным слоем E называется *(одновременно) униформизуемым* (соответственно *сильно униформизуемым)*, если существует послойное голоморфное вложение $M \hookrightarrow B \times \mathbb{CP}^1$ (соответственно $M \hookrightarrow B \times \mathbb{C}$).

Одновременная униформизуемость для семейств римановых поверхностей рассматривалась в [3–5]. В дальнейшем нас будет интересовать ситуация, локальная по базе, поэтому мы будем считать базу B стягиваемой псевдовыпуклой областью в $\mathbb{C}^n$ (обычно полидиском или шаром). Мы также будем рассматривать случай, когда косой цилиндр M послойно вложен в некоторое объемлющее многообразие, также имеющее структуру косого цилиндра.

Определение 3. Косой цилиндр (M', B', E', π', s') *вложен* в косой цилиндр (M, B, E, π, s), если $M' \subset M$, $B' \subset B$, $\pi' = \pi|_{M'}$. Для краткости мы пишем далее $M' \subset M$, имея в виду послойное вложение. Последовательность косых цилиндров M_i таких, что $M_i \subset M_{i+1}$ и $\bigcup M_i = M$, будем называть *исчерпывающей*. *Границей* вложенного косого цилиндра будем называть объединение границ его слоев.

Основной интерес представляют косые цилиндры, являющиеся многоробразиями Штейна. Дело в том, что штейновыми являются многообразия универсальных накрывающих над слоями аналитического слоения с особенностями [1, 2]. Основным результатом этой статьи является нижеследующая теорема об исчерпывании, усиливающая в нашем случае известное утверждение о том, что

пространство Штейна можно представить в виде объединения возрастающей последовательности строго псевдовыпуклых множеств.

Теорема об исчерпывании. *Если косой цилиндр M является многообразием Штейна, то в M существует исчерпывающая последовательность вложенных косых цилиндров M_i с гладкими строго псевдовыпуклыми границами, трансверсальными слоям.*

Замечание. Базы косых цилиндров M_i могут, вообще говоря, не совпадать с базой цилиндра M. За счет сужения базы B исходного косого цилиндра M всегда можно добиться того, чтобы все эти косые цилиндры имели одну и ту же базу. Это сужение мы можем считать сколь угодно малым, т. е. можно считать, что суженная база содержит любое наперед заданное компактное подмножество первоначальной базы B.

Теорема об исчерпывании доказывается в §1 и 2.

Следующая проблема представляет большой интерес для теории слоений на аналитические кривые [2, 5].

Проблема. Верно ли, что косой цилиндр, являющийся многообразием Штейна, униформизуем?

Можно сформулировать также „компактный“ вариант этой проблемы.

Проблема′. Верно ли, что косой цилиндр со строго псевдовыпуклой гладкой границей униформизуем?

В целом проблема остается открытой, имеются только некоторые частные результаты. Так, в [5] показано, что если косой цилиндр с гладкой строго псевдовыпуклой границей униформизуем и его образ при вложении также имеет гладкую границу, то униформизуемость сохраняется при малых деформациях его комплексной структуры. С помощью теоремы об исчерпывании вопрос об униформизуемости штейновых косых цилиндров можно свести к вопросу об униформизуемости косых цилиндров со строго псевдовыпуклой гладкой границей. Эта редукция, основывающаяся на идеях Ю. С. Ильяшенко, приведена в §3.

Автор выражает благодарность Ю. С. Ильяшенко и А. А. Глуцюку за полезные обсуждения.

§1. Основная идея доказательства теоремы об исчерпывании и вспомогательные конструкции

1.1. Локальная униформизуемость. Пусть M — штейнов косой цилиндр. Нам нужно найти исчерпывающую последовательность косых цилиндров со строго псевдовыпуклыми гладкими границами, трансверсальными слоям. Заметим,

что слои вложенного косого цилиндра всегда конформно-эквивалентны единичному кругу, если только вложенный косой цилиндр не совпадает с исходным.

Мы используем следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть косой цилиндр M' вложен в штейнов косой цилиндр M и имеет гладкую границу. Тогда он локально униформизуем, т.е. у каждой точки $z \in B$ существует окрестность U_z такая, что вложенный косой цилиндр $((\pi')^{-1}U_z, U_z, E', \pi', s')$ униформизуем. Далее, локальное униформизующее отображение можно выбрать гладко зависящим от точки z. Точнее, существует семейство послойных голоморфных отображений $F_z : M' \to B \times \mathbb{C}$, являющихся вложениями в окрестностях U_z, и таких, что отображение $B \times M' \to B \times \mathbb{C}$: $(z, p) \mapsto F_z(p)$ гладко по z.*

Доказательство. Для каждой точки z базы существует отображение h_z, конформно отображающее слой M_z на единичный круг E или на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Оно конформно отображает слой M'_z на подобласть в E (или в $\mathbb{C}$), и производная $\partial h_z/\partial w$ отделена от нуля на M_z. Так как косой цилиндр M является пространством Штейна, то отображение h_z, голоморфное на слое M_z, является ограничением на этот слой некоторой функции F, голоморфной на M. Тогда для каждого z' из некоторой окрестности U_z точки z функция F конформно отображает слой M'_z в $\mathbb{C}$, т.е. определяет униформизующее отображение над областью U_z. Заметим, что нам достаточно иметь продолжение функции h_z не на весь цилиндр M, а лишь на некоторую окрестность слоя.

Для доказательства утверждения о гладкой зависимости униформизующей карты от точки базы выберем такое продолжение специальным образом. Существует строго псевдовыпуклое множество $D \subset M$, содержащее косой цилиндр M'. С помощью стандартных соображений комплексного анализа (проблема Кузена, см., например, [6]) вопрос о продолжении функций с аналитического подмножества сводится к решению системы уравнений Коши–Римана с правой частью, которая в нашем случае будет гладко зависеть от точки базы как от параметра. Нам нужно найти решение, также гладко зависящее от параметра.

В работах [7, 8] показано, что в строго псевдовыпуклой области в многообразии Штейна существует ограниченный в C-норме линейный оператор T, правый обратный к $\overline{\partial}$-оператору на пространстве $\overline{\partial}$-замкнутых (p, q)-форм. Отсюда немедленно следует дифференцируемость решения по параметру, если правая часть системы уравнений Коши–Римана дифференцируема по параметру t. Действительно, если правая часть имеет вид

$$f = f_0 + tf_1 + O(t^2),$$

то, поскольку производные $\overline{\partial}$-замкнутых форм по t $\overline{\partial}$-замкнуты,

$$Tf = Tf_0 + tTf_1 + O(t^2).$$

Аналогично доказывается существование высших производных. •

В силу этого предложения, когда мы рассматриваем сужение косого цилиндра на малую окрестность точки z на базе, мы можем считать, что имеем дело с подобластью в $\mathbb{C}^{n+1}$ с координатами (z, w), $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$, а слои — подмножества вертикальных комплексных прямых. Далее, мы не будем это специально оговаривать.

1.2. Лемма о связности и основная конструкция теоремы об исчерпывании.

Определение 4. Для любого множества $A \subset M$ пересечение множества A со слоем над точкой $z \in B$ будем называть *слоем* можества A над точкой z и обозначать A_z.

Лемма о связности. *Пусть косой цилиндр M вложен в $\mathbb{C}^m$, причем голоморфно-выпуклая оболочка тотального пространства M является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{C}^m$. Пусть косой цилиндр (K, B', E', π', s') вложен в M и пусть замыкание $\operatorname{cl} K$ компактно. Обозначим через $\widehat{K}$ полиномиально-выпуклую оболочку $\operatorname{cl} K$. Пусть существует такая константа $C > 0$, что любые две точки любого слоя косого цилиндра K соединяются непрерывной кривой, лежащей на этом слое и длины $\leqslant C$. Пусть φ — произвольный слой косого цилиндра M такой, что $\varphi \cap \operatorname{cl} K \neq \varnothing$. Тогда пересечение $\varphi \cap \widehat{K}$ связно.*

Эта лемма доказана в [2] (ср. [1]).

Изложим теперь основную конструкцию, использующуюся в доказательстве теоремы об исчерпывании.

На косом цилиндре M существует вещественно-аналитическая строго плюрисубгармоническая функция f, стремящаяся к бесконечности „на границе“ множества M. Это значит, что для любого $a > 0$ найдется компактное подмножество, вне которого $f > a$. Чтобы найти такую функцию, используем голоморфное собственное вложение $M \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ и возьмем ограничение на M функции r^2, где r — расстояние до начала координат в $\mathbb{C}^m$. Множества $\{(z, w) : |f(z, w)| < \lambda_i\}$ при $\lambda_i \to \infty$ образуют исчерпывающую последовательность для M. Пусть K — множество из этой последовательности. Его пересечения со слоями могут состоять из нескольких связных компонент, но каждая компонента должна быть односвязна в силу принципа максимума для субгармонических функций. Будем предполагать, что K пересекается с каждым слоем косого цилиндра M. Этого всегда можно добиться за счет сужения базы до ее открытого подмножества. (Как уже отмечалось, мы можем считать, что это сужение сколь угодно мало, т.е. что суженная база содержит любое наперед заданное компактное подмножество первоначальной базы.) Далее, мы будем предполагать, что такое сужение произведено и не будем это специально

оговаривать. Мы будем также предполагать, что значение λ_i, соответствующее множеству K, некритическое, т.е. $\operatorname{grad} f \neq 0$ на ∂K, и что K (после произведенного сужения базы) содержит базу B, точнее, образ голоморфного сечения s.

Для каждого слоя K_z возьмем его компоненту, содержащую точку $s(z)$, и определим K' как объединение этих компонент. Граница $\partial K'$ может не быть гладкой.

Следующая лемма является центральным местом в доказательстве теоремы об исчерпывании.

Основная подготовительная лемма. *Построенное множество K' голоморфно-выпукло.*

Доказательство. После вложения косого цилиндра M в $\mathbb{C}^m$ можно считать, что голоморфно-выпуклая оболочка совпадает с полиномиально-выпуклой. Голоморфно-выпуклая оболочка $\widehat{K'}$ множества K' должна иметь связные слои по лемме о связности и в то же время должна содержаться в голоморфно-выпуклом множестве K. Но K' — это максимальное подмножество в K, содержащее образ голоморфного сечения и имеющее связные слои. Следовательно, $\widehat{K'} = K'$. •

Теорема об исчерпывании будет доказана, если мы приблизим границу множества K' гладкой псевдовыпуклой гиперповерхностью, трансверсальной слоям. Идея состоит в том, чтобы „наклонить“ нетрансверсальные куски границы внутрь K', как схематически показано на рис. 1. В нашем случае из-за того, что слои вещественно-двумерны, а объемлющее пространство многомерное, требуются довольно громоздкие технические построения.

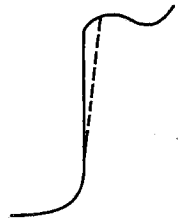

Рис. 1.

Слои косого цилиндра M, на которых лежат особые точки проекции границы ∂K, будем называть *критическими*. Пересечение границы $\partial K'$ с критическими слоями может содержать открытые области на этих слоях („плоские“ части). Мы строим семейство гладких вещественных кривых в базе, пересекающих проекцию множества критических слоев (видимый контур), и рассматриваем объединения слоев над этими кривыми. В каждом таком вещественно-трехмерном

множестве мы заменяем „плоскую“ часть границы на некоторую выпуклую кусочно-линейную поверхность („многогранник“) так, чтобы при ее сглаживании получалась поверхность, трансверсальная слоям, и чтобы наша конструкция гладко зависела от точки базы (видимого контура). Затем мы сглаживаем эти многогранники и склеиваем их в псевдовыпуклую гиперповерхность, приближающую границу $\partial K'$. При этом мы используем эквисингулярную стратификацию множества особенностей проекции (т.е. такую, что ограничение проекции на каждый страт имеет постоянный ранг) и согласованную с ней стратификацию видимого контура в базе. Существенно то, что при этом старшие страты в базе оказываются псевдовыпуклыми. Действительно, из дальнейшего построения будет видно, что они являются проекциями „плоских“ частей границы $\partial K'$, уравнения которых не зависят от вертикальной координаты (на слое), и они псевдовыпуклы, так как $\partial K'$ псевдовыпукло.

Перейдем к подробному изложению необходимых конструкций.

1.3. Особенности проекции и стратификация. Пусть, как и выше, ∂K — граница множества K, $\Gamma \subset \partial K$ — множество тех точек, в которых граница ∂K не трансверсальна слоям, т.е. ограничение проекции на ∂K имеет особенность. Пусть $\partial K'$ — граница множества K' и $\Gamma' = \Gamma \cap \partial K'$. Проекции множеств Γ и Γ' на базу обозначим соответственно Σ и Σ'. Множества Σ и Σ' не обязательно являются во всех точках гладкими (и даже топологическими) многообразиями. Они, однако, являются стратифицированными множествами, так же как и Γ и Γ'. Это следует из того, что множества Γ и Γ' являются полуаналитическими, а Σ и Σ' — субаналитическими (т.е. проекциями полуаналитических). Для Γ и Σ это очевидно, а для Γ' и Σ' будет показано в приведенном далее предложении 3. (Теория субаналитических множеств, включая теоремы о стратификации, изложена в [9].) Граница $\partial K'$ состоит из двух частей:

$$\partial K' = \partial_1 K' \cup \partial_2 K',$$

в точках из $\partial_1 K'$ она трансверсальна слоям, а в точках из $\partial_2 K'$ нет. Проекция множества $\partial_2 K'$ на базу совпадает с Σ'.

Далее, мы будем пользоваться тем, что строгая псевдовыпуклость сохраняется при малых деформациях. Свойство, выполнения которого можно добиться малой деформацией множества K и устойчивое относительно деформаций, мы будем иногда называть *свойством общего положения*.

Сделаем еще одно

Замечание. Напомним, что в силу предложения 1 мы можем ввести в окрестности любого слоя множества K евклидовы координаты, в которых $\pi(z, w) = z$. Поэтому в локальной по базе ситуации мы можем отождествить касательное

пространство к ∂K (или $\partial K'$) с гиперплоскостью в этом евклидовом пространстве и говорить, например, о пересечении касательной гиперплоскости с базой.

Следующее предложение описывает структуру границы ∂K в окрестности особой точки проекции.

Предложение 2. *Пусть K — множество в косом цилиндре со строго псевдовыпуклой гладкой границей, имеющее вид $K = \{(z, w) : f(z, w) < 0\}$, и пусть p — особая точка проекции его границы. Заменой координат в окрестности точки p по отдельности в базе и слое — вещественно-гладкой в базе и комплексно-линейной в слое — уравнение границы ∂K в этой окрестности можно привести к виду*

$$f(z, w) = x_1 + l_1(z)u + l_2(z)\nu + u^2 + a\nu^2 + r(z, u, \nu) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $z_j = x_j + iy_j$ — координаты на базе, u и ν — вещественные координаты на слое ($w = u + i\nu$), l_1 и l_2 — вещественно-линейные функции от z, в остаток r входят члены степени > 2. Имеют место следующие свойства.

1) *В некоторой окрестности точки p на каждом слое, пересекающем эту окрестность, любая вещественная прямая вида $\nu = \mathrm{const}$ имеет не более двух точек пересечения с ∂K.*

2) *В случае $\alpha = 0$ границу слоя $K_{\pi p}$ образует изолированная точка или кривые, гладкие всюду в некоторой окрестности точки p, кроме самой точки p, и имеющие общую касательную ось ν в p.*

3) *В случае $\alpha \neq 0$ для границы ∂K общего положения множество Γ проектируется на гладкое многообразие вещественной коразмерности 1 в базе, и касательная гиперплоскость к этому многообразию в точке πp является пересечением с базой касательной гиперплоскости к ∂K в точке p. (Эта гиперплоскость вертикальна в том смысле, что она является объединением слоев, см. замечание перед формулировкой настоящего предложения.)*

Доказательство. Гладкой заменой координат в базе сведем линейную часть в уравнении границы ∂K к функции x_1 и уберем квадратичную часть по z. Рассмотрим теперь ограничение функции f на критический слой, содержащий точку p. Приведем ее квадратичную часть к сумме квадратов ортогональным преобразованием. Один из коэффициентов всегда будет положительным. (Это следует из положительной определенности формы Леви.) Отсюда сразу получается представление (1.1). Утверждения 1) и 2) немедленно следуют из этого выражения.

Докажем утверждение 3). В случае границы общего положения всюду имеем $l_i(z) \neq 0$, $i = 1, 2$. Действительно, если n — комплексная размерность базы, то условия $f = f_w = 0$ вместе с $l_1 = 0$ или $l_2 = 0$ составляют $2n + 3$ вещественных уравнений, что больше вещественной размерности косого цилиндра, равной

$2n+2$. В окрестности точки πp проекция ветви множества Γ, содержащей точку p, определяется уравнением (1.1) и условиями равенства нулю производных по u, ν:

$$0 = l_1(z) + 2u + r_1(z, u, \nu),$$
$$0 = l_2(z) + 2\alpha\nu + r_2(z, u, \nu).$$

Здесь r_1 и r_2 имеют второй порядок малости. Исключая u, ν из последних двух уравнений и подставляя в (1.1), получаем, что уравнение проекции имеет вид

$$0 = x + 1 + o(z).$$

Касательная гиперплоскость определяется условием $x_1 = 0$ и совпадает с пересечением с базой гиперплоскости, касательной к ∂K в точке p. •

Определение 5. В случае, когда в выражении (1.1) $\alpha \neq 0$, мы будем говорить, что проекция в точке p имеет *квадратичную особенность*.

Следующее предложение суммирует нужные нам свойства стратификации.

Предложение 3. *Пусть множества K, K', ∂K, Γ, Γ', Σ, Σ' определены, как описано выше. В случае границы ∂K общего положения множества Γ, Γ', Σ, Σ' допускают стратификации, обладающие следующими свойствами.*

1) *Все страты односвязны, каждый страт множества Γ диффеоморфно проектируется на страт множества Σ, и над каждым стратом $\sigma \subset \Sigma$ объединение границ слоев $\partial(K \cap M_z)$ является семейством кривых, диффеоморфным прямому произведению $\sigma \times \partial(K \cap M_{z_0})$ для произвольной точки z_0, принадлежащей страту σ; аналогичное утверждение справедливо и для стратификаций множеств Γ' и Σ', размерность множества $\partial_2 K' \cap M_z$ при этом фиксирована.*

2) *Каждый страт любого из множеств Γ, Γ', Σ, Σ' примыкает к страту максимальной размерности.*

3) *Каждый страт любого из множеств Γ, Γ', Σ, Σ' является CR-многообразием (т.е. имеет постоянную размерность комплексного касательного пространства T^0).*

4) *У любой точки $p \in \Gamma$ существует такая окрестность $U \subset \Gamma$, что все страты максимальной размерности множества $\pi U \subset \Sigma$, на границе которых лежит точка πp, имеют в этой точке общее предельное положение касательных гиперплоскостей, совпадающее с пересечением гиперплоскости, касательной к ∂K в точке p, с базой; аналогичное утверждение справедливо для множеств Γ' и Σ'.*

Доказательство. Докажем сначала утверждения 1)–4) для множеств Γ и Σ. В силу вещественной аналитичности границы ∂K существуют стратификации

множества ∂K и базы такие, что страт отображается в страт, на каждом страте множества ∂K ранг проекции π постоянен и ядро касательного отображения $D\pi$ трансверсально страту [9, теорема 5.13]. Поэтому на каждом страте множества Γ проекция является вложением и локально в окрестности каждой точки границы ∂K существует структура прямого произведения, обладающая свойством 1).

Зафиксируем некоторую точку z_0, принадлежащую страту $\sigma \subset \Sigma$, и покажем, что структура прямого произведения существует над некоторой окрестностью точки z_0 на σ.

Пусть p_i — особые точки проекции, лежащие над z_0, и пусть $U_i \subset \bigcup\limits_{z \in \sigma} M_z$ — множества, удовлетворяющие следующим условиям: они являются пересечениями окрестностей точек p_i в M с объединением слоев над стратом σ; все U_i проектируются на одну окрестность $V \subset \sigma$ точки z_0 на σ; существуют диффеоморфизмы φ_i, отображающие пересечения $\partial K \cap U_i$ на произведения $V \times (U_i \cap (\partial K)_{z_0})$. Эти диффеоморфизмы можно считать тождественными над z_0. Часть границы ∂K, лежащая над V и находящаяся вне U_i, диффеоморфна произведению V на несвязное объединение конечного числа отрезков. Легко видеть, что мы можем продолжить диффеоморфизмы φ_i, определенные на концах этих отрезков (точнее, их образов на ∂K), до диффеоморфизмов, отображающих каждый слой $(\partial K)_z$, $z \in V$, на слой $(\partial K)_{z_0}$ и тождественных над точкой z_0. Измельчая стратификации у Γ и Σ, мы можем добиться того, что каждый страт множества Γ будет проектироваться на соответствующий страт множества Σ взаимно-однозначно, и все страты будут односвязными, так что структура прямого произведения существует над целыми стратами. Отсюда следует свойство 1).

Свойство 2) получается, если мы заметим, что старшие страты в Γ состоят из квадратичных особенностей и малой деформацией множества K, мы можем добиться того, что в любой окрестности каждой особой точки проекции будут находиться невырожденные особые точки (квадратичные особенности), в окрестности которых Γ проектируется на гладкое многообразие вещественной коразмерности 1.

Для доказательства свойства 3) заметим, что если страт множества Γ (или Σ) локально описывается уравнениями $\{\rho_i = 0\}$, $i = 1, \dots, k$, то скачок размерности комплексного касательного пространства происходит на множестве, где меняется ранг матрицы $\{\partial\rho_i/\partial z_j\}$. В случае общего положения это множество — многообразие высшей коразмерности, и мы можем измельчить старую стратификацию так, чтобы оно стало объединением новых стратов, удовлетворяющих свойству 3).

Для доказательства свойства 4) заметим, что старшему страту множества Σ соответствует случай $\alpha \neq 0$ в выражении (1). Если точка πp лежит на границе

одного или нескольких старших стратов, то из п. 3) предложения 1 и гладкости касательного расслоения многообразия ∂K следует, что предельные положения касательных гиперплоскостей к этим стратам совпадают с пересечением базы с гиперплоскостью, касательной к ∂K в точке p.

Докажем теперь наше предложение для множеств Γ' и Σ'. Нужно только показать, что эти множества стратифицированы. Для этого заметим, что Γ' является пересечением множества Γ с теоретико-множественной границей множества $\partial_2 K'$. В эту границу входит объединение некоторых стратов множества Γ, по которым происходит „обрезание“ множества K, и которое проектируется на Σ', а в остальных точках она локально является пересечением $\partial K \cap (\Sigma' \times M_z)$. Отсюда немедленно следует наше утверждение. Предложение 3 доказано. •

Вернемся к локальной ситуации в окрестности особой точки проекции. Рассмотрим сначала случай, когда на критическом слое проколотая окрестность точки касания лежит вне K. Мы говорим тогда, что имеет место *эллиптическое касание*.

Предложение 4. *На границе множества K' нет точек, которые на границе множества K были бы точками эллиптического касания.*

Доказательство. Пусть p — точка эллиптического касания. Тогда у нее имеется такая окрестность U, что существуют слои косого цилиндра, для которых их пересечение с U не содержит точек из K, и для слоев M_z, имеющих непустое пересечение с $U \cap K$, диаметр этого пересечения стремится к нулю при $z \to \pi p$. Поэтому $p \notin sB$ и связные компоненты слоев множества K, принадлежащие окрестности U, не могут содержаться в K', т.е. они отбрасываются по построению множества K'. •

Пусть теперь p — особая точка, лежащая на границе компакта K', и $z_0 = \pi p$. В силу п. 4) предложения 3 в базе существует гиперплоскость α, которая касается в точке z_0 всех старших стратов множества Σ, лежащих в образе проекции некоторой окрестности на $U \subset \Gamma$ точки p. При движении вдоль пути, трансверсального α в точке z_0, слои множества $\operatorname{cl} K'$ в окрестности точки p изменяются, как показано на рис. 2, причем возможны только две топологически различные картины, см. рис. 2, а и б (изображена граница слоев). Это следует из п. 1) предложения 4 с учетом того, что граница слоя K'_{z_0} должна быть связной вещественно-аналитической кривой с особенностью в точке p. В случае рис. 2, а мы иногда будем говорить, что имеет место *гиперболическое касание*, в случае рис. 2, б, что имеется особенность *типа перегиба*.

1.4. Сглаживание. В этом и следующем пунктах доказываются технические предложения 5 и 6, используемые при доказательстве теоремы об исчерпывании.

Рис. 2, a.

Рис. 2, b.

Как будет подробно описано в §2, для каждой точки $x_0 \in \Sigma'$ мы изменим K' над некоторой окрестностью U точки z_0, так что граница нового множества $\tilde{K}$ будет мало отличаться от $\partial K'$, по-прежнему будет кусочно-гладкой, и будут выполнены следующие условия:

а) $\tilde{K}$ псевдовыпукло;

б) слои $\tilde{K}_z$ связны и односвязны;

в) для каждой точки из $\partial\tilde{K}$, лежащей на слое M_z, $z \in U$, существуют окрестность и ортогональная слою вещественная гиперплоскость L такие, что $\partial\tilde{K}$ в этой окрестности представляет собой график функции точки на L, непрерывной и имеющей конечную константу Липшица. (Ортогональность понимается в локальной униформизующей карте, см. предложение 1.)

После этого мы произведем сглаживание полученной гиперповерхности с помощью следующей стандартной процедуры (ср. [10, гл. 3, 6]). Рассмотрим сначала локальную ситуацию. Пусть h — плюрисубгармоническая функция на области в $\mathbb{C}^N$, ϕ — гладкая „шапочка“ с носителем в единичном шаре, $\int \phi(\zeta)d\zeta = 1$. Тогда сглаженная функция h_ε равна

$$h_\varepsilon(z) = \int h(z - \varepsilon\zeta)\phi(\zeta)d\zeta. \tag{1.2}$$

Для того чтобы определить сглаживание плюрисубгармонической функции на пространстве Штейна, мы используем вложение последнего в $\mathbb{C}^N$. У вложенного многообразия существует голоморфная трубчатая окрестность, т.е. такая, что существует голоморфная ретракция этой окрестности на подмногообразие (см., например, [6, гл. 8, C]). Мы продолжаем нашу функцию h до плюрисубгармонической функции на окрестности и далее действуем, как в локальном случае, понимая под z и ζ в выражении (1.2) координаты в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^N$.

Предложение 5. *При описанном выше сглаживании гиперповерхности, удовлетворяющей условию* в), *получается гиперповерхность, трансверсальная слоям.*

Доказательство. Пусть p — точка на нашей гиперповерхности, $\tilde{z}$ — координата на гиперплоскости L, u — координата в ортогональном направлении. После вложения косого цилиндра в $\mathbb{C}^N$ посредством голоморфного отображения h, как описано выше, можно считать, что наша гиперповерхность продолжена до гиперповерхности в некоторой области в $\mathbb{C}^N$, где она может быть задана как множество нулей некоторой плюрисубгармонической функции. Пусть z — координата в $\mathbb{C}^N$. Продолжим координаты z и u до локальной системы координат $\tilde{z}(z)$, $u(z)$ в окрестности точки $h(p)$. Исходная гиперповерхность описывается как множество нулей функции $F(\tilde{z}, u) \equiv u = f(\tilde{z})$. Сглаженная функция F_ε равна

$$F_\varepsilon(\tilde{z}, u) = \int F[\tilde{z}(z - \varepsilon\zeta)]u(z - \varepsilon\zeta)\phi(\zeta)d\zeta,$$

где ϕ — „шапочка“, как в формуле (1.2). Учитывая, что $u(z)$ — гладкая функция, получаем, что при малых ε уравнение гиперповерхности $F_\varepsilon(z) = 0$ имеет вид

$$u(z) = \varepsilon g(z, \varepsilon) + \int F[\tilde{z}(z - \varepsilon\zeta)]\phi(\zeta)d\zeta, \tag{1.3}$$

где $g(z, \varepsilon)$ — гладкая функция. Полагая $u_i = u(z_i)$, $\tilde{z}_i = \tilde{z}(z_i)$, $i = 1, 2$, получаем

$$|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon C(|u_1 - u_2| + |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2|) + L(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2|,$$

где C — константа, не зависящая от ε, L — константа Липшица функции f. Отсюда следует, что после замены переменной $z \mapsto (\tilde{z}, u)$ в уравнении (1.3) мы можем выразить u как гладкую функцию от $\tilde{z}$ в окрестности точки p. Это и означает, что сглаженная гиперповерхность не касается слоев. •

1.5. Надстройка над младшими стратами в базе.

Предложение 6. *Пусть $\gamma \subset \Gamma'$ — страт описанной в предложении* 3 *стратификации, состоящий из точек гиперболического касания, т.е. каждая точка $p \in \gamma$ лежит на границе вещественно-двумерного слоя множества $\partial_2 K'$. Тогда для каждой точки $z \in \sigma$, $\sigma = \pi\gamma$, в некоторой ее окрестности существует псевдовыпуклая гладкая гиперповерхность в базе, содержащая пересечение страта σ с этой окрестностью и касающаяся в точке z предельного положения гиперплоскостей, касательных к тем старшим стратам множества Γ', на границе которых лежит точка p (см. свойство* 4) *из предложения* 3).

Доказательство. Обозначим через P упоминавшуюся предельную касательную гиперплоскость в точке z в базе, а через P^c — содержащуюся в ней комплексную

гиперплоскость. Выберем в окрестности точки z локальную систему координат $z_j = x_j + iy_j$ так, чтобы гиперплоскость P определялась условием $x_1 = 0$, а вещественное касательное пространство T к σ в точке z — уравнениями $\{x_i = 0, 1 \leqslant r, y_j = 0, s \leqslant j \leqslant r\}$. Тогда для комплексного касательного пространства T^c к σ получаем $T^c = \{z_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant r\}$. Положим $z' = \{z_{r+1}, \dots, z_n\}$. Это — координаты на пространстве T^c. После, если нужно, голоморфной замены координаты z_1 множество σ будет определяться следующими уравнениями:

$$x_1 = \mathcal{Q}(z', \overline{z}') + \sum_{i \leqslant r} [x_i a_i(z) + y_i b_i(z)] + o(|z|^2), \tag{1.4}$$

$$x_i = g_i(z), \quad 2 \leqslant i \leqslant r, \tag{1.5}$$

$$y_j = h_j(z), \quad s \leqslant j \leqslant r. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathcal{Q}$ — эрмитова форма, a_i и b_j — линейные формы, g_i и h_j имеют второй порядок малости по $|z|$.

Лемма. *Форма $\mathcal{Q}$ неотрицательно определена.*

Доказательство. Действительно, пусть ζ — голоморфное векторное поле на σ, τ — вектор, ортогональный в P комплексному касательному пространству P^c. Рассматривая форму $\mathcal{Q}$ как эрмитову форму на комплексных касательных векторах к σ, легко видеть, что ее значение на векторах ζ, $\overline{\zeta}$ равно

$$\mathcal{Q}(\zeta, \overline{\zeta}) = \langle [\zeta, \overline{\zeta}], i\tau \rangle \tag{1.7}$$

(см., например, [11]). Здесь для векторов u, ν используется обозначение $\langle u, \nu \rangle = \sum u_i \nu_i$. Векторные поля ζ, $\overline{\zeta}$ однозначно поднимаются до векторных полей на многообразии $\Xi = \bigcup_{z \in \sigma} (\partial_2 K')_z$, которые в локальной униформизующей карте w (см. предложение 1) ортогональны полю $\partial/\partial w$. Форма (1.7) совпадает на исходных и поднятых векторных полях, которые мы также обозначим ζ, $\overline{\zeta}$. Пусть страт $\gamma \subset \Gamma$ проектируется на σ, пусть $p \in \gamma$ и пусть T_p — касательное пространство к ∂K в точке p. Граница множества K' негладка, но при сглаживании по формуле (1.2) сглаженная граница приближает $\partial K'$ в липшицевой метрике (аналог C^1-метрики, в котором близость производных замененена на близость констант Липшица). Доказательство аналогично доказательству предложения 5. Нетрудно видеть также, что если на $\partial K'$ лежит гладкое многообразие такое, как Ξ, то оно приближается с точностью до производных сколь угодно высокого порядка (в соответствующей C^r-метрике) некоторыми многообразиями Ξ_ε, лежащими на сглаженной границе. Поэтому, если в формуле (1.2) $\varepsilon \to 0$, то пространство T_p приближается касательными пространствами к сглаженной

границе в точках, приближающих точку p, а поле ζ на Ξ — с точностью до второго порядка — голоморфными векторными полями на подмногообразиях Ξ_ε. Мы получаем, что значение формы (1.7) на векторах ζ, $\overline{\zeta}$ приближается значениями форм Леви на векторных полях на псевдовыпуклых многообразиях и, следовательно, неотрицательно. •

Обозначим через $F(z)$ правую часть формулы (1.4). Рассмотрим гиперповерхность, определяемую уравнением

$$x_1 = F(z) + \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \alpha_i z_i [x_i - g_i(z)]. \tag{1.8}$$

Члены второго порядка в правой части равны

$$\mathcal{Q}(z', \overline{z}') + \sum_{1\leqslant i\leqslant r} [x_i a_i(z) + y_i b_i(z)] + \sum_{2\leqslant j\leqslant r} \alpha_j z_j^2. \tag{1.9}$$

Очевидно, что гиперповерхность (1.8) содержит многообразие, определяемое уравнениями (1.4)–(1.6). С другой стороны, если мы выберем коэффициенты α_j достаточно большими положительными, то сужение эрмитовой части формы (1.9) на комплексное касательное пространство $\{z_1 = 0\}$ будет иметь неотрицательные собственные значения. Действительно, последняя сумма в выражении (1.9) равна

$$\frac{1}{2} \sum_{2\leqslant j\leqslant r} \alpha_j [z_j \overline{z}_j + \mathrm{Re}(z_j^2)].$$

Таким образом, поскольку форма $\mathcal{Q}$, в которую входят члены с z_j при $j > r$, неотрицательна, то мы получим, что форма Леви гиперповерхности (8) на комплексном касательном пространстве неотрицательна. Предложение 6 доказано. •

§2. Доказательство теоремы об исчерпывании

Для доказательства теоремы об исчерпывании мы приблизим границу множества K' гладкой вещественной гиперповерхностью, трансверсальной слоям. Проведем это построение в несколько этапов.

2.1. Построение отсекающего многогранника. Пусть над точкой $z_0 \in \Sigma'$ лежит одна точка p множества Γ'. Рассмотрим конструкцию, описанную в конце п. 1.3 после предложения 3: гиперплоскость α в базе, касающаяся в точке z_0 всех старших стратов множества Σ', в замыкании которых лежит z_0, и пусть η, трансверсальный к α в z_0. Пусть Ω — объединение слоев косого цилиндра M, пересекающихся с η. Мы построим в вещественно-трехмерном множестве Ω поверхность Ξ со следующими свойствами.

1) Ξ — кусочно-гладкая поверхность, содержащаяся в $K' \cap \Omega$, при этом Ξ может быть сделана сколь угодно близкой к границе $\partial K' \cap \Omega$ в липшицевой метрике.

2) После отрезания от множества $K' \cap \Omega$ части, заключенной между его границей и Ξ, получается множество $\tilde{K}$, удовлетворяющее условиям а)–в) п. 1.4.

3) Часть поверхности Ξ, не содержащаяся в $\partial K'$ (т.е. $\Xi \setminus \partial K'$), является выпуклой кусочно-линейной поверхностью („многогранником").

Приступим к построению. В окрестности точки p слои множества $\operatorname{cl} K'$ изменяются, как показано на рис. 2. Пусть α' — касательная гиперплоскость к ∂K в точке p, $\pi\alpha' = \alpha$. Ту сторону от α и соответственно α', по которую слои множества K имели несколько компонент, будем называть *наружной*, а другую — *внутренней*. На рис. 2, а и б в обоих случаях наружной стороне соответствует первый рисунок. В наружную сторону направлена внешняя нормаль к ∂K в точке p. При переходе с наружной на внутреннюю сторону слои компакта K' могут изменяться скачком. Модифицируем теперь $\partial K'$ в окрестности слоя K'_{z_0} так, чтобы удовлетворялись условия 1)–3). Для этого поступим следующим образом.

Начало координат на базе выберем в точке z_0 и вещественные координаты в окрестности точки p выберем так, чтобы уравнение границы ∂K в этих координатах имело вид (1.1). На слое M_0 пересечение множества K' с некоторой окрестностью точки p лежит в области $\{v < 0\}$. Проведем на M_0 прямую l вида $\{\nu = \delta\}$, где δ — малая отрицательная константа. Выберем в Ω направление поворота плоскостей вокруг линии l так, чтобы положительным считался поворот, при котором часть множества $\partial_2 K'$, лежащая выше l, поворачивалась бы во внутреннюю сторону от гиперплоскости α'. Проведем в Ω плоскость A, повернутую на положительный угол вокруг прямой l. На рис. 3 изображена эта конструкция: плоскость A наклонена внутрь Ω „выше" l, т.е. отрезается часть множества Ω „над" плоскостью A. Если линия l расположена достаточно близко к точке p и угол наклона плоскости A достаточно мал, то в точках пересечения A с $\partial_1 K'$ граница $\partial K'$ трансверсальна слоям и, как следует из локального описания границы в окрестности особой точки проекции (предложение 2 и рис. 2), в некоторой окрестности точки p на каждом слое M_z (z принадлежит соответствующей окрестности точки z_0) линия пересечения плоскости A со слоем трансверсальна границе слоя K_z, причем отрезок этой линии, лежащий на K'_z, стремится к нулю при $\delta \to 0$. Аналогично случаю гиперплоскости α' ту сторону от плоскости A, на которой находится точка p, будем называть *наружной*, а другую — *внутренней*. Часть множества $K' \cap \Omega$, лежащая снаружи от A, содержит компоненту связности, на границе которой находится точка p. Отсечем от $K' \cap \Omega$ эту компоненту. Граница полученного множества $K^1 \subset \Omega$ во всех своих гладких точках, лежащих с внутренней стороны от A,

трансверсальна слоям. Условие в), п. 1.4 в множестве Ω выполняется в тех точках из $A \cap \partial K$, где линия пересечения плоскости A со слоем трансверсальна границе слоя множества K', в частности, это верно в некоторой окрестности точки p. Действительно, для каждой такой точки пересечения, принадлежащей слою M_z, существует направление на этом слое, вдоль которого граница слоя K_z^1 однозначно проектируется и может быть представлена как график функции с конечной константой Липшица. В качестве гиперплоскости L в условии в) можно взять плоскость, ортогональную этому направлению; тривиальным образом она также ортогональна слою M_z. Однако в целом в множестве K^1 слои могут быть несвязны и условие в) может нарушаться. Дело заключается в следующем.

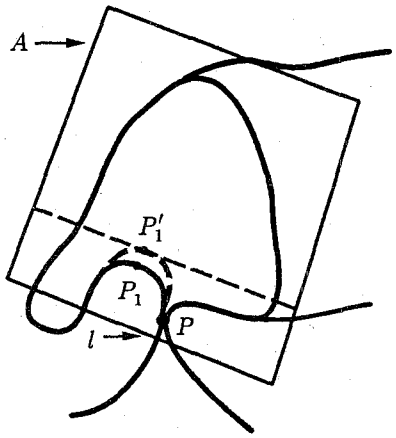

Рис. 3.

Пусть $D = M_0 \cap \partial_2 K'$. Граница ∂D — это кривая, гладкая всюду, кроме точек из Γ'. Слои множества K' над точками базы, близкими к началу, получаются деформацией слоя $(\operatorname{cl} K')$, срезанного по линиям, параллельным прямой l. На кривой ∂D могут быть точки, касательные в которых параллельны l (см. рис. 4), причем у слоев множества K^1, близких к слою над точкой z_0, могут появляться дополнительные компоненты связности. Например, на рис. 4 это точки p_1 и p_2, а возникающие компоненты связности получаются деформацией заштрихованных частей.

Множество K^1 оказывается устроенным аналогично „необрезанному“ множеству $K \cap \Omega$. Рассмотрим, для определенности, окрестность точки p_1. Пусть $\partial K_z'$ — граница слоя K_z', лежащего с внутренней стороны от гиперплоскости α'. На $\partial K_z'$ существует точка p_{1z}, близкая к p_1, в которой касательная к $\partial K_z'$ параллельна прямой l. Для некоторого z' точка $p_1' = p_{1z'}$ лежит на плоскости A

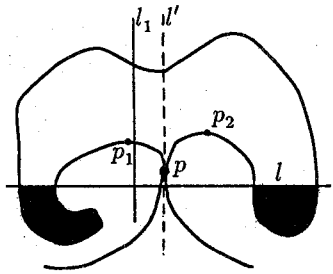

Рис. 4.

(см. рис. 3). В окрестности точки p_1' слои множества K^1 изменяются аналогично слоям множества K в окрестности точки p, и при сглаживании границы множества K^1 (которое мы в дальнейшем должны сделать) появятся точки, в которых граница сглаженного множества касается слоев. Точки, подобные p_1, будем называть *A-критическими*. Чтобы преодолеть это затруднение, поступим следующим образом.

Пусть l' — прямая на слое M_0, ортогональная к l и проходящая через точку p. Пусть, как и на рис. 4, p_1 и p_2 — A-критические точки, ближайшие к l' слева и справа соответственно. Если (например, слева) таких ближайших точек — несколько, то можно выбрать произвольную. Проведем плоскость A', повернутую под малым углом θ к плоскости A так, чтобы выполнялись условия: прямая $l_1 = A' \cap M_0$ параллельна прямой l' и проходит между l' и точкой p_1; точки, лежащие слева от l_1, после поворота на угол θ оказываются с внутренней стороны от плоскости A. Ту сторону от плоскости A', на которой находится точка p_1, будем называть *наружной*, а другую — *внутренней*. Потребуем, чтобы точка p_1' также лежала с наружной стороны от A'. Как и выше, лежащая снаружи от A' часть множества K^1 имеет связную компоненту, на границе которой лежит p_1'. Отсечем от K^1 эту компоненту. Пусть K_2 — полученное множество. На части границы множества D, лежащей слева от линии l_1, могут находиться A'-критические точки, в которых касательная к границе вертикальна, и эти точки могут порождать нежелательные компоненты связности у слоев множества K_2. Поступим в этом случае аналогично предыдущему. Общее число критических точек не превышает числа точек с вертикальными и горизонтальными касательными на ∂D. В конце концов, за конечное число шагов, мы построим выпуклую кусочно-линейную поверхность (многогранник), которая отсекает от $K' \cap \Omega$ некоторую область, примыкающую к „вертикальной“ части границы. Поверхность Ξ, образованная добавлением к построенному многограннику „неотсеченной“ части границы $\partial K'$, по построению обладает свойствами 1)–3) (см. начало настоящего пункта).

Из нашего построения следует также, что выполняется следующее свойство.

4) Если над некоторым множеством $\sigma \subset \Sigma'$ слои множества $\operatorname{cl} K'$ и семейство трансверсальных кривых η_z, $z \in \sigma$, гладко зависят от точки базы, то соответствующее семейство поверхностей Ξ_z можно построить гладко зависящим от точки базы.

Определение. Построенную кусочно-линейную поверхность (часть поверхности Ξ) мы будем называть *отсекающим многогранником с базовой точкой* p. Будем называть *локальной отсекающей поверхностью* любую поверхность в Ω, приближающую в липшицевой метрике отсекающий многогранник и такую, что после отсечения внешней (в очевидном смысле) по отношению к ней части получается множество, удовлетворяющее в Ω условиям а)–в), п. 1.4. Очевидно, мы можем продолжить отсекающий многогранник с базовой точкой p и локальную отсекающую поверхность до гиперповерхности, определенной в некоторой окрестности множества Ω, так, что в вещественно-трехмерных семействах слоев над кривыми η_z, близкими к Ω, получится отсекающая поверхность также и для точек $p' \in \Gamma'$, достаточно близких к p. Такую гиперповерхность мы будем называть *локальной отсекающей гиперповерхностью*. Теперь нам нужно построить *глобальную* отсекающую гиперповерхность, приближающую $\partial_2 K'$ над всем Σ'.

Замечание. Отсекающий многогранник пересекается со слоем M_0 по линии l (см. рис. 3, 4). Если точка p лежит достаточно близко к l, то можно сдвинуть отсекающий многогранник так, чтобы его линия пересечения с M_0 проходила через p и полученная кусочно-линейная поверхность обладала в p всеми свойствами отсекающего многогранника, кроме свойства в), п. 1.4. Обратно, при построении отсекающего многогранника можно начать с плоскости, проходящей через p, а в конце построенную поверхность сдвинуть так, чтобы свойство в) выполнялось во всех точках. Это замечание понадобится нам в следующем пункте.

2.2. Трансверсализация для случая квадратичных особенностей. В окрестности стратифицированного множества Γ' построим семейство кривых η_p, ортогональных к ∂K в точках из Γ'. Это семейство гладко зависит от $p \in \Gamma'$. При проектировании на базу получится семейство кривых η_z, $z \in \Sigma'$, гладко зависящих от z на каждом страте множества Σ' и трансверсальных к Σ' в том смысле, что кривые η_z трансверсальны старшим стратам и предельным положениям касательных гиперплоскостей в особых точках (см. предложение 3, свойство 4). Если над z расположено несколько точек множества Γ', соответствие $z \mapsto \eta_z$ становится неоднозначным, но мы сохраняем обозначение η'_z; нужно только помнить, какой точке $p \in \Gamma'$ соответствует кривая η_p, $\pi\eta_p = \eta_z$.

В этом пункте мы построим отсекающую гиперповерхность для множества точек $p \in \Gamma'$, принадлежащих старшим стратам, т.е. множеству с квадратич-

ными особенностями проекции (коэффициент α в выражении (1.1) не равен нулю), и таких, что над $z_0 = \pi p$ не лежит других точек множества Γ'.

Метод построения следующий. В окрестности каждой такой точки p множество Γ проектируется на гладкую гиперповерхность в базе, задаваемую уравнением $f(z) = 0$. Мы можем аппроксимировать отсекающий многогранник с базовой точкой p гладкой выпуклой поверхностью и продолжить ее до поверхности Ξ' так, чтобы для Ξ' выполнялись свойства 1), 2), 4) из п. 2.1, а в свойстве 3) вместо кусочно-линейной фигурировала гладкая выпуклая поверхность. В силу предложений 1 и 3 и свойства 4) из п. 2.1 мы можем построить гладкое семейство таких поверхностей, зависящих от точки p. Их объединение даст в каждой точке p страта локальную отсекающую гиперповерхность H_p. Так как H_p приближает „вертикальную" гиперповерхность $\{f(z) = 0\}$, то уравнение гиперповерхности H_p записывается в виде $f(z) + \varphi_p(z, w) = 0$ над некоторой окрестностью каждой точки $z_0 = \pi p$, где функция φ_p мала в C^2-норме по сравнению с f. Мы будем рассматривать также семейство гиперповерхностей $H_{p\varepsilon}$ с уравнениями

$$f(z) + \varepsilon\varphi_p(z, w) + \varepsilon\delta_p(\varepsilon) = 0, \tag{2.1}$$

где δ_p — величина, гладко зависящая от ε. Далее, мы будем считать, что гиперповерхность с уравнением $f(z) + \varepsilon\varphi_p(z, w) = 0$ проходит через точку p, а величина $\varepsilon\delta_p$ обеспечивает сдвиг с точки p (см. замечание в конце п. 2.1). Мы покажем, что объединение локальных гиперповерхностей вида (2.1) при достаточно малом ε удовлетворяет условиям а)–в) п. 1.4 везде, кроме, быть может, некоторой окрестности слоев, проектирующихся на младшие страты, причем эта окрестность может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора ε.

Предложение 7. *Можно так построить отсекающий многогранник, что если H_p — такая отсекающая гиперповерхность, что ее сужение на объединение слоев над кривой η_z достаточно близко к слою K'_z в липшицевой метрике, то $H_{p\varepsilon}$ — также отсекающая гиперповерхность при $0 < \varepsilon < 1$ и подходящем выборе $\delta_p(\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть, как и в п. 2.1, Ω — объединение слоев, пересекающихся с кривой η_z, координаты в Ω выбраны с началом в точке p, координата вдоль η_z обозначается через x. Достаточно доказать следующее утверждение.

Пусть Ξ_p — отсекающий многогранник с уравнением $x + \varphi_p(w) = 0$ (очевидно, такое представление возможно), $\Xi_{p\varepsilon}$ — поверхность с уравнением $x + \varepsilon\varphi_p(w) + \delta_p(\varepsilon) = 0$. Тогда при соответствующем выборе φ_p и $\delta_p(\varepsilon)$, $\Xi_{p\varepsilon}$ — также отсекающий многогранник при $0 < \varepsilon < 1$.

Требуется проверить только выполнение условия в) п. 1.4. В силу замечания в конце п. 2.1 мы можем считать, что многогранник Ξ_p содержит точку p, а величина $\delta_p(\varepsilon)$ равна нулю (как уже говорилось, она введена для того, чтобы

сдвинуть многогранник с точки p). Пусть, как и ранее, A — одна из отсекающих плоскостей, p_1 — A-критическая точка, $p_1' \in \partial K_z' \cap A$ — точка, в которой касательная к $\partial K_z'$ параллельна прямой $l = A \cap M_{z_0}$ (см. рис. 3, 4), для многогранника Ξ_p; пусть A_ε и $p_{1\varepsilon}'$ — соответствующие объекты для многогранника $\Xi_{p\varepsilon}$. Нужно показать, что если точка p_1' лежит снаружи от плоскости A', то точка $p_{1\varepsilon}'$ лежит снаружи от соответствующей плоскости A_ε'. Но $p_{1\varepsilon}' \to p_1$ при $\varepsilon \to 0$, причем x-координата точки $p_{1\varepsilon}'$ стремится к нулю пропорционально ε^k с $k \geqslant 1$, а угол поворота плоскости A_ε' стремится к нулю пропорционально ε, в то время как ось поворота с точностью до малых высшего порядка остается на постоянном расстоянии от точки p_1. Если первоначальный многогранник был достаточно близок к слою, то при $\varepsilon < 1$ точка $p_{1\varepsilon}'$ остается снаружи от A_ε' (см. рис. 5, где изображена проекция вдоль слоев, причем стрелками обозначены направления поворота плоскостей A и A'). •

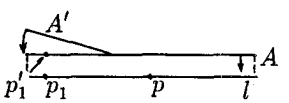

Рис. 5.

Пусть σ — один из старших стратов множества Σ'. Определим отображение $\Psi(z)$ из окрестности множества σ в множество Γ. Если точка z принадлежит достаточно малой окрестности страта σ, то через нее проходит одна кривая семейства η, пересекающая σ в точке z', и $\Psi(z) := \pi^{-1}(z') \cap \Gamma$. Также однозначно определена отсекающая гиперповерхность $H_{\Psi(z)}$. Рассмотрим гиперповерхность H_ε, определяемую уравнением

$$f(z) + \varepsilon\varphi_{\Psi(z)}(z, w) = 0. \tag{2.2}$$

Так как отсекающие многогранники аппроксимируются выпуклыми поверхностями, то можно полагать, что $\varphi_{p,\overline{w},w} > \lambda > 0$ для некоторого λ, если только точка πp принадлежит компактному подмножеству страта σ. (Вообще говоря, λ зависит от этого подмножества.) До сих пор наши построения зависели от выбора локальных униформизующих карт, но последнее условие, т.е. субгармоничность функции φ по w, от выбора карты не зависит. Часть $\partial_2 K'$ границы множества K' определяется уравнением $f(z) = 0$. Так как множество K' голоморфно выпукло, то форма Леви функции f неотрицательна. Малой деформацией исходного множества K можно добиться того, что она будет положительно определена. Действительно, f можно приблизить строго плюрисубгармонической функцией $f + h$. Если ∂K в окрестности точки p определяется уравнением $F(z, w) = 0$, то требуемая деформация определяется уравнением

$F(z,w)+h_1(z,w)=0$, где функция h_1 достаточно мала в C^2-норме, совпадает с $h(z)$ в некоторой окрестности страта $\gamma\subset\Gamma$, проектирующегося на σ, и обращается в нуль вне его некоторой большей окрестности. Функция h_1 глобально определена в некоторой окрестности страта γ; мы можем также потребовать, чтобы она обращалась в нуль над границей страта σ.

Предложение 8. *Пусть страт σ является строго псевдовыпуклым. Тогда при достаточно малом ε гиперповерхность H_ε строго псевдовыпукла везде, кроме, может быть, окрестности слоев, проектирующихся на границу σ, причем эта окрестность может быть сделана сколь угодно малой соответствующим выбором ε.*

Доказательство. Положим

$$g(z,w)=\varphi_{\Psi(z)}(z,w)+\delta_{\Psi(z)}(\varepsilon).$$

Комплексное касательное пространство в точке (z,w) к гиперповерхности, заданной уравнением $f(z)+\varepsilon g(z,w)=0$, определяется условием

$$\sum_{i\leqslant n}(f_{z_i}+\varepsilon g_{z_i})a_i+\varepsilon g_w a_{n+1}=0.$$

Сужая форму Леви на комплексное касательное пространство, получаем форму:

$$\sum_{i,j\leqslant n}(f+\varepsilon g)_{\overline{z}_i z_j}\overline{a}_i a_j+2\operatorname{Re}\Big[g_w^{-1}\sum_{i\leqslant n}(f+\varepsilon g)_{z_i}a_i\sum_{i\leqslant n}g_{\overline{z}_i w}\overline{a}_i\Big]$$
$$+\varepsilon^{-1}|g_w|^{-2}g_{\overline{w}w}\Big|\sum_{i\leqslant n}(f+\varepsilon g)_{z_i}a_i\Big|^2. \tag{2.3}$$

В нашем случае $\operatorname{grad} f\neq 0$, а первые и вторые производные функции f и g ограничены константами, определяемыми геометрией множества K. В то же время $g_{\overline{w}w}>\lambda>0$ для некоторого λ. Форма (2.3) положительно определена, если положительно определена следующая форма от $n+1$ переменных:

$$\sum_{i,j\leqslant n}(f+\varepsilon g)_{\overline{z}_i z_j}\overline{a}_i a_j+2\operatorname{Re}\Big[\sum_{i\leqslant n}g_{\overline{z}_i w}\overline{a}_i a_{n+1}\Big]+\varepsilon^{-1}g_{\overline{w}w}|a_{n+1}|^2.$$

При достаточно малом ε она положительно определена по критерию Гурвица: первые n миноров положительны в силу положительной определенности формы Леви функции f, а в последнем миноре произведение диагональных элементов доминирует из-за члена $\varepsilon^{-1}g_{\overline{w}w}$. •

Замечание. При построении гиперповерхности H_ε мы можем предполагать, что при приближении к слоям, проектирующимся на границу страта σ и содержащим особенности проекции границы ∂K с вырождениями коразмерности > 1, угол между H_ε и слоем стремится к нулю. (Для этого достаточно удовлетворить такому требованию при построении семейства H_p.) На самом деле мы даже обязаны сделать такое предположение, поскольку длина кривых семейства η может стремиться к нулю при приближении к границам страта.

Проведем наше построение над всеми старшими стратами множества Σ'. Построенную гиперповерхность мы будем обозначать H^1. После отсечения от K' части, внешней по отношению к H^1, мы получим множество, удовлетворяющее условиям а)–в) п. 1.4 всюду, кроме окрестностей слоев, содержащих особенности проекции высшей коразмерности. Теперь нам нужно построить отсекающую гиперповерхность в окрестности таких вырожденных точек.

2.3. Построение отсекающей гиперповерхности для стратов высшей коразмерности и окончание доказательства теоремы об исчерпывании. Прежде всего дополним стратификацию предложения 3. Рассмотрим какой-нибудь страт $\gamma \subset \Gamma'$, который проектирует на страт $\sigma \subset \Gamma'$, причем в точках из γ имеет место гиперболическое касание (см. конец п. 1.3), т.е. слои множества $\partial_2 K'$ (см. п. 1.3) над точками γ вещественно-двумерны. В каждой точке $z \in \sigma$ существует предельное положение касательных гиперплоскостей к тем старшим стратам множества Σ', к которым σ примыкает в точке z (см. предложение 3). Обозначим эту предельную гиперплоскость через T_z. По предложению 6 в окрестности каждой точки $z \in \sigma$ страт σ можно включить в псевдовыпуклую гиперповерхность в базе $X_{\sigma,z}$, касательное пространство к которой в точке z совпадает с T_z. Отсюда следует, что существует разбиение страта σ на открытые подмножества σ_i, дополнение объединения которых полуаналитично, так что каждое из них включается в псевдовыпуклую гиперповерхность X_i, и кривые η_z трансверсальны к X_i в точках из σ_i. Подмножество в γ, проектирующееся на σ_i, обозначим γ_i. Каждое компактное подмножество в σ пересекается с конечным числом множеств σ_i. В некоторой окрестности множества $\bigcup \sigma_i$ объединение гиперповерхностей X_i является многообразием. Обозначим его X_σ. Произведем такое измельчение со всеми стратами, начиная со стратов вещественной коразмерности 2 в базе. На каждом этапе мы включаем дополнение к $\bigcup \sigma_i$ в множество стратов высшей коразмерности. Всюду ниже мы опускаем индекс i и всегда имеем в виду нашу измельченную стратификацию.

Будем проводить построение отсекающей гиперповерхности последовательно индукцией по коразмерности стратов. Предположим, что построение выполнено до особенностей коразмерности $k-1$ включительно. Это означает следующее.

Над произвольно малой окрестностью объединения стратов множества Σ'

коразмерности $\leqslant k-1$ множество $\partial_2 K'$ можно приблизить кусочно-гладкой гиперповерхностью H^{k-1} так, что граница этой гиперповерхности содержится в объединении множества $\partial_1 K'$ и подмножества границы $\partial K'$, лежащего над стратами коразмерности $\geqslant k$, при этом угол между H^{k-1} и слоями стремится к нулю при приближении к стратам коразмерности $> k-1$. Аналогично п. 2.1 определяются внешняя и внутренняя стороны гиперповерхности H^{k-1}. Множество $K^{(k-1)}$, получающееся после отсечения от K' внешней части, удовлетворяет условиям б) и в), п. 1.4 везде, кроме точек, лежащих над стратами коразмерности $\geqslant k$, а условию псевдовыпуклости — везде, кроме, может быть, некоторых окрестностей стратов высшей коразмерности.

Продолжим теперь наше построение. Пусть $\gamma \subset \Gamma'$ — страт коразмерности k, проектирующийся на страт $\sigma \subset \Sigma'$ той же коразмерности k. Рассмотрим сначала случай, когда слои множества Γ' над σ состоят из одной точки. По предложению 3 точка $p \in \gamma$ гладко зависит от точки $z = \pi p \in \sigma$, при этом кривая, ограничивающая $\partial_2 K' \cap M_z$, также гладко зависит от z. Поскольку $\partial_2 K' \cap M_z$ не может изменять свою размерность над стратом σ, то особенности типа перегиба, когда это множество вырождается в точку, должны проектироваться на отдельные страты.

Рассмотрим сначала случай вещественно-двумерных множеств $\partial_2 K' \cap M_z$. Рассмотрим многообразие $X = \bigcup\limits_{z \in \sigma} (\partial_2 K' \cap M_z)$. Как в начале этого пункта, обозначим через T_z гиперплоскость в базе, являющуюся предельной для гиперплоскостей, касательных к тем старшим стратам, к которым σ примыкает в точке $z \in \sigma$. Так как $\partial_2 K'$ задается теми же уравнениями, что и X (они не зависят от w), то аналогичное утверждение справедливо и для точек из X: в данном случае над старшими стратами лежат гладкие гиперповерхности, в замыкании которых содержится X, и существует предельное положение касательных гиперплоскостей T_p проектируется в T_z. Касательное пространство к σ в точке z должно лежать в T_z, и касательное пространство к X в точке p лежит в T_z.

Пусть X_σ — псевдовыпуклая гиперповерхность в базе такая, как в начале этого раздела. Построим кусочно-гладкое многообразие E_γ коразмерности 3 в M, лежащее в $\partial K^{(k-1)}$, содержащее страт γ и проектирующееся на многообразие X_σ. Для этого заметим, что граница $\partial K^{(k-1)}$ трансверсальна слоям везде, кроме точек X, и слои над точками из X_σ пересекаются с этой границей в окрестности множества γ. Для того чтобы построить E_γ, достаточно взять пересечение множества $\partial K^{(k-1)} \cap$ (объединение слоев над X_σ) с гиперповерхностью, пересекающей это множество трансверсально вне γ и содержащей γ. Гладкость может нарушаться в точках из γ. Продолжим семейство кривых η_p до непрерывного семейства кривых $\eta_{\gamma p}$, пересекающих $\partial K^{(k-1)}$ в точках $p \in Y_\gamma$ и таких, что они проектируются на гладкое семейство кривых

$\eta_{X,z}$, трансверсальных гиперповерхности X_σ. Очевидно, мы можем строить отсекающие многогранники и сглаженные отсекающие поверхности не только с базовыми особыми точками проекции, но и с базовыми точками трансверсальности слоям. Мы можем строить их также для множества $K^{(k-1)}$, а не только для K. Построим такое семейство отсекающих поверхностей Ξ_p для точек $p \in Y_\gamma$, используя семейство кривых $\eta_{\gamma p}$, так, чтобы при приближении к точкам границы $\partial\gamma$ угол между отсекающей поверхностью и слоем стремился к нулю и отсеченная часть исчезала на границе некоторой окрестности страта γ на $K^{(k-1)}$. Последнее условие можно выполнить, поскольку граница $\partial K^{(k-1)}$ трансверсальна слоям в некоторой окрестности страта γ везде, кроме точек из γ. Далее мы строим отображение Ψ, отсекающую гиперповерхность H_Ψ и гиперповерхность H_ε, как в случае квадратичных особенностей. Хотя первоначально гладкость построенной гиперповерхности может нарушаться, но после сглаживания мы получим гиперповерхность, описываемую уравнением типа (2.2), и к ней применимо предложение 8. Для того чтобы граница полученного множества была псевдовыпукла в окрестности страта γ, нужно, чтобы она пересекалась с построенными ранее отсекающими гиперповерхностями там, где они псевдовыпуклы. Мы всегда можем этого добиться, модифицировав, если нужно, отсекающие гиперповерхности над окрестностями стратов низшей коразмерности. Действительно, область возможной непсевдовыпуклости тем меньше, чем лучше отсекающие поверхности приближают слои („меньше угол“). При этом пересечение построенной нами гиперповерхности с $\partial K^{(k-1)}$ будет находиться вне некоторой окрестности страта γ, не зависящей от степени аппроксимации (ε в предложении 8). Вновь построенная часть границы в окрестности страта γ при этом не изменяется.

Пусть теперь над точками страта σ множества $\partial_2 K' \cap M_z$ не двумерны. Заметим, что одномерных множеств в случае общего положения не может быть, поскольку они должны содержаться в множестве Γ, которое имеет нульмерные слои. Итак, пусть множества $\partial_2 K' \cap M_z$ содержат по одной точке (особенность типа перегиба). Тогда над некоторой окрестностью любого компактного подмножества страта σ граница K' мало отличается от ∂K (над σ мы ничего не отрезали), и C^2-малой деформацией из ∂K можно получить гиперповерхность H, трансверсальную слоям. Она будет строго псевдовыпуклой, поскольку K — строго псевдовыпуклое множество. Мы можем построить ее так, чтобы она отличалась от ∂K только в малой окрестности страта γ и была трансверсальна слоям там, где она переходит в часть границы $\partial K^{(k-1)}$, совпадающую с ∂K. После этого мы, если требуется, исправляем отсекающие гиперповерхности над окрестностями старших стратов, как в конце предыдущего абзаца.

Пусть теперь над точками страта σ лежит по несколько точек из Γ'. Трудность заключается в том, что нормали к ∂K в этих точках могут быть направлены в

разные стороны и не будет направления, внешнего по отношению к K' во всех этих точках. Мы поступим следующим образом.

Пусть над точкой z лежит несколько точек из Γ'. Введем на них иерархию. *Особыми точками первого порядка* назовем точки, принадлежащие Γ' и лежащие на границе связной компоненты слоя K_z, содержащей 0. Особые точки первого порядка могут лежать на границе других связных компонент слоя K_z. Особые точки, лежащие на границе этих компонент и не являющиеся особыми точками первого порядка, назовем *особыми точками второго порядка.* К ним, в свою очередь, могут примыкать другие компоненты связности, на границе которых могут лежать особые точки третьего порядка и т. д. Так как ∂K является множеством уровня строго плюрисубгармонической функции, то в слое множества $\operatorname{cl} K$ не может быть гомотопически нетривиальных циклов и граф примыкания является деревом. Поэтому порядок особой точки корректно определен. Ввиду того что особые точки не могут сливаться над стратом σ, их иерархия над ним сохраняется. Множество точек фиксированного порядка, лежащих над σ, составляет объединение нескольких стратов множества Γ'. Будем строить отсекающие гиперповерхности последовательно, начиная с точек наивысшего порядка, и для каждого страта множества Γ', содержащего точки одного порядка, независимо. При этом не возникает никаких новых специфических трудностей.

Таким образом мы можем построить отсекающую гиперповерхность последовательно над окрестностями всех стратов множества Σ', чем заканчивается доказательство теоремы об исчерпывании. •

§3. Исчерпывание и униформизация

Теперь мы докажем, что из униформизуемости косых цилиндров со строго псевдовыпуклой гладкой границей следует униформизуемость штейновых косых цилиндров. Это делается с помощью модификации для косых цилиндров метода исчерпывания в теории униформизации, известного из одномерного комплексного анализа. Рассмотрим сначала более простой случай сильной униформизуемости.

Предложение 9. *Пусть для косого цилиндра M существует исчерпывающая последовательность сильно униформизуемых вложенных косых цилиндров M_i. Тогда косой цилиндр M также сильно униформизуем.*

Доказательство. Пусть M_i — косой цилиндр из исчерпывающей последовательности. На каждом его слое существует координата w, конформная на этом слое и отображающая его на единичный круг, причем нуль соответствует голоморфному сечению. Пусть f — отображение w^{-1} и пусть вложение M_i $B \times \mathbb{C}$ (B — база) задается в координатах (z, w) голоморфной функцией h_i, т.е. имеет вид

$(z, w) \mapsto (z, h_i \circ f(r, w))$. Пусть w_1 — голоморфная координата на слое в окрестности голоморфного сечения. Без ограничения общности мы можем считать, что производная функции h_i в нуле по w_1 равна единице: $(\partial h_i/\partial w_1)(i) = 1$. Рассмотрим последовательность функций $h_j \circ f$, $f > i$, на произведении $B \times K$. Значения в нуле их производных по w зависят только от z и не зависят от i. По теореме Кёбе об искажении на M_i выполняется оценка $|\partial h_j/\partial w| < C$, где константу C, очевидно, можно считать не зависящей от z. Отсюда следует, что последовательность голоморфных функций h_i равномерно ограничена на M_i и компактна по теореме Монтеля. На каждом M_i выберем из последовательности h_j, $j > i$, равномерно сходящуюся подпоследовательность. Выбирая диагональную подпоследовательность, получим последовательность функций h_k, определенных на каждом M_i при $k > i$, и эта последовательность равномерно сходится на M_i. Предел определяет отображение, голоморфно вкладывающее косой цилиндр M в произведение $B \times \mathbb{C}$. •

В случае послойного вложения в $B \times \mathbb{CP}^1$ последовательность однолистных отображений с тождественной 1-струей в нуле, вообще говоря, не будет компактной. Тем не менее справедливо утверждение, аналогичное предложению 9. Идея состоит в том, чтобы отнормировать отображения еще на одном голоморфном сечении.

Предложение 10. *Пусть для косого цилиндра M существует исчерпывающая последовательность униформизуемых вложенных косых цилиндров M_i. Тогда косой цилиндр M также униформизуем.*

Доказательство. Пусть, как в доказательстве предложения 9, f — функция, конформно отображающая единичный круг на слой косого цилиндра M_i, h_i — мероморфная на M_i, однолистная на слоях функция с единичной производной в нуле по голоморфной координате. Заметим, что у голоморфного сечения существует окрестность, расслоенная на голоморфные сечения. Возьмем какое-нибудь сечение $w = \alpha(z)$, отличающееся от нулевого. Беря композицию функции h_i с подходящей дробно-линейной функцией в образе h_i, можно считать, что h_i переводит на каждом слое образ последнего голоморфного сечения в единицу. Для каждого z и $n \geqslant i$ обозначим через f_{zn} сужение функции $h_n \circ f$ на слой над точкой z. Для каждого z функция f_{zn} мероморфна в круге U, переводит $\alpha(z)$ в единицу и имеет производную в нуле, не зависящую от n, ограниченную и отграниченную от нуля равномерно по z.

Покажем, что последовательность f_{zn} компактна на каждом слое, т.е. из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся на компактах.

Пусть $a_n(z) \in \mathbb{CP}^1 \setminus f_{zn}(U)$. Переходя к подпоследовательности n_z (своей на каждом слое), можно считать, что $a_n(z)$ сходится: $a(z) = \lim a_n(z)$. Обозначая

координату в образе отображения f_{rn} также через w, положим

$$\varphi_{zn}(w) = \frac{a_n w}{a_n - w} \quad (a_n = a_n(z)).$$

Положим $g_{rn} = \varphi_{zn} \circ f_{zn}$. Это отображение переводит U в $\mathbb{C}$, нуль — в нуль, и его производная в нуле не зависит от n, ограничена и отделена от нуля равномерно по z. По теореме Кёбе из последовательности g_{zn} можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся на компактах. Пусть

$$g_z = \lim g_{zn}, \quad \varphi_z(w) = \frac{aw}{a - w} = \lim \varphi_{zn}(w).$$

Покажем, что $a(z)$ не может быть равно нулю и, более того, последовательность $a_n(z)$ равномерно по z отграничена от нуля. Действительно, замечая, что

$$\varphi_{zn}^{\circ -1}(w) = \frac{a_n w}{a_n + w} \quad \text{и} \quad f_{zn} = \varphi_{zn}^{\circ -1} \circ g_{zn},$$

получаем, что в противном случае $f_{zn} \to 0$ на компактных подмножествах для некоторой последовательности $z \in \{z_k\}$, $n \in \{n_k(z_k)\}$, а это противоречит условию $f_{zn}(\alpha(z)) = 1$. Таким образом, $a(z) \neq 0$ и для каждого z некоторая подпоследовательность последовательности f_{zn} сходится к $\varphi_z^{\circ -1} \circ g_z$ равномерно на компактах.

Так как последовательность $a_n(z)$ равномерно отграничена от нуля, то отображения f_{zn} накрывают некоторую окрестность, не зависящую от z и n. Так как производные функций f_{zn} равномерно отделены от нуля, то по теореме Кёбе об $1/4$ обратные отображения $f_{zn}^{\circ -1}$ равномерно накрывают некоторую окрестность нуля, а это значит, что функции h_n голоморфны и равномерно ограничены и, следовательно, равностепенно непрерывны в некоторой окрестности нулевого сечения. Следовательно, функции f_{zn} равностепенно непрерывны по z, n в некоторой окрестности нуля.

Пусть A — счетное плотное множество точек в базе. Выбирая подпоследовательность $h_n \circ f$, сходящуюся на слое в точке $z_1 \in A$, из нее — подпоследовательность, сходящуюся на слое в точке $z_2 \in A$, и т. д., а затем переходя к диагональной подпоследовательности, получим последовательность $h_n \circ f$, сходящуюся к некоторой функции F, определенной на слоях над множеством A, мероморфной и однолистной на каждом слое. В силу равностепенной непрерывности эта последовательность сходится в окрестности нуля к функции вида $h \circ f$, где h — функция, голоморфная в окрестности нулевого сечения.

Покажем, что h продолжается до функции, мероморфной и однолистной на каждом слое. Действительно, для каждого $z \notin A$ последовательность f_n компактна на слое в точке z и содержит подпоследовательность, сходящуюся к

однолистной мероморфной функции на этом слое. На слоях в точках из A эта подпоследовательность сходится к функции F, а в окрестности нуля — к функции $h \circ f$.

Для окончания доказательства предложения 10 нужно только показать, что функция, голоморфная в окрестности нулевого сечения и продолжающаяся мероморфно на каждый слой, должна быть всюду голоморфна по базе. Но это следует из того, что у функции, голоморфно зависящей от параметра, аналитическое продолжение вдоль любой фиксированной кривой также голоморфно зависит от параметра. Предложение 10 доказано. •

Список литературы

[1] Ильяшенко Ю. С., *Слоения на аналитические кривые*, Мат. сб. **88(130)** (1972), №4, 558–577.

[2] Il'yashenko Yu., *Covering manifolds for analytic families of leaves of foliations by analytic curves* (в печати).

[3] Bers L., *Simultaneous uniformization*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 94–97; Пер. на рус. яз., Л. Альфорс, Л. Берс. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961, сс. 94–96.

[4] Griffiths P., *Complex-analytic properties of certain Zariski open sets of algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 21–51.

[5] Ильяшенко Ю. С., Щербаков А. А., *О косых цилиндрах и одновременной униформизации*, Тр. Мат. ин-та РАН **213** (1997), 112–122.

[6] Ганнинг Р., Росси Х., *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.

[7] Folland G. B., Kohn J. J., *The Neumann problem for the Cauchy–Riemann complex*, Ann. of Math. Stud., vol. 75, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1972.

[8] Хенкин Г. М., *Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии*, Успехи мат. наук **32** (1977), №3, 57–118.

[9] Denkowska Z., Stasica J., Preprint, Dijon, 1991.

[10] Хермандер Л., *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.

[11] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ*. Ч. 2. *Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1976.

Институт электрохимии РАН
140090, Москва, Ленинский пр., 31

Поступило 10 августа 1998 г.