

УДК 533.9.082.5

## ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУХФАЗНЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СРЕДАХ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРИБЛИЖЕНИИ КОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ РАССЕЯНИЯ. Ч. I.

© 1994 г. О. С. Ваулина, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров

НО ИВТ РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 09.12.93 г.

Подробно определены интегральные уравнения переноса монохроматического излучения (УПИ) для однородной среды с произвольной геометрией в случае анизотропного рассеяния. Получены общие выражения для оценки сходимости итерационного процесса в методе последовательных приближений и для оценки погрешности приближенного решения УПИ. Рассмотрены основные соотношения для решения УПИ в случае двухфазных высокотемпературных сред с плоскопараллельной и цилиндрической симметрией. Получены простые выражения для интенсивности выходящего из среды излучения в приближении однократного рассеяния. Приведены относительные ошибки приближенного решения УПИ для двухфазных высокотемпературных сред с различной симметрией (плоскопараллельная, цилиндрическая и сферическая).

Среди методов диагностики двухфазных высокотемпературных сред широкое распространение получили бесконтактные (оптические) методы, в частности методы пассивной диагностики [1 - 3]. Однако диагностика двухфазных сред по собственному излучению исследуемого объема сталкивается с определенными трудностями в интерпретации экспериментальных результатов, связанными с влиянием частиц конденсированной дисперсной фазы (КДФ) на регистрируемую интенсивность излучения. При этом возникает ряд проблем, таких как достоверность результатов измерений температуры газовой фазы обобщенным методом обращения [3], определение температуры как газовой, так и дисперсной фаз, определение излучательной способности слоя двухфазной среды и т.д. Кроме того, измерение температуры частиц и оптических характеристик слоя дисперсной среды является важной самостоятельной задачей пирометрии, которая представляет интерес для ряда прикладных областей науки и техники, таких как порошковая металлургия, плазменное напыление, диагностика низкотемпературной плазмы с КДФ и т.д.

В общем случае для решения этих задач необходим расчет переноса излучения в исследуемом объеме двухфазной высокотемпературной среды. В настоящее время для решения уравнения переноса излучения (УПИ) предложено большое число разнообразных способов и вычислительных алгоритмов, основанных на итерационных методах, построении различных разностных схем и приближенных решений [3 - 8]. При выборе алгоритма решения УПИ важную роль играет соотношение между объемом вычислительной рабо-

ты и достижимым качеством приближения. Точная оценка приближенного решения позволяет избежать лишней вычислительной работы и существенно снизить временные затраты на решение задачи.

В данной работе рассмотрен расчет переноса излучения в двухфазной среде методом последовательных приближений. Этот метод имеет вполне определенный физический смысл, так как величину искомой интенсивности (1) можно представить в виде ряда по степеням выживания кванта  $\omega$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n I^n. \quad (1)$$

Такое представление означает, что мы вводим в рассмотрение величины  $n$ -кратно рассеянного излучения:  $I^0$  – интенсивность излучения, распространяющегося в среде без учета многократного рассеяния,  $I^1$  – интенсивность однократно рассеянного излучения и т.д.

Интегральное представление УПИ для среды с произвольной геометрией. Для любой невогнутой области  $D$ , заполненной веществом и ограниченной поверхностью  $G$ , уравнение переноса излучения может быть записано в интегродифференциальной форме

$$\bar{\Omega} \nabla I + \sigma_{\text{ext}}(\bar{r}) I = Q(\bar{r}, \bar{\Omega}), \quad (2)$$

$$Q(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \frac{\sigma_s(\bar{r})}{4\pi} \int d\bar{\Omega}' I(\bar{r}, \bar{\Omega}') p(\bar{r}, \bar{\Omega}, \bar{\Omega}') + f(\bar{r}, \bar{\Omega}),$$

где  $Q(\bar{r}, \bar{\Omega})$  – функция источников;  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки среды в выбранной системе координат (СК);  $I(\bar{r}, \bar{\Omega})$  – функция излучения (интенсивность

монохроматического излучения);  $\sigma_{\text{ext}}$  и  $\sigma_s$  – коэффициенты ослабления и рассеяния среды;  $f(\bar{r}, \bar{\Omega})$  – функция источников собственного излучения среды;  $p(\bar{r}, \bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$  – индикатриса рассеяния.

Проведем преобразование интегродифференциального уравнения (2) в линейное интегральное уравнение второго рода. При этом будем считать, что на внешнюю границу  $G$  падает некоторый изотропный поток  $V(\bar{r})$

$$I(\bar{r}, \bar{\Omega}) = V(\bar{r}), \quad \bar{\Omega} \bar{n} < 0, \quad (3)$$

где  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $G$ ;  $V(\bar{r})$  – заданная функция точек поверхности  $G$ .

Рассмотрим случай однородной среды ( $\sigma_{\text{ext}}(\bar{r}) = \text{const}$ ;  $\sigma_s(\bar{r}) = \text{const}$ ;  $p(\bar{r}, \bar{\Omega}, \bar{\Omega}') = p(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$ ) и изотропных собственных источников ( $f(\bar{r}, \bar{\Omega}) = f(\bar{r})$ ). В случае неоднородной среды и неанізотропных источников алгоритм решения УПИ будет аналогичным [4]. Формальное решение УПИ для искомой интенсивности излучения  $I(\bar{r}, \bar{\Omega})$  приводит к линейному преобразованию, которое можно представить уравнением Фредгольма второго рода (рис. 1)

$$I(\bar{r} - \xi \bar{\Omega}) = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{\xi_G} d\xi' \int d\bar{\Omega}' K(\xi, \xi', \bar{\Omega}, \bar{\Omega}') \times \quad (4)$$

$$\times I(\bar{r} - \xi' \bar{\Omega}, \bar{\Omega}') + \Phi(\bar{r} - \xi \bar{\Omega}).$$

Здесь  $K(\xi, \xi', \bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$  – ядро интегрального уравнения (4)

$K(\xi, \xi', \bar{\Omega}, \bar{\Omega}') = e^{-\sigma_{\text{ext}}|\xi' - \xi|} H(\bar{\Omega} \bar{n}, (\xi' - \xi)) p(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$ , координата  $\xi$  отсчитывается от точки наблюдения  $P$  в направлении, противоположном вектору  $\bar{\Omega}$ , а  $H(\bar{\Omega} \bar{n}, (\xi' - \xi))$  – функция Хевисайда.

Свободный член в соотношении (4) представляется в виде

$$\Phi(\bar{r} - \xi \bar{\Omega}) = \int_0^{\xi_G} d\xi' K(\xi, \xi', \bar{\Omega}) f(\bar{r} - \xi' \bar{\Omega}) + V', \quad (5)$$

$$K(\xi, \xi', \bar{\Omega}) = e^{-\sigma_{\text{ext}}|\xi' - \xi|} H(\bar{\Omega} \bar{n}, (\xi' - \xi)),$$

$$V' = \begin{cases} V(\bar{r} - \xi_G \bar{\Omega}) e^{-\sigma_{\text{ext}}(\xi - \xi_G)}, & \bar{\Omega} \in \Omega_+, \\ V(\bar{r}) e^{-\sigma_{\text{ext}} \xi}, & \bar{\Omega} \in \Omega_-, \end{cases}$$

где  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  определяют положительные и отрицательные направления в выбранной системе координат (СК).

В некоторых случаях удобно иметь дело не с величиной интенсивности, а с интегральной со-

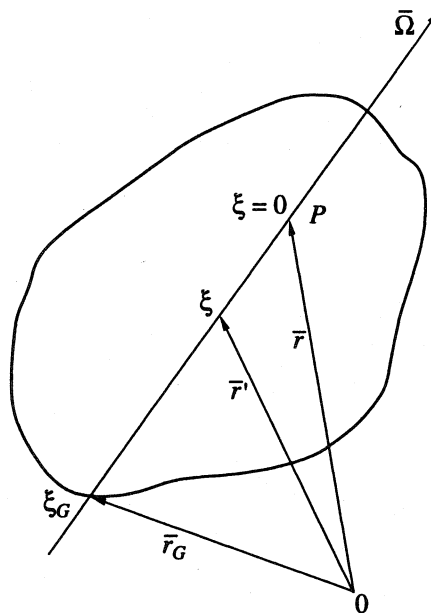


Рис. 1.  $P$  – точка наблюдения,  $\xi$  – координата по лучу  $\bar{\Omega}$ , отсчитываемая от точки  $P$ ,  $\xi_G$  – расстояние по лучу от точки  $P$  до поверхности  $G$ .

ставляющей функции источников  $I_0$ , которая в случае изотропного рассеяния имеет вид

$$I_0(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{\Omega} I(\bar{r}, \bar{\Omega}). \quad (6)$$

В этом случае решение УПИ для функции источников  $I_0$  можно записать в виде интегрального уравнения Пайерлса

$$I_0(\bar{r}) = \sigma_s \int_D d\bar{r}' I_0(\bar{r}') P(\bar{r}, \bar{r}') + F(\bar{r}), \quad (7)$$

$$F(\bar{r}) = \int_D d\bar{r}' f(\bar{r}') P(\bar{r}, \bar{r}') + \int_G d\bar{r}'_G V(\bar{r}'_G) \left| \frac{\bar{r} - \bar{r}'_G}{r - r'_G} \bar{n} \right| P(\bar{r}'_G, \bar{r}),$$

$$P(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sigma_{\text{ext}}|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2}.$$

Функция источников для неанізотропного рассеяния подробно рассмотрена Б. Девисоном [9].

Оценка сходимости метода последовательных приближений для решения УПИ. Уравнения (4) и (7) являются линейными интегральными уравнениями (уравнениями Фредгольма) второго рода, одним из распространенных методов решения которых является метод последовательных приближений (метод простых итераций).

Решение УПИ методом последовательных приближений будем искать, принимая за начальное приближение свободный член ( $\Phi(r - \xi\Omega)$  или  $F(r)$ ) интегрального уравнения. Для некоторого приближенного решения уравнения (4) получаем

$$I^{(k+1)} = \sigma_s K I^{(k)} + \Phi, \quad I^{(k+1)} = \sum_{n=0}^{k+1} \sigma_s^n K^n \Phi. \quad (8a)$$

Соответственно для приближенного решения уравнения (7)

$$I_0^{(k+1)} = \sigma_s P I_0^{(k)} + F, \quad I_0^{(k+1)} = \sum_{n=0}^{k+1} \sigma_s^n P^n F, \quad (8b)$$

где  $K, P$  – интегральные операторы, которые для (4) и (7) определяются ядрами  $K(\xi, \xi', \bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$  и  $P(\bar{r}, \bar{r}')$  соответственно.

Точное решение уравнения (4) для случая изотропного рассеяния также можно записать в виде ряда

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_s^n S P^n (f + S^{-1} V'), \quad f = f(\bar{r} - \xi\bar{\Omega}), \quad (9)$$

где  $f = f(\bar{r} - \xi\bar{\Omega})$  – функция источников собственного излучения среды;  $S$  – интегральный оператор с ядром  $K(\xi, \xi', \bar{\Omega})$

$$Sf = \int_0^{\xi_G} d\xi' K(\xi, \xi', \bar{\Omega}) f(\bar{r} - \xi'\bar{\Omega}).$$

Если ввести в рассмотрение новую переменную  $\tau = \sigma_{\text{ext}} \xi$  – оптическую плотность вдоль луча  $\bar{\Omega}$  (рис. 1), то рассмотренные решения для  $I$  и  $I_0$  можно представить в виде разложения по вероятностям выживания кванта  $\omega$  ( $\omega = \sigma_s / \sigma_{\text{ext}}$ ).

Оценим сходимость метода простых итераций для решения УПИ и абсолютные погрешности приближенного решения  $\epsilon^{(k)} = |I - I^{(k)}|$ ,  $\epsilon_0^{(k)} = |I_0 - I_0^{(k)}|$ . Рассмотрим уравнение (7) и учтем, что интегральное уравнение Пайерлса есть уравнение Фредгольма с полярным ядром, и то, что оператор Пайерлса является самосопряженным оператором. Тогда для нормы оператора  $P$  с ядром  $P(\bar{r}, \bar{r}')$  справедливы следующие оценки [10]:

$$\|Pf\| \leq N \|f\|, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|Pf\|_c &= \max_{\bar{r} \in D} \int_D |P(\bar{r}, \bar{r}') f(\bar{r}') d\bar{r}'| \leq \\ &\leq N \|f\|_c = N \max_{\bar{r} \in D} |f(\bar{r})|, \end{aligned}$$

$$N = \max_{\bar{r} \in D} \int_D P(\bar{r}, \bar{r}') d\bar{r}' \leq (1 - \exp(-\sigma_{\text{ext}} d)) / \sigma_{\text{ext}}, \quad (11)$$

где  $d$  – диаметр некоторой области  $D$ , ограниченной в  $R^3$ .

Таким образом, ряд (8б) регулярно сходится на области  $D$  к единственному решению для всех  $\sigma_s < 1/N$ . Следовательно, для всех  $q = \sigma_s N < 1$  справедливы следующие оценки для приближенного решения уравнения (7):

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(k)} &= |I_0 - I_0^{(k)}| \leq \frac{q^k}{(1-q)} |I_0^{(1)} - I_0^{(0)}|, \\ \epsilon_0^{(k)} &\leq \frac{q^{k+1} \|F\|_c}{(1-q)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения (4). Учитывая, что решение УПИ для интенсивности  $I$  может быть представлено рядом (9), нетрудно увидеть, что для сходимости этого ряда также справедлива оценка (12), так как

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n \Phi \leq \frac{\|f\|_c \int_0^{\xi_G} d\xi' K(\xi, \xi', \bar{\Omega}) + \|V'\|_c}{(1-q)}. \quad (13)$$

Пусть

$$M = \max_{\xi \in D} \int_0^{\xi_G} d\xi' K(\xi, \xi', \bar{\Omega}),$$

тогда для приближенного решения  $I^{(k)}$  имеем

$$\begin{aligned} \epsilon^{(k)} &= |I - I^{(k)}| \leq \frac{q^k}{(1-q)} |I^{(1)} - I^{(0)}| \leq \\ &\leq \frac{q^{k+1} (M \|f\|_c + \|V'\|_c)}{(1-q)}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае однородных собственных источников ( $f(\bar{r}) = \text{const}$ ) оценку (14) можно заменить следующей оценкой:

$$\frac{|I - I^{(k)}|}{I} \leq \frac{q^{k+1}}{(1-q)} \frac{I^{(0)}}{I^{(k)}} \leq \frac{q^{k+1}}{(1-q)}. \quad (15)$$

Параметр  $q$  для однородной среды с изотропным рассеянием имеет вид

$$q = \sigma_s N = \omega (1 - \exp(-T_d)). \quad (16)$$

Здесь  $T_d = \sigma_{\text{ext}} d$  – оптическая плотность.

Очевидно, что для неоднородной среды

$$q = \|\omega\|_c (1 - \exp(-\|\sigma_{\text{ext}}\|_c d)). \quad (17)$$

В случае анизотропного рассеяния численное значение параметра  $q$  зависит от модели индикатрисы, принятой при расчете. Для получения точных решений УПИ индикатриса может быть

представлена в виде бесконечного ряда сферических функций с коэффициентами разложения  $a_n$

$$p(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}'), \quad (18)$$

где  $P_n$  – полиномы Лежандра  $n$ -го порядка.

Для практических целей в большинстве случаев достаточно ограничиться  $P_2$ -приближением, полагая  $a_n = 0$  при  $n \geq 3$  [5, 6].

Существует множество моделей для реальных индикатрис рассеяния. Для ряда практических случаев возможно сведение анизотропного рассеяния к случаю изотропного рассеяния с использованием параметра анизотропии индикатрисы (“транспортное” приближение) [7].

В дальнейшем индикатрису рассеяния будем рассматривать в виде разложения по полиномам Лежандра (18). При этом общая оценка нормы интегрального оператора приводит к тому же выражению для параметра  $q$ , что и в случае изотропного рассеяния. Используя при оценке величину среднего косинуса рассеяния  $\langle \mu_0 \rangle$ , параметр  $q$  можно представить в виде

$$q = \omega \left( 1 - e^{-T_d} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(\langle \mu_0 \rangle) \right). \quad (19)$$

Несмотря на то, что данная оценка является достаточно грубой, она характеризует зависимость  $q$  от величины анизотропии рассеяния.

Из полученных оценок следует, что сходимость метода простых итераций ухудшается при  $q \rightarrow 1$  и, соответственно, растет вклад многократного рассеяния. Это означает, что при росте оптической плотности среды с уменьшением анизотропии среды и при вероятности выживания кванта  $\omega \rightarrow 1$  для нахождения решения с заданной точностью необходимо увеличивать количество итераций. Но получить простое аналитическое выражение, удобное для выполнения численных расчетов, трудно уже при третьей итерации. Необходимость вычислений интегралов высокой кратности приводит к высоким временным затратам, так как применение стандартных численных методов требует дополнительного контроля точности для того, чтобы избежать накопления больших вычислительных ошибок. Удачный выбор пробной функции для начальной итерации или линейной комбинации для приближенного решения на промежуточном итерационном шаге может привести к удовлетворительному результату уже при первой или второй итерации. Для оптически тонких сред с небольшой вероятностью однократного рассеяния хорошая скорость сходимости ряда (8а) позволяет получить удовлетворительное приближение для решения УПИ без специальных вычислительных алгоритмов и способов ускорения итерационного процесса.

**Решение УПИ для высокотемпературной двухфазной среды в случае простейших геометрий.** Не прибегая к подробным математическим выкладкам, приведем основные соотношения для решения УПИ в случае двух геометрий – плоской и цилиндрической, так как большинство реальных высокотемпературных потоков либо плоскопараллельные среды, либо среды с цилиндрической симметрией (камеры сгорания, дымовые трубы, горелки).

Пусть источники собственного излучения среды однородны ( $f(\bar{r}) = \text{const}$ ). Для двухфазной среды (в предположении термодинамического равновесия) функция собственных источников имеет вид [3, 8]

$$f = \alpha_v I^B(T_v) + \alpha_g I^B(T_g), \quad (20)$$

где  $\alpha_v, \alpha_g$  – коэффициенты поглощения излучения частицами дисперсной фазы и газа для элементарного объема среды;  $T_v$  и  $T_g$  – температуры частиц и газа;  $I^B(T)$  – излучение абсолютно черного тела (АЧТ). С учетом приближения Вина для излучения черного тела (погрешность  $\delta < 1\%$  при  $\lambda T < 0.3$  см К) запишем

$$\frac{f}{\sigma_{\text{ext}}} = I^B(T_g)(1 - \omega + \chi), \quad (21)$$

$$\chi = \frac{\alpha_v}{\sigma_{\text{ext}}} \left\{ \exp \left( -\frac{c_2}{\lambda} \left( \frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_g} \right) \right) - 1 \right\}.$$

Если среда неизотермична (источники неоднородны), состояние термодинамического равновесия (ТДР) нарушается. Но в предположении, что принцип ТДР выполняется для каждого элемента объема исследуемой среды, формулу (21) можно использовать и для случая неоднородных источников, рассматривая при этом температуру как функцию координаты точки среды.

Для граничного условия (3) рассматриваемой краевой задачи в предположении ТДР и диффузноотражающих стенок с коэффициентом поглощения  $\alpha_w$  и температурой  $T_w$  запишем

$$V(r) = \alpha_w I^B(T_w) + (1 - \alpha_w) \times \int d\bar{\Omega} I(\bar{r} - \xi_G \bar{\Omega}) |\bar{\Omega} \bar{n}| / \int d\bar{\Omega} |\bar{\Omega} \bar{n}|, \quad \bar{\Omega} \bar{n} < 0. \quad (22)$$

В случае неизлучающих границ точное решение УПИ для интенсивности монохроматического излучения, выходящего из двухфазной среды, может быть записано в следующем виде:

$$I_\lambda = I_\lambda^B(T_g)(1 - \omega_\lambda + \chi_\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \omega_\lambda^i \Lambda^{(i)}(\tau_\lambda), \quad (23)$$

где  $\Lambda^{(i)}(\tau_\lambda)$  – некоторый инвариант, значение которого определяется геометрией среды, индикатрисой рассеяния и направлением регистрации выходящего излучения.

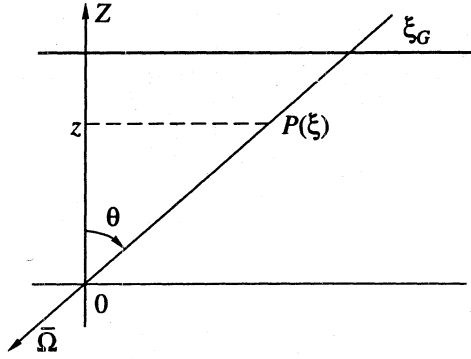


Рис. 2. Схема плоскопараллельного слоя среды.

**Решение УПИ для сред с плоскопараллельной геометрией.** Рассмотрим решение УПИ для области трехмерного пространства, представляющего собой плоскопараллельный слой толщиной  $H$  ( $0 \leq z \leq H$ ) (рис. 2) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} I(\tau_G, \mu) &= I_w, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \\ I(0, \mu) &= I_w, \quad -1 \leq \mu \leq 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mu = \cos\theta$ ;  $\tau = z\sigma_{\text{ext}}$ ;  $\tau_G = H\sigma_{\text{ext}}$ ;  $I_w = I_w^1 + I_w^2$ ;

$$\begin{aligned} I_w^1 &= \alpha_w I^B(T_w); \quad I_w^2 = 2(1 - \alpha_w) \int_0^1 d\mu I(\tau_G, \mu) \equiv \\ &\equiv 2(1 - \alpha_w) \int_0^1 d\mu I(0, \mu). \end{aligned}$$

Для интенсивности излучения в направлении  $\bar{\Omega}(I_+)$  и в направлении, противоположном  $\bar{\Omega}(I_-)$ , имеем

$$\begin{aligned} I_-(\tau, \mu) &= I_w \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) + \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}}\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\right) + \\ &+ \frac{\omega}{2\mu} \int_0^\tau d\tau' \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')}{\mu}\right) \int_0^1 d\mu' (I_- p(\mu, \mu') + \\ &+ I_+ p(\mu, -\mu')), \\ I_+(\tau, \mu) &= I_w \exp\left(-\frac{(\tau_G - \tau)}{\mu}\right) + \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}}\times \\ &\times \left(1 - \exp\left(-\frac{(\tau_G - \tau)}{\mu}\right)\right) + \frac{\omega}{2\mu} \int_\tau^{\tau_G} d\tau' \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(\tau' - \tau)}{\mu}\right) \int_0^1 d\mu' (I_- p(\mu, -\mu') + \\ &+ I_+ p(\mu, \mu')). \end{aligned} \quad (25)$$

В качестве начального приближения возьмем не весь свободный член интегрального уравнения, а лишь нерассеянную составляющую излучения

$$\begin{aligned} I_-^{(0)} &= I_w^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) + \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}}\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\right), \\ I_+^{(0)} &= I_w^1 \exp\left(-\frac{(\tau_G - \tau)}{\mu}\right) + \\ &+ \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}}\left(1 - \exp\left(-\frac{(\tau_G - \tau)}{\mu}\right)\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая, что индикатрису  $p(\mu, \mu')$  можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} p(\mu, \mu') &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) P_n(\mu') = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m(a_n, \mu) \mu^m, \end{aligned} \quad (27)$$

для однократно рассеянного излучения (первая итерация), выходящего из плоскопараллельной среды под углом  $\theta$ , можно получить

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)}(\tau = 0, \mu) &= \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}}\{\Lambda^{(0)} + \omega\Lambda^{(1)}\} + I_w \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\tau_G}{\mu}\right) + I_w^1 \omega(\Lambda^{(0)} - \Lambda^{(1)}), \\ \Lambda^{(0)} &= 1 - \exp\left(-\frac{\tau_G}{\mu}\right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \Lambda^{(0)} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i(\mu)}{2\mu} \left( \exp\left(-\frac{\tau_G}{\mu}\right) F_{i+2}(\tau_G, \mu) + \right. \\ &\left. + (-1)^i F_{i+2}(\tau_G, -\mu) \right), \end{aligned}$$

где  $F_i$  – функция Чандрасекара [3].

Запишем интегральное уравнение Пайерлса (7) [4] в виде

$$I_0(z) = \sigma_s \int_0^H dz' I_0(z, z') P(z, z') + F(z), \quad (29)$$

где  $P(z, z') = E_1(\sigma_{\text{ext}}|z - z'|)/2$ ;  $E_n$  – интегрально-показательная функция.

Для однородных собственных источников и граничных условий (24)

$$F(z) = f \int_0^H dz' P(z, z') + \quad (30)$$

$$+ I_w \{V(\sigma_{\text{ext}}z) + V(\sigma_{\text{ext}}|H - z|)\},$$

где  $V(y) = yE_2(y)/2$ .

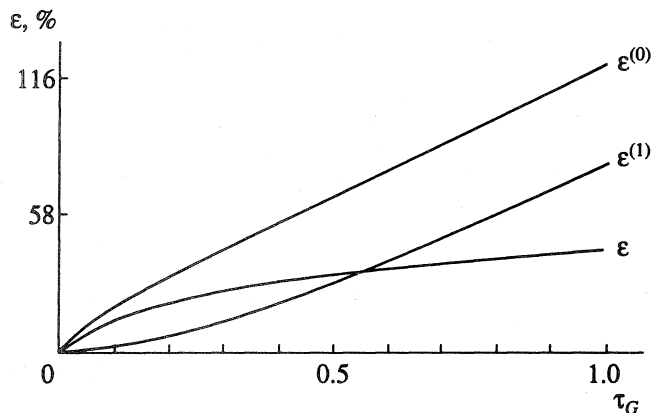


Рис. 3. Зависимость относительных ошибок  $\epsilon = (I^{(1)} - I^{(0)})/I^{(1)}$ ,  $\epsilon^{(1)}$ ,  $\epsilon^{(0)}$  для плоскопараллельного слоя от оптической плотности при  $\omega = 1$ .

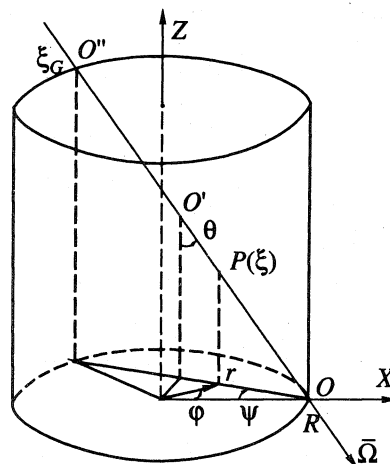


Рис. 4. Схематическое изображение среды с цилиндрической симметрией.

Оценим сходимость метода последовательных приближений. Для однородных собственных источников имеет место оценка (15). Воспользовавшись выражениями для  $I^{(0)}$  и  $I^{(1)}$ , в случае неизлучающих границ ( $I_w = 0$ ) получим

$$\epsilon^{(k)} = \frac{|I - I^{(k)}|}{I} \leq \frac{q^k}{(1-q)} \frac{\omega \Lambda^{(1)}}{\Lambda^{(0)} + \omega \Lambda^{(1)}} \leq \frac{q^{k+1}}{(1-q)} \frac{\Lambda^{(0)}}{\Lambda^{(0)} + \omega \Lambda^{(1)}}. \quad (31)$$

При изотропном рассеянии параметр  $q$  имеет вид

$$q = \omega(1 - \exp(-\tau_G)). \quad (32a)$$

Непосредственно оценивая интеграл в выражении (11), с учетом геометрии среды для ядра  $P(z, z')$ , можно получить еще одну оценку

$$q' = \omega(1 - E_2(\tau_G/2)). \quad (32b)$$

Для неизотропного рассеяния при использовании представления индикатрисы в виде ряда (27) находим

$$q'' = \omega \left( 1 - \sum_{m=0}^{\infty} b_m E_{m+2}(\tau_G/2) \right). \quad (33)$$

В случае однородных источников и изотропного рассеяния рис. 3 иллюстрирует зависимость от оптической плотности  $\tau$  следующих ошибок:

- 1)  $\epsilon = (I^{(1)} - I^{(0)})/I^{(1)}$ ;
- 2)  $\epsilon^{(0)}$  и  $\epsilon^{(1)}$  – оценки относительных ошибок (31) приближенного решения УПИ (4) при учете рассеяния 0- и 1-й кратности соответственно.

**Решение УПИ для сред с цилиндрической геометрией.** Рассмотрим бесконечный цилиндр радиусом  $R$ . Пусть  $Z$  – ось симметрии цилиндра,  $\theta$  – угол между направлением излучения  $\bar{\Omega}$  и вер-

тикалю,  $\psi$  – угол между проекцией  $\bar{\Omega}$  на плоскость  $XY$  и осью  $X$ ,  $\xi$  – координата точки среды  $P$  по лучу  $\bar{\Omega}$ ,  $r$  – расстояние от оси симметрии цилиндра до проекции точки  $P$  на плоскость  $XY$  (рис. 4). Граничные условия полагаем равными нулю, излучение от стенок цилиндра отсутствует

$$V(R) = 0. \quad (34)$$

Для интенсивности излучения в точке  $P \in [O'O]$  можно записать

$$I_+ = -\sigma_s \left( \int_r^{R \sin \psi} dr' F_+ b a_- - \int_{R \sin \psi}^r dr' F_+ b a_+ \right) + I_+^{(0)}, \quad (35)$$

$$I_- = -\sigma_s \int_R^r dr' F_- b a_- + I_-^{(0)},$$

$$F_{\pm} = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{\Omega}' I_p(\pm \bar{\Omega}, \bar{\Omega}'),$$

$$b = r' / \sin \theta \sqrt{r'^2 - R^2 \sin^2 \psi},$$

$$a_{\pm} = \exp(-\sigma_{\text{ext}} \{ (\sqrt{r'^2 - R^2 \sin^2 \psi} \pm \pm \sqrt{r'^2 - R^2 \sin^2 \psi}) / \sin \theta \}).$$

Для нерассеянной составляющей излучения имеем

$$I_{\pm}^{(0)} = \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}} (1 - \exp(-\sigma_{\text{ext}} (R \cos \psi \pm \pm \sqrt{r'^2 - R^2 \sin^2 \psi}) / \sin \theta)). \quad (36)$$

Используя разложение индикатрисы в ряд по полиномам Лежандра, запишем решение УПИ в приближении однократного рассеяния для излучения, выходящего из среды по нормали к поверхности цилиндра ( $\theta = \pi/2, \psi = 0$ )

$$I(0, \mu = 0, \gamma = 1) = \frac{f}{\sigma_{\text{ext}}} (\Lambda^{(0)} + \omega \Lambda^{(1)}), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(0)} &= 1 - \exp(-\tau_G/2), \\ \Lambda^{(1)} &= \frac{\tau_G}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 dx \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\gamma P_n(\mu, \gamma) \times \\ &\times \{ \exp(-\tau_G(1-x)/2) + (-1)^n \exp(-\tau_G \times \\ &\times (1+x)/2) \} \{ 2 - \exp(-a_+) - \\ &- (-1)^n \exp(-a_-) \} / \sqrt{1-\mu^2}, \\ a_{\pm} &= \exp(-\tau_G(\mu \pm \sqrt{x^2 - 1 + \mu^2}) / (2\sqrt{1-\gamma^2})), \\ \tau_G &= 2R\sigma_{\text{ext}}, \quad c = \sqrt{1-x^2}, \\ \mu &= \cos\theta, \quad \gamma = \cos\psi. \end{aligned}$$

В случае изотропного рассеяния выражение для  $\Lambda^{(1)}$  можно привести к виду, более удобному для выполнения численных расчетов

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \frac{\tau_G}{2\pi} \int_0^1 dx \{ \exp(-\tau_G(1-x)/2) + \\ &+ \exp(-\tau_G(1+x)/2) \} \{ 2\arccos(\sqrt{1-x^2}) - \\ &- \int_{1-x}^{1+x} dt \frac{(t^2 - 1 + x^2)}{t\sqrt{(t+x-1)(t+1-x)(t+x+1)(x+1-t)}} \times \\ &\times \int_0^1 d\gamma \exp(\tau_G t / (2\sqrt{1-\gamma^2})) \}. \end{aligned} \quad (38)$$

В выражении (38) можно воспользоваться при расчетах протабулированными функциями Бесселя, так как

$$\int_0^1 d\gamma \exp(A/\sqrt{1-\gamma^2}) = A(K_1(A) + \int_A^{\infty} K_0(a) da), \quad (39)$$

где  $K_n(x)$  – модифицированные функции Бесселя 2-го рода  $n$ -го порядка (функции Макдональда).

Запишем интегральное уравнение Пайерлса (7) для среды с цилиндрической геометрией в цилиндрических координатах  $r, z$  и  $\varphi$  [4]

$$I_0(r) = \sigma_s \int_0^R dr' I_0(r') P(r, r') + F(r), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} P(r, r') &= \frac{r'}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-\sigma_{\text{ext}} \sqrt{b}) / b, \\ b &= r^2 + r'^2 + z^2 + 2rr' \cos\varphi. \end{aligned}$$

При однородных собственных источниках и граничных условиях (34)

$$F(r) = \int_0^R dr' P(r, r').$$

Осуществляя замену переменных для ядра  $P(r, r')$ , можно прийти к следующему выражению:

$$\begin{aligned} P(r, r') &= \frac{2r'}{\pi} \int_{|r-r'|}^{r+r'} dx \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(x-r+r')(x+r-r')(r+r'+x)(r+r'-x)}} \times \\ &\times \int_{x\sigma_{\text{ext}}}^{\infty} dt K_0(t). \end{aligned} \quad (41)$$

Оценим сходимость метода последовательных приближений. Для однородных собственных источников при расчете погрешности приближения с учетом граничных условий (34) можно воспользоваться формулой (31). В случае изотропного рассеяния параметр  $q$  имеет вид (32а). Для цилиндрической геометрии в случае изотропного рассеяния для параметра  $q$  можно получить более точное значение

$$\begin{aligned} q' &= \omega \left( 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\gamma \times \right. \\ &\times \left. \{ \exp(-\tau_G \mu / \sqrt{1-\gamma^2}) \} / \sqrt{1-\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Для неизотропного рассеяния при использовании разложения индикатрисы по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} q'' &= \omega \left( 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \int_0^1 d\gamma \int_0^1 d\mu P_{2n} \times \right. \\ &\times \left. \{ \exp(-\tau_G \mu / \sqrt{1-\gamma^2}) \} / \sqrt{1-\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Зависимость от оптической плотности относительных ошибок  $\epsilon$ ,  $\epsilon^{(0)}$  и  $\epsilon^{(1)}$  показана на рис. 5. Скорости сходимости метода последовательных приближений в случае двух рассмотренных геометрий демонстрируют кривые на рис. 6а, 6б. Данные зависимости показывают, что скорость сходимости итерационного процесса для среды с цилиндрической симметрией выше. Это вполне

понятно с физической точки зрения, так как вероятность выхода излучения из такой среды при прочих равных условиях ( $\tau_G, \omega$ ) больше, чем для плоскопараллельной среды, следовательно, и вероятность многократного рассеяния будет ниже.

В случае ограниченного плоскопараллельного излучателя или ограниченного по оси  $Z$  цилиндра, которые нельзя описать достаточно качественно при помощи двух рассмотренных моделей среды, расчетные формулы можно получить, рассматривая конечные промежутки интегрирования в соответствующих уравнениях Фредгольма. А предварительная оценка того, насколько необходимым учет многократного рассеяния в ограниченном излучателе, может быть получена на основе оценки сходимости метода простых итераций для шара эквивалентного объема.

Уравнение Пайерлса для сферического излучателя с однородными собственными источниками, на внешние границы которого излучение не падает, можно записать в виде

$$I_0 = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-R}^R I_0(r') E_1(\sigma_{\text{ext}} |r - r'|) dr' + \int_{-R}^R E_1(\sigma_{\text{ext}} |r - r'|) dr. \quad (44)$$

Параметр  $q$  для оценки сходимости в случае изотропного рассеяния для сферического излучателя будет иметь вид:

$$q' = \omega(1 + 4E_3(\tau_G/2) + E_2(\tau_G/2) - 2/\tau_G) \equiv \omega(1 - 2(1 - \exp[-\tau_G/2])/\tau_G). \quad (45)$$

Для неізотропного рассеяния, воспользовавшись разложением индикатрисы по полиномам Лежандра, можно получить

$$q'' = \omega \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \int_0^1 d\mu P_{2n}(\mu) \exp(-\tau_G \mu/2) \right). \quad (46)$$

Так как большинство реальных высокотемпературных сред не являются бесконечно протяженными, приближение однократного рассеяния для небольших оптических плотностей ( $\tau \leq 2$ ) позволяет с достаточной точностью описывать перенос излучения и получать удобные алгоритмические соотношения для однозначного решения обратной задачи. Для иллюстрации приведем оценку ошибок за счет неучтенного многократного рассеяния (а) и за счет неучета кратностей рассеяния выше 1-й (б), воспользовавшись транспортным приближением для решения УПИ в случае трех рассмотренных геометрий (табл. 1). Предварительные оценки для ограниченного излучателя произвольной формы (например, камер сгорания) можно получить на основе оценок для

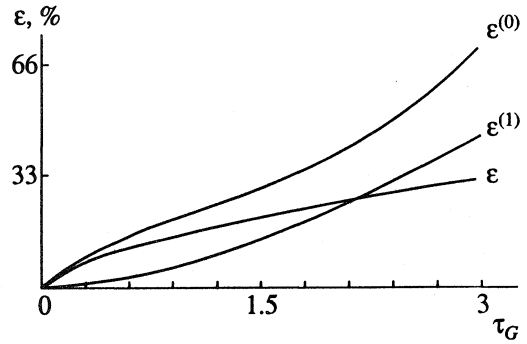


Рис. 5. Зависимость относительных ошибок  $\epsilon = (I^{(1)} - I^{(0)})/I^{(1)}$ ,  $\epsilon^{(1)}$ ,  $\epsilon^{(0)}$  для цилиндрического излучателя от оптической плотности при  $\omega = 1$ .

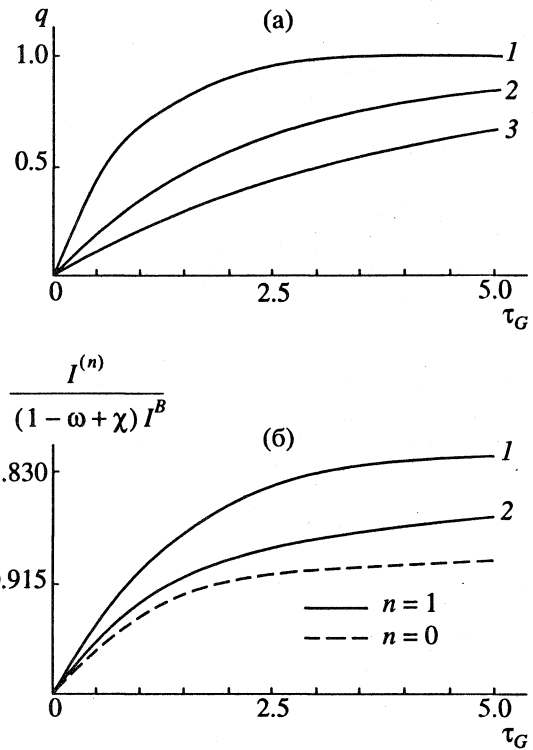


Рис. 6. Скорости сходимости итерационного процесса для  $\omega = 1$  в зависимости от оптической плотности  $\tau$ : а – параметра  $q$ ; б – относительной интенсивности излучения, выходящего из излучателя по нормали к поверхности среды при изотропном рассеянии: 1 – для плоскопараллельного слоя; 2 – для цилиндрического излучателя; 3 – для среды со сферической симметрией.

шара эквивалентного объема. Найдем оптическую плотность  $\tau_{\text{max}}$ , ниже которой неучтенное рассеяние не превышает 2 - 3% от  $I^{(k)}$  ( $k = 0, 1$ ). Если рассматривать продукты сгорания угля в видимом спектральном диапазоне, можно выбрать два максимальных значения  $g = \omega(I - \langle \mu_0 \rangle) - 0.5$  для зольных и 0.3 для угольных частиц при средних размерах 1 - 2 мкм ( $\langle \mu_0 \rangle$  – параметр анизотропии). Если рассматривать более крупные частицы, то

Таблица 1

$g = \omega(\nu - \langle \mu_0 \rangle)$	Кратность рассеяния $k$	$\tau_{\max}$		
		плоскопарал. симметрия	цилиндрич. симметрия	сферич. симметрия
0.5	$k = 0$	0.06	0.18	1
	$k = 1$	0.35	1.3	1.8
0.3	$k = 0$	0.1	0.3	1.2
	$k = 1$	0.6	2.8	4

приведенные величины  $\tau_{\max}$  будут заниженными. Если считать допустимой более высокую ошибку 5%, то для цилиндра с  $g = 0.5$  в случае приближения 0-й кратности  $\tau_{\max} = 0.4$ , в случае приближения 1-й кратности  $\tau_{\max} = 2$ .

Таким образом, в данной работе получены уточненные оценки погрешности приближенного решения уравнения переноса излучения, на основе которых исследована сходимость итерационного процесса в методе последовательных приближений. Приведены оценки сходимости метода простых итераций для сред с плоскопараллельной геометрией, а также с цилиндрической и сферической симметрией, которые:

– позволяют определять необходимую точность приближения и число итераций для решения задач переноса не только для метода последовательных приближений, но и для любого итера-

ционного метода решения уравнения переноса излучения;

– могут использоваться в качестве критерия для соблюдения условия однократности рассеяния.

Ошибки при интерпретации экспериментальных данных, возникающие за счет неточности приближенного решения УПИ, легко рассчитать с помощью приведенных оценок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sodha M.S., Guha S.* Physics of colloidal plasmas // *Advances in Plasma Physics*. 1971. V. 4. P. 219.
2. *Жуховицкий Д.И., Храпак А.Г., Якубов И.Т.* Ионизационное равновесие в плазме с конденсированной дисперсной фазой. Вып. 11. // *Химия плазмы*. М.: Энергоиздат, 1984. С. 130.
3. *Paul P.H.* Spectroradiometric temperature measurements in two-phase combustion plasmas // *Mech. Enging. Department Stanford Univ.*, 1984.
4. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1971.
5. *Кондратьев К.Я., Смоктий О.И., Козодеров В.В.* Влияние атмосферы на исследование природных ресурсов из космоса. М.: Машиностроение, 1985.
6. *Адзерихо К.С.* Лекции по теории переноса лучистой энергии. Минск: БГУ, 1971.
7. *Vasilieva I.A.* // *JQSRT*. 1984. V. 31. № 4. P. 323.
8. *Васильева И.А.* // *ТВТ*. 1990. Т. 28. № 6. С. 1181.
9. *Девисон Б.* Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.