A. V. Ivanov, On Gustafson integrals for the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2021, Volume 509, 113–122

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 509, 2021 г.

А. В. Иванов

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ГУСТАФСОНА ДЛЯ ГРУППЫ $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

§1. Введение

Интегралы Густафсона первого и второго типов играют важную роль в современной математической физике. Впервые они появились в работах [1–3] при изучении многомерных интегралов с параметрами, а также их деформированных q-аналогов. В качестве приложений стоит отметить теорию ортогональных полиномов [4], а также дуальность в суперсимметричной квантовой теории поля [5], где используются эллиптические аналоги упомянутых интегралов [6–8].

Одно из последних, достаточно плодотворных, направлений связано с исследованием интегрируемых моделей [9–11]. Так, при анализе спиновых цепочек для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ появилась необходимость в независимом выводе интегралов Густафсона первого и второго типов [12]. Вывод основан на обобщении формул суммирования из работы [2] на случай "комплексных" Гамма-функций.

Данная работа посвящена обобщению понятия интеграла Густафсона на случай Гамма-функций, возникающих при работе с группой $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, см. [13–15]. Как известно, формула Планшереля для указанной группы содержит как интегральную часть, так и суммирование по дискретным представлениям. Это приводит к тому, что плотность меры имеет набор полюсов в комплексной плоскости, и процесс вычисления интегралов путем замыкания контуров в полуплоскости перестает быть тривиальным. Именно поэтому доказательство основано не только на обычном использовании формул суммирования, но и на введении области интегрирования специального вида. Предполагается, что полученные результаты помогут при дальнейшем анализе интегралов Густафсона, а также в теории интегрируемых моделей.

Ключевые слова: интеграл Густафсона, многомерный интеграл, группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 19-11-00131). Автор является победителем конкурса "Молодая математика России" и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся все необходимые объекты, а затем формулируется и доказывается теорема для интеграла первого типа. В разделе 3 приводится теорема для интеграла второго типа. В заключении обсуждаются результаты и открытые вопросы.

§2. Интеграл первого типа

Введем переменные специального вида $\boldsymbol{u} = (u, \epsilon)$, которые состоят из комплексной составляющей $u \in \mathbb{C}$ и дискретной $\epsilon \in \{0, 1\}$. Мы будем выделять их курсивом. Далее определим базовые операции для таких объектов: пусть $\boldsymbol{u}_i = (u_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2$, и $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = (u_1 + u_2, \epsilon_1 + \epsilon_2 \,\mathbf{mod}\, 2), \\ &-\boldsymbol{u}_1 = (-u_1, \epsilon_1),\ k \cdot \boldsymbol{u}_1 = (ku_1, k\epsilon_1 \,\mathbf{mod}\, 2). \end{aligned}$$

Затем определим аналоги косинуса и синуса следующими равенствами

$$c(\boldsymbol{u}) = c(u, \epsilon) = \begin{cases} \cos(\pi u/2), & \epsilon = 0; \\ i \sin(\pi u/2), & \epsilon = 1, \end{cases}$$

$$s(\boldsymbol{u}) = s(u, \epsilon) = \begin{cases} \sin(\pi u/2), & \epsilon = 0; \\ -i \cos(\pi u/2), & \epsilon = 1. \end{cases}$$

Определение. *С учетом всего вышеизложенного Гамма-функцией для группы* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *мы будем называть* $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}) = 2^{1-u} c(\boldsymbol{u}) \Gamma(u)$, *где* $\Gamma(u)$ *– стандартная Гамма-функция.*

Отметим, что такие функции удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Gamma}(-\boldsymbol{u})} = \frac{u}{2\pi} \frac{s(-\boldsymbol{u})}{c(\boldsymbol{u})}. \tag{1}$$

Далее, введем в рассмотрение контур специального вида $\gamma(u)$, где $u \in \mathbb{C}$, который начинается в точке $-\infty + i\mathrm{Im}(u) - i0$, затем проходит вдоль $\mathbb{R} + i\mathrm{Im}(u) - i0$, огибает против часовой стрелки точку u и возвращается вдоль $\mathbb{R} + i\mathrm{Im}(u) + i0$ в точку $-\infty + i\mathrm{Im}(u) + i0$. Также отметим, что $i\mathbb{R}$ отделяет на комплексной плоскости две открытые области, левую $\mathbb{C}_l$ и правую $\mathbb{C}_r$.

Теорема 1. *Пусть натуральное* $N > 1$ *и* $\{z_i, w_i \in \mathbb{C}_r\}_{i=1}^N$ *– набор чисел, обладающих свойством* $\mathrm{Im}(w_i) \neq \mathrm{Im}(w_j)$ *для всех* $i \neq j$. *Пусть* *также* $\boldsymbol{z}_i = (z_i, \delta_i)$ *и* $\boldsymbol{w}_i = (w_i, \varepsilon_i)$, *где* $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$, *находятся в области аналитичности правой части* (2). *Определим далее множество* S_N *всех возможных перестановок* σ *набора чисел* $\{1, \ldots, N\}$. *Тогда с учетом всего вышеизложенного верно соотношение*

$$\frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma \in S_N} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \sum_{\epsilon_k = 0,1} \int_{\gamma_{\sigma(k)}} \frac{du_k}{4\pi i} \right) \frac{\prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N-1} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{w}_i)}{\prod_{i<j}^{N-1} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)}$$
$$= \prod_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{w}_j) \bigg/ \boldsymbol{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{w}_i) \right), \tag{2}$$

где $\gamma_i = \gamma(w_i)$ *для всех* i. *Для случая* $N = 2$ *произведение с условием* $i < j$ *равно единице. Переход к другим значениям параметров понимается в смысле аналитического продолжения.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$T_1(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N; \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N; u_1, \ldots, u_{N-1})$$
$$= \sum_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{N-1} = 0,1} \left(\prod_{i<j}^{N-1} \frac{s(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j)}{c(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)} \right) \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N-1} c(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{u}_j) c(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{w}_i) \tag{3}$$

и проанализируем ее свойства периодичности, а именно, сдвиг на единицу. Действительно, пусть переменная u_1 сдвинута на величину 1. Заметим, что используя свойства

$$c(\boldsymbol{u}_j \pm \boldsymbol{1}) = \pm i c(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{e}), \ \ s(\boldsymbol{u}_j \pm \boldsymbol{1}) = \pm i s(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{e}), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{1} = (1, 0)$ и $\boldsymbol{e} = (0, 1)$, не трудно убедиться в справедливости соотношений

$$c(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{1} - \boldsymbol{u}_j) c(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{1} + \boldsymbol{w}_i) = c(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{e}) c(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{e}),$$
$$\frac{s(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{1} - \boldsymbol{u}_j)}{c(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{u}_i)} = -\frac{s(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{e})}{c(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{e})}.$$

Следовательно, используя определение (3), мы получаем равенство

$$T_1(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N; \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N; u_1 + 1, u_2, \ldots, u_{N-1})$$
$$= (-1)^N T_1(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N; \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N; u_1, \ldots, u_{N-1}).$$

Аналогичным образом можно изучить сдвиги остальных переменных. Окончательный результат формулируется так: пусть $\{p_n \in \mathbb{Z}\}_{n=1}^{N-1}$, тогда

$$\begin{aligned} &T_1(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_N;\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_N;u_1+p_1,\ldots,u_{N-1}+p_{N-1}) \\ &= (-1)^{N\sum_{n=1}^{N-1}p_n} T_1(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_N;\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_N;u_1,\ldots,u_{N-1}). \qquad (5) \end{aligned}$$

Приступим к вычислению интеграла. Ясно, что условия теоремы обеспечивают работу с функцией (3) в области регулярности. Таким образом, мы должны отслеживать лишь сингулярности Гамма-функций, которые имеют вид $-w_i - p_i$, где $p_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В этом случае левая часть формулы (2) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &C \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{p_1,\ldots,p_{N-1}=0}^{+\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{p_k}}{p_k!} \prod_{i\neq\sigma(k)}^{N} \Gamma(w_i - w_{\sigma(k)} - p_k) \\ &T_1(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_N;\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_N;-w_{\sigma(1)}-p_1,\ldots,-w_{\sigma(N-1)}-p_{N-1}) \\ &\left(\prod_{i<k}^{N-1}(w_{\sigma(i)}+p_i-w_{\sigma(k)}-p_k)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{N-1}\Gamma(z_i+w_{\sigma(k)}+p_k)\right), \end{aligned}$$

где $C = 2^{\frac{3}{2}N^2-\frac{3}{2}N-(N-1)\sum\limits_{i=1}^{N}(z_i+w_i)} \pi^{-\frac{(N-2)(N-1)}{2}} [(N-1)!]^{-1}$.

Тогда, учитывая свойство периодичности (5), последняя формула после преобразований Гамма-функций принимает вид

$$\begin{aligned} &C \sum_{\sigma \in S_N} T_1(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_N;\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_N;-w_{\sigma(1)},\ldots,-w_{\sigma(N-1)}) \\ &\left(\prod_{k=1}^{N-1}\prod_{i=1}^{N}\Gamma(z_i+w_{\sigma(k)})\right)\left(\prod_{k=1}^{N-1}\prod_{i\neq\sigma(k)}\Gamma(w_i-w_{\sigma(k)})\right) \\ &\sum_{p_1,\ldots,p_{N-1}=0}^{+\infty}\left(\prod_{i<k}^{N-1}(w_{\sigma(i)}+p_i-w_{\sigma(k)}-p_k)\right)\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{N-1}\frac{(z_i+w_{\sigma(k)})_{p_k}}{(1-w_i+w_{\sigma(k)})_{p_k}}. \end{aligned}$$

Мы специально выделили внутреннее суммирование в последней строке, поскольку оно может быть вычислено при помощи формулы из работ [2, 16]

$$\sum_{p_1,\ldots,p_{N-1}=0}^{+\infty}\left(\prod_{i<k}^{N-1}(w_{\sigma(i)}+p_i-w_{\sigma(k)}-p_k)\right)\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{N-1}\frac{(z_i+w_{\sigma(k)})_{p_k}}{(1-w_i+w_{\sigma(k)})_{p_k}}$$

$$=\Gamma\left(1-\sum_{i=1}^{N}(z_i+w_i)\right)\frac{\prod_{k=1}^{N-1}\Gamma(1+w_{\sigma(k)}-w_{\sigma(N)})}{\prod_{k=1}^{N}\Gamma(1-z_k-w_{\sigma(N)})}\left(\prod_{i<j}^{N-1}(w_{\sigma(i)}-w_{\sigma(j)})\right).$$

Далее мы трансформируем часть функций путем применения соотношений

$$\Gamma(u+1)=u\Gamma(u),\ \Gamma(1-u)\Gamma(u)\sin(\pi u)=\pi,\ \sin(\pi u)=2s(\boldsymbol{u})c(\boldsymbol{u}),\tag{6}$$

и после некоторых сокращений получим

$$\frac{\Gamma(1-\sum_{i=1}^{N}(z_i+w_i))}{\pi 2^{-\sum_{i=1}^{N}(z_i+w_i)}(N-1)!}\left(\prod_{i,j=1}^{N}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}_i+\boldsymbol{w}_j)\right)\sum_{\sigma\in S_N}\frac{\prod_{k=1}^{N}s(\boldsymbol{z}_k+\boldsymbol{w}_{\sigma(N)})}{\prod_{k=1}^{N-1}s(\boldsymbol{w}_{\sigma(N)}-\boldsymbol{w}_{\sigma(k)})}.\tag{7}$$

Остается просуммировать последний фактор. Для этого мы воспользуемся формулой для обычных тригонометрических функций из [2], Лемма 5.10. Вспоминая, что δ_k и ε_j – дискретные параметры для переменных $\boldsymbol{z}_k$ и $\boldsymbol{w}_j$ соответственно, мы можем выписать следующую цепочку соотношений

$$\sum_{\sigma\in S_N}\frac{\prod_{k=1}^{N}s(\boldsymbol{z}_k+\boldsymbol{w}_{\sigma(N)})}{\prod_{k=1}^{N-1}s(\boldsymbol{w}_{\sigma(N)}-\boldsymbol{w}_{\sigma(k)})}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_N}\frac{\prod_{k=1}^{N}(-i)^{\varepsilon_{\sigma(N)}-\delta_k}\sin\left(\pi\left(\frac{z_k-\delta_k}{2}+\frac{w_{\sigma(N)}+\varepsilon_{\sigma(N)}}{2}\right)\right)}{\prod_{k=1}^{N-1}(-i)^{\varepsilon_{\sigma(N)}-\varepsilon_{\sigma(k)}}\sin\left(\pi\left(\frac{w_{\sigma(N)}+\varepsilon_{\sigma(N)}}{2}-\frac{w_{\sigma(k)}+\varepsilon_{\sigma(k)}}{2}\right)\right)}$$

$$=(N-1)!(-i)^{\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon_k-\delta_k)}\sin\left(\pi\sum_{k=1}^{N}\frac{z_k-\delta_k+w_k+\varepsilon_k}{2}\right)$$

$$=(N-1)!\,s\left(\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{z}_k+\boldsymbol{w}_k)\right),$$

из которой следует правая часть равенства (2), что и доказывает теорему. □

§3. Интеграл второго типа

Теорема 2. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$ *и* $\{z_i \in \mathbb{C}_r\}_{i=1}^{2N+2}$ *– набор чисел со свойством* $\mathrm{Im}(z_i) \neq \mathrm{Im}(z_j) \neq 0$ *для всех* $i \neq j$. *Пусть также* $\boldsymbol{z}_i = (z_i, \delta_i)$, *где* $\delta_i \in \{0,1\}$, *находятся в области аналитичности правой части* (8). *Определим далее множество* S *всех возможных инъективных отображений* σ *из* $\{1,\ldots,N\}$ *в* $\{1,\ldots,2N+2\}$. *Тогда с учетом всего вышеизложенного верно соотношение*

$$\frac{1}{2^N N!}\sum_{\sigma\in S}\left(\prod_{k=1}^{N}\sum_{\epsilon_k=0,1}\int\limits_{\gamma_{\sigma(k)}}\frac{du_k}{4\pi i}\right)\frac{\prod\limits_{i=1}^{N}\prod\limits_{j=1}^{2N+2}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}_j \pm \boldsymbol{u}_i)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{\Gamma}(\pm 2\boldsymbol{u}_k)\prod\limits_{i<j}^{N}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_i \pm \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{\Gamma}(-\boldsymbol{u}_i \pm \boldsymbol{u}_j)}$$
$$= \prod_{i<j}^{2N+2}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}_i+\boldsymbol{z}_j)\Big/\boldsymbol{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{2N+2}\boldsymbol{z}_i\right), \tag{8}$$

где $\gamma_i = \gamma(z_i)$ *для всех* i, *и знак* $\pm$ *означает, что оба множителя присутствуют. Для случая* $N = 1$ *произведение с условием* $i < j$ *в знаменателе левой части соотношения равно единице. Переход к другим значениям параметров понимается в смысле аналитического продолжения.*

Доказательство. Мы повторим основные шаги из предыдущего раздела, обращая внимание лишь на существенные изменения. Давайте определим функцию

$$T_2(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_{2N+2};u_1,\ldots,u_N) = \sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N=0,1}$$
$$\times\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{s(-2\boldsymbol{u}_k)}{c(2\boldsymbol{u}_k)}\right)\left(\prod_{i<j}^{N}\frac{s(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i)s(-\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i)}{c(\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{u}_j)c(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j)}\right)\prod_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{2N+2}c(\boldsymbol{z}_j \pm \boldsymbol{u}_k). \tag{9}$$

Используя соотношения (4), легко увидеть, что функция обладает свойством периодичности, которое можно сформулировать так: сдвиг аргумента $u_j \to u_j + 1$ для произвольного $j \in \{1,\ldots,N\}$ не изменяет функцию T_2.

Далее, мы переходим к подсчету вычетов. Из-за свойств точек $\{z_i\}_{i=1}^{2N+2}$ функция T_2 не содержит полюсов, поэтому мы должны отслеживать лишь полюса для Гамма-функций вида $-z_i - p_i$, где $p_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Тогда, используя периодичность функции T_2, мы получаем выражение

$$C\sum_{\sigma\in S} T_2(\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_{2N+2};-z_{\sigma(1)},\dots,-z_{\sigma(N)})$$
$$\sum_{p_1,\dots,p_N=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{N}(-z_{\sigma(k)}-p_k)\right)\left(\prod_{i<j}^{N}\left[(z_{\sigma(i)}+p_i)^2-(z_{\sigma(j)}+p_j)^2\right]\right)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{2N+2}\Gamma(z_j+z_{\sigma(i)}+p_i)\right)\prod_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{p_k}}{p_k!}\prod_{n\neq\sigma(k)}^{2N+2}\Gamma(z_n-z_{\sigma(k)}-p_k),$$

где $C=2^{3N^2+3N-2N\sum z_n}\pi^{-N^2}(N!)^{-1}$. Внутренняя сумма может быть вычислена при помощи формулы суммирования из работы [2]

$$\sum_{p_1,\dots,p_N=-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{z_{\sigma(k)}+p_k}{z_{\sigma(k)}}\right.$$
$$\left.\prod_{k<j}^{N}\frac{(z_{\sigma(k)}+p_k)^2-(z_{\sigma(j)}+p_j)^2}{z^2_{\sigma(k)}-z^2_{\sigma(j)}}\prod_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{2N+2}\frac{\Gamma(z_j\pm(z_{\sigma(k)}+p_k))}{\Gamma(z_j\pm z_{\sigma(k)})}\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(1-\sum_{n=1}^{2N+2}z_n\right)\prod_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{2N+2}\Gamma(1-z_j\pm z_{\sigma(k)})}{\left(\prod_{k=1}^{N}\Gamma(1\pm 2z_{\sigma(k)})\right)\prod_{\substack{1\leqslant k<j\leqslant N\\ \delta,\epsilon=\pm}}\Gamma(1+\delta z_{\sigma(k)}+\epsilon z_{\sigma(j)})\prod_{k<j}^{2N+2}\Gamma(1-z_k-z_j)}.$$

Заметим, что если $p_j<0$ для некоторого $j\in\{1,\dots,N\}$, тогда соответствующее слагаемое не дает вклада в сумму. Следовательно, мы можем убрать множество $\{\dots,-2,-1\}$ из области суммирования. Затем, применяя свойство (6) и производя некоторые сокращения, мы получаем следующий результат

$$\frac{2^{-N+\sum_{n=1}^{2N+2}z_n}}{\pi N!}\Gamma\left(1-\sum_{n=1}^{2N+2}z_n\right)\prod_{i<j}^{2N+2}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}_i+\boldsymbol{z}_j)$$
$$\left(\prod_{i<j}^{2N+2}s(\boldsymbol{z}_i+\boldsymbol{z}_j)\right)\sum_{\sigma\in S}\frac{\prod_{k=1}^{N}s(2\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})s(-2\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})\prod_{\delta,\epsilon=\pm}\prod_{i<j}^{N}s(\delta\boldsymbol{z}_{\sigma(i)}+\epsilon\boldsymbol{z}_{\sigma(j)})}{\prod_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{2N+2}s(\boldsymbol{z}_j+\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})\prod_{k=1}^{N}\prod_{j\neq\sigma(k)}^{2N+2}s(\boldsymbol{z}_j-\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})}.\tag{10}$$

Далее необходимо адаптировать теорему суммирования синусов на рассматриваемый случай. Она имеет вид

$$\prod_{i<j}^{2N+2} s(\boldsymbol{z}_i+\boldsymbol{z}_j)\sum_{\sigma\in S}\frac{\prod\limits_{k=1}^{N} s(2\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})s(-2\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})\prod\limits_{\delta,\epsilon=\pm}\prod\limits_{k<j}^{N} s(\delta\boldsymbol{z}_{\sigma(k)}+\epsilon\boldsymbol{z}_{\sigma(j)})}{\prod\limits_{k=1}^{N}\prod\limits_{j=1}^{2N+2} s(\boldsymbol{z}_j+\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})\prod\limits_{k=1}^{N}\prod\limits_{j\neq\sigma(k)}^{2N+2} s(\boldsymbol{z}_j-\boldsymbol{z}_{\sigma(k)})}$$
$$= N!2^N s\left(\sum_{i=1}^{2N+2}\boldsymbol{z}_i\right),$$

где при выводе были использованы определения s-функций и предельный случай формулы суммирования (7.11) из работы [2]. После подстановки последнего соотношения в формулу (10) и следует утверждение теоремы 2. □

§4. Заключение

В работе удалось обобщить понятия интегралов Густафсона первого и второго типов на случай группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ путем специального выбора области интегрирования. Основная проблема состояла в том, что плотность меры содержит серию полюсов в комплексной плоскости, в отличие от случая группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, где плотность является полиномиальной функцией. Из-за этого при подсчете появляются “лишние” вклады. Мы убрали эти слагаемые путем введения специальных контуров.

В качестве примера актуальной задачи можно привести вопрос о возможности перехода в области интегрирования от используемых контуров к прямой $i\mathbb{R}$. На примере формулы (2) это выглядит так

$$\sum_{\sigma\in S_N}\left(\prod_{k=1}^{N-1}\sum_{\epsilon_k=0,1}\int\limits_{\gamma_{\sigma(k)}}\frac{du_k}{4\pi i}\right)\to\left(\prod_{k=1}^{N-1}\sum_{\epsilon_k=0,1}\int\limits_{i\mathbb{R}}\frac{du_k}{4\pi i}\right), \tag{11}$$

где $N>2$, так как при $N=2$ тригонометрическая часть подынтегрального выражения (3) не содержит полюсов, что дает возможность перейти к интегрированию по мнимой оси.

При этом в переходе (11) не вполне ясно, нужно ли вводить дополнительные контуры, которые могли бы учитывать наличие дискретного спектра. Такая точка зрения следует из работы о полноте [15], из которой видно, что точки дискретного спектра совпадают с полюсами плотности меры для непрерывного спектра. В любом случае, дальнейшее изучение дополнительных контуров является важной задачей, поскольку она связана с исследованием свойств собственных функций для интегрируемых моделей.

В качестве другого открытого вопроса можно привести вывод детерминантного представления для интеграла Густафсона. Основной загвоздкой является наличие тригонометрических функций в знаменателях (3) и (9). Это обстоятельство мешает факторизовать функции.

Список литературы

1. R. A. Gustafson, *Some q-beta and Mellin–Barnes integrals with many parameters associated to the classical groups.* — SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 525–551.
2. R. A. Gustafson, *Some q-beta and Mellin–Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras.* — Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 69–119.
3. R. A. Gustafson, *Some q-beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey–Wilson and Nasrallah–Rahman integrals.* — SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 441–449.
4. J. V. Stokman, *On BC type basic hypergeometric orthogonal polynomials.* — Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1527–1579.
5. V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, *Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities.* — Comm. Math. Phys. **304** (2011), 797–874.
6. V. P. Spiridonov, *Theta hypergeometric integrals.* — St. Petersburg Math. J. **15** (2003), 929–967.
7. V. P. Spiridonov, S. O. Warnaar, *Inversions of integral operators and elliptic beta integrals on root systems.* — Adv. Math. **207** (2006), 91–132.
8. V. P. Spiridonov, *Short proofs of the elliptic beta integrals.* — Ramanujan J. **13** (2007), 265–283.
9. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Spin Chains and Gustafson's Integrals.* — J. Phys. A, Math. Theor. **50** (2017), 294006.
10. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, P. A. Valinevich, *Gustafson integrals for $SL(2,\mathbb{C})$ spin magnet.* — J. Phys. A, Math. Theor. **50** (2017), 294007.
11. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, P. A. Valinevich, *$SL(2,\mathbb{C})$ Gustafson Integrals.* — SIGMA **14** (2018), 030.
12. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *On Complex Gamma-Function Integrals.* — SIGMA **16** (2020), 003.
13. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions. Vol. 5, Integral geometry and representation theory.* — Academic Press, New York, London, 1–499 (1966).
14. M. Kirch, A. N. Manashov, *Noncompact $SL(2,\mathbb{R})$ spin chain.* — JHEP (2004), 0406, 035.
15. A. V. Ivanov, *On the completeness of projectors for tensor product decomposition of continuous series representations groups $SL(2,\mathbb{R})$.* — J. Math. Sci. (N. Y.), **242**, No. 5 (2019), 692–700.

16. S. C. Milne, *A q-analog of the Gauss summation theorem for hypergeometric series in $U(n)$*. — Adv. Math. **72** (1988), 59–131.

Ivanov A. B. On Gustafson integrals for the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

In this paper, we calculate the Gustafson integrals of the first and second types for the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in the case of an integration domain of a special form. The definitions of the analogs of the sine, cosine and Gamma functions are given, and their main properties are formulated. The conclusion lists open questions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27,
С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 21 октября 2021 г.