

© 2020 г. ВАТУТИН В. А.\*, ДЬЯКОНОВА Е. Е.\*

ДОКРИТИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ  
В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С ИММИГРАЦИЕЙ:  
ВЫЖИВАНИЕ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА<sup>1)</sup>

Рассматривается докритический ветвящийся процесс в случайной среде, компоненты которой одинаково распределены и независимы. Предполагается, что к каждому поколению частиц присоединяется ровно один иммигрант. Пусть  $\mathcal{A}_i(n)$  — событие, состоящее в том, что все частицы основного процесса, живущие в момент  $n$ , являются потомками иммигранта, присоединившегося к популяции в момент  $i$ . Исследуется асимптотическое поведение вероятности этого события при  $n \rightarrow \infty$  в случаях, когда  $i$  фиксировано, разность  $n - i$  постоянна и, наконец, когда  $\min(i, n - i) \rightarrow \infty$ . Для нахождения интересующих нас асимптотик мы доказали несколько предельных теорем о свойствах случайных блужданий, остающихся либо неотрицательными, либо неположительными на промежутке  $[0, n]$ .

*Ключевые слова и фразы:* ветвящийся процесс, случайная среда, иммиграция, условное случайное блуждание.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5403>

**1. Введение и основные результаты.** Мы рассматриваем ветвящийся процесс с иммиграцией, эволюционирующий в случайной среде. Частицы в таком процессе размножаются независимо друг от друга в соответствии со случайными законами распределения, которые могут меняться от поколения к поколению. Кроме того, к каждому поколению присоединяется ровно один иммигрант. Обозначим  $\Delta$  — пространство всех вероятностных мер на множестве  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Оснащая это пространство метрикой полной вариации, мы превращаем его в польское пространство. Зададим на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$  пространства  $\Delta$  вероятностную меру  $\mathbf{P}$ . Пусть  $F$  — случайная величина, принимающая

---

\*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi-ras.ru; elena@mi-ras.ru

<sup>1)</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00111).

значения в пространстве  $\Delta$ , и пусть  $F_n, n \in \mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ , — последовательность независимых вероятностных копий  $F$ . Бесконечная последовательность  $\mathcal{E} = \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$  называется случайной средой.

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин  $\mathbf{Y} = \{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ , определенных на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , называется ветвящимся процессом в случайной среде с одним иммигрантом в каждом поколении (ВПССИ), если  $Y_0 = 1$  и, при фиксации среды  $\mathcal{E}$ , процесс  $\mathbf{Y}$  является марковским процессом, подчиняющимся закону

$$\mathcal{L}(Y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \mathcal{E} = (f_1, f_2, \dots)) = \mathcal{L}(\xi_{n1} + \dots + \xi_{ny_{n-1}} + 1)$$

при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_{n-1} \in \mathbb{N}_0$  и  $f_1, f_2, \dots \in \Delta$ , где  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots$  — независимые случайные величины, имеющие распределение  $f_n$ . Таким образом,  $Y_{n-1}$  — это число частиц  $(n-1)$ -го поколения, а  $f_n$  — закон распределения числа потомков у частицы  $(n-1)$ -го поколения. Нам будет удобно считать, что если  $Y_{n-1} = y_{n-1} > 0$  — количество частиц  $(n-1)$ -го поколения процесса  $\mathbf{Y}$ , то сначала рождаются  $\xi_{n1} + \dots + \xi_{ny_{n-1}}$  частиц  $n$ -го поколения, а затем один иммигрант присоединяется к популяции.

Назовем  $(i, n)$ -кланом совокупность индивидуумов  $n$ -го поколения, являющихся потомками иммигранта, присоединившегося к популяции в момент  $i$ . Будем говорить, что только представители  $(i, n)$ -клана присутствуют в процессе  $\mathbf{Y}$  в момент  $n$ , если  $Y_n^- := \xi_{n1} + \dots + \xi_{ny_{n-1}} > 0$  и все  $Y_n^-$  частиц принадлежат к  $(i, n)$ -клану. Обозначим  $\mathcal{A}_i(n)$  событие, состоящее в том, что только  $(i, n)$ -клан выживает в  $\mathbf{Y}$  в момент  $n$ . Целью данной работы является изучение для докритических ВПССИ асимптотического поведения вероятности  $\mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n))$  при  $n \rightarrow \infty$  и изменении параметра  $i$  вместе с  $n$  соответствующим образом.

Рассматриваемая задача допускает следующую биологическую интерпретацию. Предположим, что каждый иммигрант принадлежит к новому виду животных или принадлежит к одному и тому же виду, но подвергся мутации. В этом случае осуществление события  $\mathcal{A}_i(n)$  означает, что все индивидуумы популяции, живущие в момент  $n$ , являются потомками общего предка, пришедшего в популяцию в момент  $i$ , что отражает малое генетическое разнообразие в этой популяции, обусловленное процессом эволюции. Отметим, что для критических ВПССИ вероятность события  $\mathcal{A}_i(n)$  исследовалась в работе [1].

Ветвящиеся процессы в случайной среде с одним иммигрантом в каждом поколении впервые рассматривались в классической работе [2] в связи с изучением свойств случайных блужданий в случайной среде. Позднее такая модель ВПССИ использовалась в различных ситуациях в работах [3]–[6]. Упомянем также статьи [7] и [8], в которых исследовался хвост распределения периодов жизни в докритических и критических

ветвящихся процессах в случайной среде с иммиграцией более общего вида, чем рассматриваемая нами.

Наряду с процессом  $\mathbf{Y}$  мы будем рассматривать стандартный ветвящийся процесс  $\mathbf{Z} = \{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  в случайной среде (ВПСС), который, при фиксации среды  $\mathcal{E}$ , является марковским процессом с начальным условием  $Z_0 = 1$  и законом распределения

$$\mathcal{L}(Z_n \mid Z_{n-1} = z_{n-1}, \mathcal{E} = (f_1, f_2, \dots)) = \mathcal{L}(\xi_{n1} + \dots + \xi_{nz_{n-1}})$$

для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n-1} \in \mathbb{N}_0$  и  $f_1, f_2, \dots \in \Delta$ .

Для формулировки основных результатов работы введем так называемое сопровождающее случайное блуждание  $\mathbf{S} = \{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ . Это случайное блуждание имеет приращения  $X_n = S_n - S_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , определяемые соотношениями

$$X_n = \ln m(F_n),$$

и являющиеся независимыми и одинаково распределенными копиями случайной величины  $X := \ln m(F)$ , где

$$m(F) := \sum_{j=1}^{\infty} jF(\{j\}).$$

С мерой  $F$  мы свяжем вероятностную производящую функцию

$$F(s) := \sum_{j=0}^{\infty} F(\{j\})s^j.$$

Будем предполагать, что случайная функция  $F(s)$  удовлетворяет следующим ограничениям.

*Условие A1.* Функция  $F(s)$  является геометрической с вероятностью 1, т.е.

$$F(s) = \frac{q}{1 - ps} = \frac{1}{1 + m(F)(1 - s)},$$

где параметры  $p, q \in (0, 1)$  случайны,  $p + q = 1$  и

$$m(F) = \frac{p}{q} = e^{\ln(p/q)} = e^X.$$

ВПСС (а значит, и соответствующий ему ВПССИ) является докритическим, т.е.

$$-\infty < \mathbf{E}X < 0$$

и либо  $-\infty < \mathbf{E}[Xe^X] < 0$  (строго докритический случай), либо  $\mathbf{E}[Xe^X] = 0$  (промежуточно докритический случай), либо существует число  $0 < \beta < 1$  такое, что

$$\mathbf{E}[Xe^{\beta X}] = 0$$

(слабо докритический случай).

Заметим, что ВПСС, упомянутые в условии **A1**, не исчерпывают все возможные случаи докритических ВПСС. Например, они не включают в себя докритические ВПСС, для которых  $\mathbf{E}[Xe^{tX}] = \infty$  для всех  $t > 0$  (см. [9]), или для которых  $\mathbf{E}[Xe^{tX}] < 0$  для всех  $0 \leq t \leq \beta$ , где  $\beta = \sup\{t \geq 0: \mathbf{E}[Xe^{tX}] < \infty\} \in (0, 1)$  (см. [10]).

При анализе свойств ВПСС и ВПССИ одним из основных инструментов является замена мер. Мы также используем этот подход и вводим новую меру  $\mathbb{P}$ , полагая для любого  $n \in \mathbb{N}$  и любой ограниченной измеримой функции  $\psi: \Delta^n \times \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\psi(F_1, \dots, F_n, Y_0, \dots, Y_n)] := \gamma^{-n} \mathbf{E}[\psi(F_1, \dots, F_n, Y_0, \dots, Y_n) e^{\delta S_n}], \quad (1)$$

где

$$\gamma := \mathbf{E}[e^{\delta X}],$$

причем  $\delta = 1$  для строго докритических и промежуточно докритических ВПССИ и  $\delta = \beta$  для слабо докритических ВПССИ.

Заметим, что при такой замене соотношение  $\mathbf{E}[Xe^{\delta X}] = 0$  переходит в равенство

$$\mathbb{E}[X] = 0.$$

*Условие A2.* Для промежуточно и слабо докритических ВПССИ распределение случайной величины  $X$  принадлежит (относительно меры  $\mathbb{P}$ ) к области притяжения двустороннего устойчивого закона с индексом  $\alpha \in (1, 2]$ .

Поскольку в этом случае  $\mathbb{E}[X] = 0$ , то условие **A2** обеспечивает существование такой последовательности положительных чисел

$$c_n = n^{1/\alpha} l_1(n), \quad (2)$$

где  $l_1(1), l_1(2), \dots$  — последовательность, медленно меняющаяся на бесконечности, для которой закон распределения случайной последовательности  $S_n/c_n$  слабо сходится при  $n \rightarrow \infty$  к упомянутому двухстороннему устойчивому закону. Кроме того, при выполнении этого условия существует число  $\rho \in (0, 1)$  такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > 0) = \rho. \quad (3)$$

Напомним, что  $\mathcal{A}_i(n)$  — это событие, заключающееся в том, что только представители  $(i, n)$ -клана присутствуют в процессе  $\mathbf{Y}$  в момент  $n$ .

Рассмотрим сначала строго докритический случай.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{Y}$  — строго докритический ВПССИ, удовлетворяющий условию **A1**. Тогда

1) для любого фиксированного  $N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n-N}(n)) =: r_N \in (0, \infty);$$

2) найдется константа  $R \in (0, \infty)$  такая, что

$$\lim_{n-i \rightarrow \infty} \gamma^{-(n-i)} \mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n)) = R.$$

В следующей теореме анализируется промежуточно докритический случай.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{Y}$  — промежуточно докритический ВПССИ, удовлетворяющий условиям A1 и A2. Тогда

1) для любого фиксированного  $N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n-N}(n)) = r_N \in (0, \infty);$$

2) существуют медленно меняющаяся функция  $l(n)$  и константа  $R \in (0, \infty)$  такие, что

$$\lim_{n-i \rightarrow \infty} \gamma^{-(n-i)} (n-i)^{\rho} l(n-i) \mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n)) = R.$$

В формулировке третьей теоремы важную роль играют константы  $c_n$ , введенные формулой (2).

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{Y}$  — слабо докритический ВПССИ, удовлетворяющий условиям A1 и A2. Тогда

1) для любого фиксированного  $N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{A}_{n-N}(n)) =: r_N \in (0, \infty);$$

2) для любого фиксированного  $i$  существует константа  $R_i \in (0, \infty)$  такая, что

$$\lim_{n-i \rightarrow \infty} \gamma^{-(n-i)} (n-i) c_{n-i} \mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n)) = R_i;$$

3) существует константа  $R \in (0, \infty)$  такая, что

$$\lim_{\min(i, n-i) \rightarrow \infty} \gamma^{-(n-i)} (n-i) c_{n-i} \mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n)) = R.$$

Структура дальнейшей части работы такова. В разделе 2 собраны некоторые вспомогательные результаты, включающие в себя явное выражение для вероятности события  $\mathcal{A}_i(n)$  и доказательства двух условных предельных теорем для случайных блужданий, остающихся либо неотрицательными, либо отрицательными.

Раздел 3 содержит доказательство предельной теоремы о свойствах некоторых функционалов, построенных по случайным блужданиям с нулевым сносом. Раздел 4 посвящен доказательству теорем 1–3.

В последующем изложении обозначения  $C, C_1, C_2, \dots$  используются для констант, которые могут меняться от формулы к формуле, а символами  $K, K_1, K_2, \dots$  обозначаются фиксированные константы.

## 2. Вспомогательные результаты.

**2.1. Некоторые тождества.** Используя среду  $\mathcal{E} = \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ , можно построить последовательность независимых и одинаково распределенных производящих функций

$$F_n(s) := \sum_{j=0}^{\infty} F_n(\{j\})s^j, \quad s \in [0, 1].$$

Нам понадобятся итерации функций  $F_1, \dots, F_n$ , задаваемые для  $0 \leq i \leq n-1$  при помощи равенств

$$\begin{cases} F_{i,n}(s) := F_{i+1}(F_{i+2}(\dots F_n(s) \dots)), \\ F_{n,i}(s) := F_n(F_{n-1}(\dots F_{i+1}(s) \dots)) \end{cases}$$

и соотношением  $F_{n,n}(s) := s$  при  $i = n$ .

Теперь, при фиксации случайного блуждания  $\mathbf{S}$ , мы можем представить вероятность события  $\mathcal{A}_i(n)$  в виде

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n) \mid \mathbf{S}) = \mathbf{E} \left[ (1 - F_{i,n}(0)) \prod_{k \neq i}^{n-1} F_{k,n}(0) \mid \mathbf{S} \right].$$

Для удобства изложения положим

$$\mathfrak{h}_n(s) := (1 - F_{0,n}(s)) \prod_{k=1}^{n-1} F_{k,n}(s)$$

и для  $0 \leq i \leq n$  введем обозначения

$$\begin{aligned} a_{i,n} &:= e^{S_i - S_n}, & a_n &:= a_{0,n} = e^{-S_n}, \\ b_{i,n} &:= \sum_{k=i}^{n-1} e^{S_i - S_k}, & b_n &:= b_{0,n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-S_k}, \quad b_0 := 0. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Если выполнено условие A1, то

$$\mathfrak{h}_n(s) = \frac{1}{a_n(1-s)^{-1} + b_n} \frac{a_n(1-s)^{-1}}{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_1}.$$

*Доказательство.* Используя условие

$$F_i(s) = \frac{q_i}{1 - p_i s} = \frac{1}{1 + e^{X_i}(1-s)},$$

нетрудно проверить по индукции, что для любого  $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$F_{i,n}(s) = 1 - \frac{a_i}{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_i} = \frac{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_{i+1}}{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_i}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} h_n(s) &= \frac{1}{a_n(1-s)^{-1} + b_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_{j+1}}{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_j} \\ &= \frac{1}{a_n(1-s)^{-1} + b_n} \frac{a_n(1-s)^{-1}}{a_n(1-s)^{-1} + b_n - b_1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В завершение данного раздела приведем представление случайной величины

$$\mathcal{H}_{i,n} := (1 - F_{i,n}(0)) \prod_{k \neq i}^{n-1} F_{k,n}(0)$$

в терминах случайных величин  $a_i, b_i, 0 \leq i \leq n$ .

**Следствие 1.** Если выполнено условие A1, то для любого  $i = 0, 1, \dots, n - 1$

$$\mathcal{H}_{i,n} = \frac{a_i}{a_n + b_n - b_{i+1}} \frac{a_n}{a_n + b_n}.$$

*Доказательство.* Если  $i = 0$ , то желаемое утверждение непосредственно следует из леммы 1, поскольку  $H_{0,n} = h_n(0)$ . Для  $i \geq 1$  доказываемое равенство следует после очевидных преобразований из соотношения (4) при  $s = 0$ . Следствие доказано.

**2.2. Меры  $\mathbb{P}_x^+$  и  $\mathbb{P}_x^-$ .** В данном разделе важную роль играют случайные величины

$$M_n := \max(S_1, \dots, S_n), \quad L_{j,n} := \min(S_j, S_{j+1}, \dots, S_n), \quad L_n := L_{0,n}$$

и момент первого достижения минимального значения случайного блуждания на отрезке  $[0, n]$ :

$$\tau(n) := \min\{0 \leq k \leq n : S_k = L_n\}.$$

Чтобы пойти дальше, нам нужно выполнить еще две замены мер, используя непрерывные справа функции  $U: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  и  $V: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned} U(x) &:= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \geq -x, M_n < 0), \quad x \geq 0; & U(x) &= 0, \quad x < 0, \\ V(x) &:= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n < -x, L_n \geq 0), \quad x \leq 0; & V(x) &= 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Хорошо известно (см., например, [11] и [12]), что для любого осциллирующего случайного блуждания справедливы равенства

$$\mathbb{E}[U(x + X); X + x \geq 0] = U(x), \quad x \geq 0, \tag{5}$$

и

$$\mathbb{E}[V(x+X); X+x < 0 = V(x)], \quad x \leq 0. \quad (6)$$

Пусть  $\mathcal{E} = \{F_1, F_2, \dots\}$  — случайная среда, а  $\mathcal{F}_n$ ,  $n \geq 1$ , —  $\sigma$ -алгебра событий, порожденная случайными последовательностями  $F_1, F_2, \dots, F_n$  и  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ . Указанные  $\sigma$ -алгебры образуют фильтрацию  $\mathfrak{F}$ . Ясно, что приращение  $X_n$  случайного блуждания  $\mathbf{S}$  измеримо относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$ . Используя мартингальные свойства (5), (6) функций  $U$  и  $V$ , мы для каждого  $n \geq 1$  введем стандартным образом (см., например, главу 7 книги [13]) вероятностную меру  $\mathbb{P}_{(n)}^+$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}_n$  при помощи плотности

$$d\mathbb{P}_{(n)}^+ := U(S_n) \mathbf{I}\{L_n \geq 0\} d\mathbb{P}.$$

Это определение и теорема Колмогорова о продолжении мер показывают, что для соответствующего вероятностного пространства существует вероятностная мера  $\mathbb{P}^+$  на  $\mathfrak{F}$  такая, что

$$\mathbb{P}^+|_{\mathcal{F}_n} = \mathbb{P}_{(n)}^+, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

В последующем мы будем использовать произвольное начальное значение  $S_0 = x$  и писать  $\mathbb{P}_x$  и  $\mathbb{E}_x$  для соответствующих вероятностных мер и математических ожиданий. В частности,  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$  и  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_0$ . Это соглашение позволяет для каждой  $\mathcal{F}_n$ -измеримой случайной величины  $O_n$  переписать соотношение (7) в виде

$$\mathbb{E}_x^+[O_n] := \frac{1}{U(x)} \mathbb{E}_x[O_n U(S_n); L_n \geq 0], \quad x \geq 0.$$

Аналогично, используя функцию  $V$ , можно определить вероятностные меры  $\mathbb{P}_x^-$ ,  $x \leq 0$ :

$$\mathbb{E}_x^-[O_n] := \frac{1}{V(x)} \mathbb{E}_x[O_n V(S_n); M_n < 0], \quad x \leq 0.$$

При помощи мер  $\mathbb{P}_x^+$  и  $\mathbb{P}_x^-$  мы будем исследовать предельное поведение некоторых условных распределений.

Напомним сначала некоторые известные результаты, касающиеся свойств случайных величин  $M_n$  и  $L_n$ .

**Лемма 2** (см., например, лемму 2.1 в [11]). *Если выполнено условие A2, то существуют медленно меняющаяся функция  $l_1(n)$  и число  $\kappa > 0$  такие, что при  $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{P}(L_n \geq 0) \sim \frac{l_1(n)}{n^{1-\rho}}; \quad \mathbb{P}(M_n < 0) \sim \frac{\kappa}{n^\rho l_1(n)}. \quad (8)$$

Следующая лемма описывает асимптотическое поведение некоторых условных функционалов. Положим

$$m_{1\theta} := \int_0^\infty e^{-\theta z} U(z) dz, \quad m_{2\theta} := \int_{-\infty}^0 e^{\theta z} V(z) dz$$

и введем меры

$$u_\theta(z) := m_{1\theta}^{-1} U(z) \mathbf{I}\{z \geq 0\} dz, \quad v_\theta(z) := m_{2\theta}^{-1} V(z) \mathbf{I}\{z < 0\} dz.$$

**Лемма 3** (см. предложение 2.1 в [12]). *Если выполнено условие A2, то существует константа  $K > 0$  такая, что для любого  $\theta > 0$  при  $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{E}_x[e^{-\theta S_n}; L_n \geq 0] \sim \frac{K}{nc_n} U(x) m_{2\theta}, \quad x \geq 0, \tag{9}$$

и

$$\mathbb{E}_x[e^{\theta S_n}; \tau(n) = n] \sim \frac{K}{nc_n} V(x) m_{1\theta}, \quad x \leq 0. \tag{10}$$

Следующие два утверждения являются естественными модификациями лемм 7.3 и 7.5 из главы 7 монографии [13]. Зафиксируем  $0 < \delta < 1$  и условимся считать в последующем изложении, что  $\delta n := \lfloor \delta n \rfloor$ .

**Лемма 4.** *Пусть  $W_n := w_n(F_1, \dots, F_{\delta n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — такие случайные величины со значениями в евклидовом (или польском) пространстве  $\mathcal{W}$ , что при  $n \rightarrow \infty$*

$$W_n \rightarrow W_\infty \quad \mathbb{P}^+ \text{-н.н.}$$

для некоторой  $\mathcal{W}$ -значной случайной величины  $W_\infty$ . Пусть, далее,  $T_n := t_n(F_1, \dots, F_{\delta n})$ ,  $n \geq 1$ , — такие случайные величины со значениями в евклидовом (или польском) пространстве  $\mathcal{T}$ , что при  $n \rightarrow \infty$

$$T_n \rightarrow T_\infty \quad \mathbb{P}_x^- \text{-н.н.}$$

для всех  $x \in \mathcal{T}$  и некоторой  $\mathcal{T}$ -значной случайной величины  $T_\infty$ . Положим

$$\tilde{T}_n := t_n(F_n, \dots, F_{n-\delta n+1}).$$

Пусть, далее,  $\varphi: \mathcal{W} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  — такая непрерывная функция, что

$$\sup_{(u,v,z) \in \mathcal{W} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}_+} |\varphi(u, v, z)| e^{\theta z} < \infty$$

для некоторого  $\theta > 0$ . Если выполнено условие A2, то

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} nc_n \mathbb{E}[\varphi(W_n, \tilde{T}_n, S_n); L_n \geq 0] \\ & = K \iint \varphi(u, v, -z) \mathbb{P}^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}_z^-(T_\infty \in dv) V(z) dz. \end{aligned}$$

Следующее утверждение является естественным дополнением к этой лемме.

**Лемма 5.** Пусть случайные величины  $W_n, T_n, \tilde{T}_n, n \in \mathbb{N}$ , — такие же, как и в лемме 4, причем при  $n \rightarrow \infty$

$$W_n \rightarrow W_\infty \quad \mathbb{P}_x^+ \text{-н.н.}, \quad T_n \rightarrow T_\infty \quad \mathbb{P}^- \text{-н.н.}$$

для всех  $x \geq 0$ . Пусть, далее,  $\varphi: \mathcal{W} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$  — такая непрерывная функция, что

$$\sup_{(u,v,z) \in \mathcal{W} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}_-} |\varphi(u, v, z)| e^{-\theta z} < \infty$$

для некоторого  $\theta > 0$ . Если выполнено условие A2, то

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n c_n \mathbb{E}[\varphi(W_n, \tilde{T}_n, S_n); \tau(n) = n] \\ &= K \iiint \varphi(u, v, -z) \mathbb{P}_z^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}^-(T_\infty \in dv) U(z) dz. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Доказательства этих двух утверждений очень похожи, поэтому мы убедимся в справедливости только первого из них. Поскольку  $e^{\theta z} \varphi(x, y, z)$  является ограниченной непрерывной функцией, мы можем применить лемму 7.3 из главы 7 монографии [13] и, используя определение меры  $\nu_\theta(dz)$ , заключить, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E}[\varphi(W_n, \tilde{T}_n, S_n) e^{\theta S_n} e^{-\theta S_n}; L_n \geq 0]}{\mathbb{E}[e^{-\theta S_n}; L_n \geq 0]} \\ & \rightarrow \iiint e^{-\theta z} \varphi(u, v, -z) \mathbb{P}^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}_z^-(T_\infty \in dv) \nu_\theta(dz) \\ &= m_{2\theta}^{-1} \iiint \varphi(u, v, -z) \mathbb{P}^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}_z^-(T_\infty \in dv) V(z) dz. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы достаточно вспомнить (9).

**3. Предельная теорема для сопровождающего случайного блуждания.** Обозначим

$$B_{j,n} := b_n - b_j = \sum_{k=j}^{n-1} e^{-S_k}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

и пусть для фиксированного  $\delta \in (0, 1)$

$$W_n := B_{1,n\delta} = \sum_{k=1}^{[n\delta]} e^{-S_k}, \quad \tilde{T}_n := \sum_{k=[n\delta]+1}^n e^{S_n - S_k}.$$

Полагая

$$T_n := \sum_{k=0}^{n-[n\delta]} e^{S_k},$$

закключаем при помощи леммы 2.7 работы [11], что если выполнено условие A2, то для любого  $x \geq 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$W_n \rightarrow W_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-S_k} < \infty \quad \mathbb{P}_x^+ \text{-п.н.}, \tag{11}$$

$$T_n \rightarrow T_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} e^{S_k} < \infty \quad \mathbb{P}_{-x}^- \text{-п.н.} \tag{12}$$

Следующее утверждение является обобщением теоремы, доказанной в статье [14].

**Лемма 6.** Пусть  $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  и  $h: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  — две неотрицательные непрерывные функции, отличные от тождественного нуля, причем существуют числа  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  и  $C > 0$  такие, что

$$g(x) \leq Cx^{\lambda_1}, \quad h(x, y) \leq \frac{C}{(1 + x + y)^{\lambda_2}} \tag{13}$$

для всех  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Если  $X$  принадлежит (относительно меры  $\mathbb{P}$ ) к области притяжения двухстороннего устойчивого закона с параметром  $\alpha \in (1, 2]$ , то найдутся положительные константы  $K_{g,h}$  и  $K_h$  такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nc_n \mathbb{E}[g(a_n)h(a_n, B_{1,n})] = K_{g,h} \tag{14}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[h(a_n, B_{1,n})]}{\mathbb{P}(L_n \geq 0)} = K_h. \tag{15}$$

*Доказательство.* Убедимся сначала в справедливости равенства (14). Для фиксированного натурального числа  $m \in [1, n/2]$  имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[g(a_n)h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) \in [m, n - m]] \\ & \leq C_1 \mathbb{E}\left[\frac{e^{-\lambda_1 S_n}}{(1 + \sum_{k=1}^n e^{-S_k})^{\lambda_2}}; \tau(n) \in [m, n - m]\right] \\ & \leq C_1 \mathbb{E}[e^{\lambda_2 S_{\tau(n)} - \lambda_1 S_n}; \tau(n) \in [m, n - m]] \\ & = C_1 \sum_{j=m}^{n-m} \mathbb{E}[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)S_j + \lambda_1(S_j - S_n)}; \tau(n) = j] \\ & = C_1 \sum_{j=m}^{n-m} \mathbb{E}[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)S_j}; \tau(j) = j] \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_{n-j}}; L_{n-j} \geq 0] \\ & = C_1 \sum_{j=m}^{n-m} \mathbb{E}[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)S_j}; M_j < 0] \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_{n-j}}; L_{n-j} \geq 0]; \end{aligned}$$

здесь при последнем переходе мы использовали принцип двойственности для случайных блужданий. В силу леммы 3 существуют константы  $C_1$  и  $C_2$  такие, что при всех  $n$

$$\mathbb{E}[e^{(\lambda_2-\lambda_1)S_n}; M_n < 0] \leq \frac{C_1}{nc_n}, \quad \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_n}; L_n \geq 0] \leq \frac{C_2}{nc_n}.$$

Следовательно, существуют константы  $C, C_1$  и  $C_2$  такие, что при всех  $m \in [1, n/2]$

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n-m} \mathbb{E}[e^{(\lambda_2-\lambda_1)S_j}; M_j < 0] \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_{n-j}}; L_{n-j} \geq 0] &\leq C \sum_{j=m}^{n-m} \frac{1}{jc_j} \frac{1}{(n-j)c_{n-j}} \\ &\leq C_1 \frac{2}{nc_{n/2}} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{jc_j} \leq \frac{C_2}{nc_n}; \end{aligned}$$

здесь при выводе последнего неравенства мы использовали определение (2) и свойства правильно меняющихся функций. Отсюда следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется натуральное число  $m = m(\varepsilon)$  такое, что при всех достаточно больших значениях  $n$

$$\mathbb{E}[g(a_n)h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) \in [m, n - m]] \leq \frac{\varepsilon}{nc_n}. \tag{16}$$

Обозначим  $\mathcal{F}_{j+1,n}$   $\sigma$ -алгебру, порожденную случайными величинами  $X_{j+1}, \dots, X_n$ . Взяв условное математическое ожидание относительно  $\mathcal{F}_{j+1,n}$ , получим

$$\mathbb{E}[g(a_n)h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) = j] = \mathbb{E}[\Upsilon_{n-j}(S_j, B_{1,j}); \tau(j) = j], \tag{17}$$

где

$$\Upsilon_n(t, r) := \mathbb{E}[g(e^{-t}a_n)h(e^{-t}a_n, r + e^{-t}b_n); L_n \geq 0]. \tag{18}$$

Для фиксированного числа  $\delta \in (0, 1)$  запишем представление

$$b_n = 1 + W_n + e^{-S_n} \tilde{T}_n$$

и для фиксированных  $t \geq 0, r \geq 0$  введем функцию

$$\varphi_{t,r}(u, v, z) := g(e^{-t}e^{-z})h(e^{-t}e^{-z}, r + e^{-t}(1 + u) + e^{-t}e^{-z}v). \tag{19}$$

В силу наших условий

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_{t,r}(u, v, z)e^{\lambda_1 z} &\leq C^2 \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(1 + e^{-t}e^{-z} + r + e^{-t}(1 + u) + e^{-t}e^{-z}v)^{\lambda_2}} \\ &\leq C^2 e^{-\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{(u,v,z) \in \mathcal{W} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}_+} \varphi_{t,r}(u, v, z) e^{\lambda_1 z} \leq C^2 e^{-\lambda_1 t}. \tag{20}$$

Поскольку

$$\varphi_{t,r}(W_n, \tilde{T}_n, S_n) = g(e^{-t} e^{-S_n}) h(e^{-t} e^{-S_n}, r + e^{-t}(1 + W_n) + e^{-t} e^{-S_n} \tilde{T}_n),$$

мы можем, опираясь на соотношения (11), (12) и (20), применить лемму 4 и заключить, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n c_n \Upsilon_n(t, r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n c_n \mathbb{E}[\varphi_{t,r}(W_n, \tilde{T}_n, S_n); L_n \geq 0] \\ &= K \iiint \varphi_{t,r}(u, v, -z) \mathbb{P}^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}_z^-(T_\infty \in dv) V(z) dz \\ &=: K\Pi(t, r) > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (20) и (9) найдется константа  $C_1$  такая, что

$$n c_n \Upsilon_n(t, r) \leq C^2 e^{-\lambda_1 t} \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_n}; L_n \geq 0] \leq C_1 e^{-\lambda_1 t}$$

при всех  $n$ . Отсюда, используя теорему о мажорируемой сходимости, несложно вывести, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n c_n \mathbb{E}[g(a_n) h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) = j] \\ = K \mathbb{E}[\Pi(S_j, B_{1,j}); \tau(j) = j] =: K\Psi_j^+ > 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Зафиксируем теперь натуральное число  $j$  и, сделав замену  $j \leftrightarrow n - j$  и взяв условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{n-j,n}$ , перепишем (17) в виде

$$\mathbb{E}[g(a_n) h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) = n - j] = \mathbb{E}[\Upsilon_j(S_{n-j}, B_{1,n-j}); \tau(n - j) = n - j].$$

В силу (13)

$$\begin{aligned} \Upsilon_j(t, r) &= \mathbb{E}[g(e^{-t} a_j) h(e^{-t} a_j, r + e^{-t} b_j); L_j \geq 0] \\ &\leq C^2 \mathbb{E} \left[ \frac{e^{-\lambda_1 t} a_j^{\lambda_1}}{(1 + e^{-t} a_j + r + e^{-t} b_j)^{\lambda_2}}; L_j \geq 0 \right] \\ &\leq C^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_j}; L_j \geq 0] \leq C^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}. \end{aligned} \tag{22}$$

Как и прежде, зафиксируем  $\delta \in (0, 1)$  и введем обозначение

$$\Upsilon_j(S_n, B_{1,n}) = \Upsilon_j(S_n, W_n + e^{-S_n} \tilde{T}_n) =: \varphi(W_n, \tilde{T}_n, S_n).$$

Поскольку

$$\sup_{(w,v,z) \in \mathcal{W} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}_-} \varphi(w, v, z) e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)z} \leq C^2$$

виду (22), мы можем, вспоминая соотношения (11) и (12), применить лемму 5 и заключить, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n c_n \mathbb{E}[\Upsilon_j(S_n, W_n + e^{-S_n} \tilde{T}_n); \tau(n) = n] \\ &= K \iiint \Upsilon_j(-z, u + e^z v) \mathbb{P}_z^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}^-(T_\infty \in dv) U(z) dz \\ &:= K \Psi_j^- > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Объединив соотношения (16)–(23), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n c_n \mathbb{E}[g(a_n) h(a_n, B_{1,n})] = K \left( \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^+ + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^- \right) =: K_{g,h} > 0. \quad (24)$$

Оценка  $K_{g,h} < \infty$  следует из (16), неравенств

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \mathbb{E}[g(a_n) h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) = j] \\ & \leq C \sum_{j=0}^m \mathbb{E}[e^{(\lambda_2 - \lambda_1) S_j}; M_j < 0] \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_{n-j}}; L_{n-j} \geq 0], \\ & \sum_{j=0}^m \mathbb{E}[g(a_n) h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) = n - j] \\ & \leq C \sum_{j=0}^m \mathbb{E}[e^{(\lambda_2 - \lambda_1) S_{n-j}}; M_{n-j} < 0] \mathbb{E}[e^{-\lambda_1 S_j}; L_j \geq 0], \end{aligned}$$

справедливых при любом фиксированном  $m \in [1, n/2]$ , и леммы 3.

Соотношение (14) доказано.

Убедимся теперь в справедливости утверждения (15). Ясно, что для любого  $m \in [1, n - 1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) > m] & \leq C \mathbb{E} \left[ \frac{1}{(1 + a_n + b_n)^{\lambda_2}}; \tau(n) > m \right] \\ & \leq C \mathbb{E}[e^{\lambda_2 S_{\tau(n)}}; \tau(n) > m] = C \sum_{k=m}^n \mathbb{E}[e^{\lambda_2 S_{\tau(n)}}; \tau(n) = k] \\ & = C \sum_{k=m}^n \mathbb{E}[e^{\lambda_2 S_k}; \tau(k) = k] \mathbb{P}(L_{n-k} \geq 0). \end{aligned}$$

Вспоминая соотношения (8) и (10), заключаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $m = m(\varepsilon)$  такое, что

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=m}^{[n/2]} + \sum_{k=[n/2]}^n \right) \mathbb{E}[e^{\lambda_2 S_k}; \tau(k) = k] \mathbb{P}(L_{n-k} \geq 0) \\ & \leq \mathbb{P}(L_{n-[n/2]} \geq 0) \sum_{k=m}^{[n/2]} \frac{C_1}{kc_k} + \frac{C_1}{nc_n} \sum_{j=0}^{[n/2]} \mathbb{P}(L_j \geq 0) \\ & \leq \varepsilon \mathbb{P}(L_n \geq 0) + \frac{C_1}{nc_n} n \mathbb{P}(L_n \geq 0) \leq 2\varepsilon \mathbb{P}(L_n \geq 0). \end{aligned} \tag{25}$$

С другой стороны, для фиксированного  $j \in [0, m]$

$$\mathbb{E}[h(a_n, B_{1,n}); \tau(n) = j] = \mathbb{E}[\Theta_{n-j}(S_j, B_{1,j}); \tau(j) = j],$$

где

$$\Theta_n(t, r) := \mathbb{E}[h(e^{-t}a_n, r + e^{-t}b_n); L_n \geq 0].$$

Мы знаем, что при стремлении  $n$  к бесконечности  $S_n \rightarrow +\infty$  и  $b_n \rightarrow 1 + W_\infty$   $\mathbb{P}^+$ -п.н. Поскольку  $h(x, y)$  — непрерывная и равномерно ограниченная функция при  $x \geq 0, y \geq 0$ , то

$$h(e^{-t}a_n, r + e^{-t}b_n) \rightarrow h(0, r + e^{-t}W_\infty) \quad \mathbb{P}^+\text{-п.н.}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, мы можем воспользоваться леммой 2.5 работы [11] и заключить, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\Theta_n(t, r) \sim \mathbb{E}^+[h(0, r + e^{-t}W_\infty)] \mathbb{P}(L_n \geq 0).$$

Отсюда, вспоминая соотношения (8) и используя теорему о мажорируемой сходимости, выводим, что для любого фиксированного  $j$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[h(e^{-t}a_n, r + e^{-t}b_n); \tau(n) = j]}{\mathbb{P}(L_n \geq 0)} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{\Theta_{n-j}(S_j, B_{1,j})}{\mathbb{P}(L_{n-j} \geq 0)}; \tau(j) = j \right] \frac{\mathbb{P}(L_{n-j} \geq 0)}{\mathbb{P}(L_n \geq 0)} \\ & = (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+)[h(0, B_{1,j} + a_j W_\infty); \tau(j) = j], \end{aligned}$$

где мы использовали обозначение  $\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+$ , чтобы указать, что случайные величины  $B_{1,j}$  и  $a_j$  распределены в соответствии с мерой  $\mathbb{P}$ , в то время как случайная величина  $W_\infty$  распределена в соответствии с мерой  $\mathbb{P}^+$ . Поскольку параметр  $\varepsilon > 0$  в (25) может быть выбран произвольно малым, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[h(a_n, B_{1,n})]}{\mathbb{P}(L_n \geq 0)} & = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+)[h(0, B_{1,j} + a_j W_\infty); \tau(j) = j] \\ & =: K_h \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{26}$$

Лемма 6 доказана.

**4. Доказательства основных результатов.** Установим сначала справедливость пунктов 1) всех трех теорем. Согласно следствию 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n-N}(n)) &= \mathbf{E}[\mathcal{H}_{n-N,n}] = \mathbf{E}\left[\frac{a_{n-N}}{a_n + b_n - b_{n-N+1}} \cdot \frac{a_n}{a_n + b_n}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{e^{S_n - S_{n-N}}}{\sum_{k=n-N+1}^n e^{S_n - S_k}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^n e^{S_n - S_k}}\right]. \end{aligned}$$

Применяя подстановку

$$\widehat{S}_r := S_n - S_{n-r}, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

и используя равенство  $\{\widehat{S}_r, r = 0, 1, \dots, n\} \stackrel{d}{=} \{S_r, r = 0, 1, \dots, n\}$ , получаем

$$\mathbf{P}(A_{n-N}(n)) = \mathbf{E}\left[\frac{e^{\widehat{S}_N}}{\sum_{r=0}^{N-1} e^{\widehat{S}_r}} \cdot \frac{1}{\sum_{r=0}^n e^{\widehat{S}_r}}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{e^{S_N}}{\sum_{r=0}^{N-1} e^{S_r}} \cdot \frac{1}{\sum_{r=0}^n e^{S_r}}\right]. \quad (27)$$

Так как  $\mathbf{E}X < 0$ , то

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r} < \infty \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad (28)$$

Отсюда, обращаясь к теореме о мажорируемой сходимости, выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_{n-N}(n)) = \mathbf{E}\left[\frac{e^{S_N}}{\sum_{r=0}^{N-1} e^{S_r}} \cdot \frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r}}\right] =: r_N > 0.$$

**4.1. Доказательство пункта 2) теоремы 1 (строго докритический случай).** Для  $x, y \geq 0$  введем функции

$$\Lambda_i(x, y) := \mathbf{E}\left[\frac{1}{1 + y + x \sum_{r=0}^i e^{S_r}}\right], \quad h_i(x, y) := \frac{1}{1 + y} \Lambda_i(x, y). \quad (29)$$

Ясно, что при  $x, y \geq 0$

$$h_i(0, y) = \frac{1}{1 + y} \Lambda_i(0, y) = \frac{1}{(1 + y)^2} \quad \text{и} \quad h_i(x, y) \leq \frac{1}{1 + x + y}. \quad (30)$$

В силу (28)

$$h_{\infty}(x, y) := \lim_{i \rightarrow \infty} h_i(x, y) = \frac{1}{1 + y} \mathbf{E}\left[\frac{1}{1 + y + x \sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r}}\right] > 0. \quad (31)$$

Используя соотношение (27) и применяя к последовательности  $\{S_r, r = 0, 1, \dots, n - i\}$  стандартную замену мер (1) при  $\delta = 1$ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_i(n)) &= \gamma^{n-i} \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sum_{r=0}^{n-i-1} e^{S_r}} \Lambda_i\left(e^{S_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{S_r}\right)\right] \\ &= \gamma^{n-i} \mathbf{E}\left[h_i\left(e^{S_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{S_r}\right)\right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что после замены мер независимые приращения  $X_1, \dots, X_{n-i}$  случайного блуждания  $\mathbf{S}$  имеют закон распределения  $\mathbb{P}(dx) := e^x \mathbf{P}(dx)$ , в то время как независимые приращения  $X_{n-i+1}, \dots, X_n$  распределены согласно вероятностному закону  $\mathbf{P}(dx)$ . Так как

$$\mathbb{E}X = \frac{\mathbf{E}X e^X}{\mathbf{E}X} < 0,$$

то при  $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{r=1}^{N-1} e^{S_r} \rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} e^{S_r} < \infty \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

и  $e^{S_N} \rightarrow 0$   $\mathbb{P}$ -п.н. Эти оценки, соотношение (28) и теорема о мажорируемой сходимости дают

$$\begin{aligned} \lim_{n-i \rightarrow \infty} \gamma^{-(n-i)} \mathbf{P}(A_i(n)) &= \mathbb{E} \left[ \lim_{n-i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{r=0}^{n-i-1} e^{S_r}} \Lambda_i \left( e^{S_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{S_r} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r}} \Lambda_i \left( \lim_{n-i \rightarrow \infty} e^{S_{n-i}}, \lim_{n-i \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{S_r} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r}} \Lambda_i \left( 0, \sum_{r=1}^{\infty} e^{S_r} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\left( \sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r} \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Пункт 2) теоремы 1 доказан.

**4.2. Доказательство пункта 2) теоремы 2 (промежуточно докритический случай).**

4.2.1. *Случай фиксированного  $i$ .* Воспользуемся снова заменой мер (1) с  $\delta = 1$  и перепишем соотношение (32) в следующем виде:

$$\mathbf{P}(A_i(n)) = \gamma^{n-i} \mathbb{E} \left[ h_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right], \tag{33}$$

где  $\{\bar{S}_r, r = 0, 1, \dots, n-i\} = \{-S_r, r = 0, 1, \dots, n-i\}$ . Так как  $\bar{X} \stackrel{d}{=} -X$  относительно меры  $\mathbb{P}$ , то (см. (3))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{S}_r > 0) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n < 0) = 1 - \rho.$$

Из этого равенства, леммы 2 и соотношений (26) и (30) при  $\bar{L}_n := \min(\bar{S}_0, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_n)$  следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_i(n))}{\gamma^{n-i} \mathbb{P}(\bar{L}_n \geq 0)} &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+) [h_i(0, B_{1,j} + a_j W_\infty); \tau(j) = j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+) \left[ \frac{1}{(B_{1,j} + a_j W_\infty)^2}; \tau(j) = j \right] > 0. \end{aligned}$$

4.2.2. *Случай*  $\min(i, n - i) \rightarrow \infty$ . Запишем эквивалентную форму равенства (33)

$$\begin{aligned} \gamma^{n-i} \mathbf{P}(A_i(n)) &= \mathbb{E} \left[ h_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r}} \Lambda_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right]. \end{aligned} \tag{34}$$

Заметим теперь, что для любого  $1 \leq m < i$

$$\begin{aligned} 0 \leq \Lambda_m(x, y) - \Lambda_i(x, y) &= \mathbf{E} \left[ \frac{x \sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{1 + y + x \sum_{r=0}^m e^{S_r}} \cdot \frac{1}{1 + y + x \sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[ \frac{1}{1 + y + x \sum_{r=0}^m e^{S_r}} \cdot \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right] \leq \frac{1}{1 + x + y} \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Отсюда, используя (15) с  $h(x, y) = (1 + x + y)^{-1}$  и привлекая лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_m(i, n - i) &:= \mathbb{E} \left[ h_m \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right] - \mathbb{E} \left[ h_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{n-i-2} e^{-\bar{S}_r} + e^{-\bar{S}_{n-j-1}}} \right] \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ h \left( e^{-\bar{S}_{n-j-1}}, \sum_{r=1}^{n-i-2} e^{-\bar{S}_r} \right) \right] \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right] \\ &\leq C \mathbb{P}(\bar{L}_{n-i} \geq 0) \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Комбинируя эту оценку с (28), получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{\min(i, n-i) \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_m(i, n - i)}{\mathbb{P}(\bar{L}_{n-i} \geq 0)} \leq C \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^{\infty} e^{S_r}}{\sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r}} \right] = 0.$$

С другой стороны, согласно соотношениям (26) и (30)

$$\begin{aligned} &\lim_{n-i \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [h_m(e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r})]}{\mathbb{P}(\bar{L}_{n-i} \geq 0)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+) [h_m(0, B_{1,j} + a_j W_{\infty}); \tau(j) = j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+) \left[ \frac{1}{(B_{1,j} + a_j W_{\infty})^2}; \tau(j) = j \right] \end{aligned} \tag{37}$$

для любого фиксированного  $m$ . Так как  $m$  может быть выбрано сколь угодно большим, то соотношения (34)–(37) влекут равенство

$$\lim_{\min(i, n-i) \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_i(n))}{\gamma^{n-i} \mathbb{P}(\bar{L}_{n-i} \geq 0)} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^+) \left[ \frac{1}{(B_{1,j} + a_j W_\infty)^2}; \tau(j) = j \right].$$

Теорема 2 доказана.

**4.3. Доказательства пунктов 2) и 3) теоремы 3 (слабо докритический случай).**

4.3.1. *Случай фиксированного  $i$ .* Используя равенство (27) при  $N = n - i$  и применяя такую же замену мер, что и в соотношении (1) с  $\delta = \beta$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_i(n)) &= \mathbf{E} \left[ e^{S_{n-i}} h_i \left( e^{S_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{S_r} \right) \right] \\ &= \gamma^{n-i} \mathbb{E} \left[ e^{-(1-\beta)\bar{S}_{n-i}} h_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь утверждением (14) с  $g(x) = x^{1-\beta}$  и функцией  $h(x, y) = h_i(x, y)$  такой же, как и в (29), и вспоминая (24), заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - i) c_{n-i} \frac{\mathbf{P}(A_i(n))}{\gamma^{n-i}} = K \left( \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{ij}^+ + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{ij}^- \right).$$

Здесь слагаемые в правой части имеют вид

$$\Psi_{ij}^\pm := \mathbb{E}[\Pi_i(S_j, B_{1,j}); \tau(j) = j], \tag{38}$$

где

$$\Pi_i(t, r) := \iiint \varphi_{i,t,r}(u, v, -z) \mathbb{P}^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}_z^-(T_\infty \in dv) V(z) dz, \tag{39}$$

причем (сравните с соотношением (19))

$$\begin{aligned} \varphi_{i,t,r}(u, v, z) &:= e^{-(1+\beta)(t+z)} h_i(e^{-(t+z)}, r + e^{-t}(1+u) + e^{-(t+z)}v) \\ &= e^{-(1+\beta)(t+z)} \frac{1}{1+r+e^{-t}(1+u)+e^{-(t+z)}v} \\ &\quad \times \mathbf{E} \left[ \frac{1}{1+r+e^{-t}(1+u)+e^{-(t+z)}v+e^{-(t+z)}\sum_{r=0}^{i-1} e^{S_r}} \right], \end{aligned}$$

а

$$\Psi_{ij}^- := \iiint \Upsilon_{ij}(-z, u + e^z v) \mathbb{P}_z^+(W_\infty \in du) \mathbb{P}^-(T_\infty \in dv) U(z) dz, \tag{40}$$

где (см. (18))

$$\Upsilon_{ij}(t, r) := e^{-(1-\beta)t} \mathbb{E} \left[ e^{-(1-\beta)S_j} h_i \left( e^{-t} e^{-S_j}, r + e^{-t} \sum_{k=0}^{j-1} e^{-S_k} \right); L_j \geq 0 \right]. \tag{41}$$

Итак, пункт 2) теоремы 3 доказан для каждого фиксированного  $i$ .

**4.4. Случай**  $\min(i, n - i) \rightarrow \infty$ . Рассмотрим математическое ожидание

$$\mathbb{E} \left[ e^{-(1-\beta)\bar{S}_{n-i}} h_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right].$$

Из предыдущего пункта мы знаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n-i \rightarrow \infty} (n - i) c_{n-i} \mathbb{E} \left[ e^{-(1-\beta)\bar{S}_{n-i}} h_m \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right] \\ &= K \left( \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{mj}^+ + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{mj}^- \right) \end{aligned} \tag{42}$$

существует для каждого фиксированного  $m$ . Вспоминая (31), мы видим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{m,t,r}(u, v, z) = e^{-(1+\beta)(t+z)} h_{\infty} \left( e^{-(t+z)}, r + e^{-t}(1 + u) + e^{-(t+z)}v \right) > 0$$

и

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \Upsilon_{mj}(t, r) \\ &= e^{-(1-\beta)t} \mathbb{E} \left[ e^{-(1-\beta)S_j} h_{\infty} \left( e^{-t} e^{-S_j}, r + e^{-t} \sum_{k=0}^{j-1} e^{-S_k} \right); L_j \geq 0 \right] > 0. \end{aligned}$$

Объединяя (38)–(41), заключаем, что пределы

$$\Psi_{\infty j}^+ := \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_{mj}^+ \quad \text{и} \quad \Psi_{\infty j}^- := \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_{mj}^-$$

существуют для каждого  $j$  и являются конечными и положительными.

В силу (35) для  $1 \leq m < i$  имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq h_m(x, y) - h_i(x, y) &= \frac{1}{1 + y} (\Lambda_m(x, y) - \Lambda_i(x, y)) \\ &\leq \frac{1}{1 + x + y} \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma'_m(i, n-i) &:= \mathbb{E} \left[ e^{-(1-\beta)\bar{S}_{n-i}} \left\{ h_m \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - h_i \left( e^{-\bar{S}_{n-i}}, \sum_{r=1}^{n-i-1} e^{-\bar{S}_r} \right) \right\} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{e^{-(1-\beta)\bar{S}_{n-i}}}{\sum_{r=0}^{n-i-1} e^{S_r}} \right] \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right]. \end{aligned}$$

Используя теперь утверждение (14) с  $g(x) := x^{1-\beta}$  и  $h(x, y) := (1 + x + y)^{-1}$ , выводим, что найдется константа  $C_1$  такая, что

$$\Gamma'_m(i, n-i) \leq C_1(n-i)c_{n-i} \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^i e^{S_r}}{\sum_{r=0}^i e^{S_r}} \right].$$

Применяя теорему о мажорируемой сходимости, получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{\min(i, n-i) \rightarrow \infty} \frac{\Gamma'_m(i, n-i)}{(n-i)c_{n-i}} \leq C_1 \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \frac{\sum_{r=m+1}^{\infty} e^{S_r}}{\sum_{r=0}^{\infty} e^{S_r}} \right] = 0.$$

Так как  $m$  в соотношении (42) может быть выбрано сколь угодно большим, то

$$\lim_{\min(i, n-i) \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_i(n))}{(n-i)c_{n-i}\gamma^{n-i}} = K \left( \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{\infty j}^+ + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{\infty j}^- \right).$$

Теорема 3 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Smadi, V. A. Vatutin, *Critical branching processes in random environment with immigration: survival of a single family*, 2019, 21 pp., [arXiv:1911.00316](https://arxiv.org/abs/1911.00316).
2. Н. Kesten, М. V. Kozlov, F. Spitzer, “A limit law for random walk in a random environment”, *Compositio Math.*, **30:2** (1975), 145–168.
3. В. И. Афанасьев, “О времени достижения высокого уровня случайным блужданием в случайной среде”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **57:4** (2012), 625–648; англ. пер.: V. I. Afanasyev, “About time of reaching a high level by a random walk in a random environment”, *Theory Probab. Appl.*, **57:4** (2013), 547–567.
4. В. И. Афанасьев, “О времени достижения высокого уровня невозвратным случайным блужданием в случайной среде”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **61:2** (2016), 234–267; англ. пер.: V. I. Afanasyev, “On the time of reaching a high level by a transient random walk in a random environment”, *Theory Probab. Appl.*, **61:2** (2017), 178–207.

5. В. И. Афанасьев, “О невозвратном случайном блуждании в случайной среде”, *Дискрет. матем.*, **28**:4 (2016), 6–28; англ. пер.: V. I. Afanasyev, “On the non-recurrent random walk in a random environment”, *Discrete Math. Appl.*, **28**:3 (2018), 139–156.
6. В. И. Афанасьев, “Двуграничная задача для случайного блуждания в случайной среде”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **63**:3 (2018), 417–430; англ. пер.: V. I. Afanasyev, “Two-boundary problem for a random walk in a random environment”, *Theory Probab. Appl.*, **63**:3 (2019), 339–350.
7. E. Dyakonova, Doudou Li, V. Vatutin, Mei Zhang, “Branching processes in a random environment with immigration stopped at zero”, *J. Appl. Probab.*, **57**:1 (2020), 237–249; 2019, 13 pp., arXiv:1905.03535.
8. Doudou Li, V. Vatutin, Mei Zhang, “Subcritical branching processes in random environment with immigration stopped at zero”, *J. Theor. Probability*, 2020, 1–23, Publ. online; 2019, 22 pp., arXiv:1906.09590.
9. V. Vatutin, Xinghua Zheng, “Subcritical branching processes in a random environment without the Cramer condition”, *Stochastic Process. Appl.*, **122**:7 (2012), 2594–2609.
10. V. Bansaye, V. Vatutin, “On the survival probability for a class of subcritical branching processes in random environment”, *Bernoulli*, **23**:1 (2017), 58–88.
11. V. I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, V. A. Vatutin, “Criticality for branching processes in random environment”, *Ann. Probab.*, **33**:2 (2005), 645–673.
12. V. I. Afanasyev, C. Böinghoff, G. Kersting, V. A. Vatutin, “Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment”, *J. Theoret. Probab.*, **25**:3 (2012), 703–732.
13. G. Kersting, V. Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment*, Math. Stat. Ser., ISTE, London; John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2017, xiv+273 pp.
14. Y. Guivarc’h, Quansheng Liu, “Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **332**:4 (2001), 339–344.

Поступила в редакцию  
10.III.2020