УДК 519.41/47

О централизаторах инволюций в простых группах

В. Д. Мазуров (Новосибирск)

К. Харада [11] показал, что силовская 2-подгруппа S конечной простой группы G абелева, если централизатор некоторой инволюции t из центра S изоморфен $\langle t\rangle\times PSL(2,q)$. В этой работе мы покажем, что требование центральности для инволюции t излишне.

Пусть $O(H)$ — наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка из группы H, а $O^{2'}(H)$ — наименьшая нормальная подгруппа нечетного индекса в H. Обозначим через $L(H)$ группу $O^{2'}(H/O(H))$.

Теорема. *Пусть G — конечная простая группа, t — инволюция из G и $C(t)$ — централизатор t в G. Если $L(C(t))\simeq\langle t\rangle\times PSL(2,q)$, где $q>3$, то силовская 2-подгруппа из G — элементарная группа порядка* 8.

Результат Д. Уолтера [14] показывает, что в этом случае G изоморфна группе Янко с абелевой силовской 2-подгруппой или группе типа Ри.

Доказательство теоремы состоит из двух почти независимых частей. В первой части рассматривается тот случай, когда в $C(t)$ силовская 2-подгруппа абелева, и доказывается, что она является силовской 2-подгруппой в G. Вторая часть посвящена доказательству несуществования группы, в которой $C(t)$ удовлетворяет условию теоремы и имеет неабелеву силовскую 2-подгруппу.

1. Силовская 2-подгруппа из $C(t)$ элементарна

В этой части мы докажем следующее

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа, в которой $Z(G)=O(G)=1$ и $O^2(G)=G$; t — инволюция из G и $C(t)$ — централизатор t в G. Пусть в $\bar C=C(t)/O(C(t))$ содержится подгруппа $\bar L$ нечетного индекса, обладающая следующими свойствами*:

1) $\bar L\simeq\langle\bar t\rangle\times\bar L_1$,

2) *силовская 2-подгруппа $\bar V_1$ из $\bar L_1$ нециклическая и нормальная в $\bar L_1$,*

3) *в $\bar L_1$ имеется циклическая подгруппа порядка $|\bar V_1|-1$, действующая при сопряжении транзитивно на множестве неединичных элементов из $\bar V_1$.*

Тогда силовская 2-подгруппа из G элементарна и порядок ее не больше, чем 8.

Доказательство. Предположим, что утверждение предложения неверно и G — противоречащий пример. Пусть $E_0=\langle t\rangle$, обозначим через E_i, $i\geqslant 1$, некоторую силовскую 2-подгруппу из $N_G(E_{i-1})$. Пусть s — наименьшее число, для которого E_s — силовская 2-подгруппа в G.

Положим $2^n=|E_1|/2$. Группа $N(E_1)/O(N(E_1))=N(E_1)/O(C(E_1))$ естественным образом действует на E_1. По условию в $N(E_1)/O(C(E_1))$

содержится циклическая подгруппа Z_1 порядка 2^n-1, действующая транзитивно на неединичных элементах из $V_1=[E_1, Z_1]$, и $E_1=\langle t\rangle\times V_1$ — элементарная группа. Покажем, что

(1.1) $s>1$.

В противном случае любая инволюция из E_1 сопряжена с инволюцией из V_1. Все инволюции из V_1 сопряжены уже в $C(t)$, поэтому все инволюции из E_1 сопряжены в $N(E_1)$. По теореме Томпсона — Фейта [5] $N(E_1)/C(E_1)$ — разрешимая группа нечетного порядка. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из $N(E_1)/C(E_1)$. Если $C_N(z)\neq 1$ для некоторого элемента z из $Z_1^{\#}$, то, поскольку $C_{E_1}(z)=\langle t\rangle$, подгруппа $C_N(z)$ действует тривиально на t. Кроме того, $\langle t\rangle=C_{E_1}(C_N(z))$, так как Z_1 действует неприводимо на $E_1/\langle t\rangle$ и $C_N(z)$ — Z_1-допустимая подгруппа. Так как N — абелева группа, то $\langle t\rangle=C_{E_1}(C_N(z))$ — N-допустимая группа и $\langle t\rangle=C_{E_1}(N)$, откуда $t\in Z(N(E_1))$, что невозможно. Поэтому $C_N(z)=1$ для любого элемента $z\in Z_1^{\#}$, и NZ_1 — группа Фробениуса нечетного порядка, действующая на векторном пространстве E_1 размерности $n+1$ над полем из двух элементов. По теореме 25.4 из книги У. Фейта [4], $|Z_1|\leqslant n+1$, $2^n-1\leqslant n+1$ и $n=2$. Следовательно, порядок E_1 равен восьми, что противоречит выбору G.

Для $H\lhd L\subseteq G$ определим подгруппу $A_G(H/L)$ группы автоморфизмов H/L как $(N(H)\cap N(L))/C_{N(H)\cap N(L)}(H/L)$.

(1.2) *Для любого $i=1,\ldots,s$ группа $A_G(E_i)$ содержит циклическую подгруппу Z_i порядка 2^n-1, обладающую следующими свойствами:*

а) *если $V_i=[E_i, Z_i]$, то $E_i=V_i\langle t\rangle$, $[Z_i, t]=1$ и V_iZ_i — группа Фробениуса с инвариантным ядром V_i;*

б) *если положить $V_0=1$, то подгруппа V_{i-1} равна $\Phi(E_i)$ и E_i/V_{i-1} — элементарная группа порядка 2^{n+1};*

в) *V_{i-1} — прямое произведение n циклических групп порядка 2^{i-1}, и t инвертирует каждый элемент из V_{i-1}.*

Очевидно, для $i=1$ это утверждение — перефразировка условия предложения 1. Пусть (1.2) справедливо для $i=k<s$. Обозначим через $\bar{E}_k$ фактор-группу $E_k/V_{k-1}=E_k/\Phi(E_k)$ и рассмотрим $A_k=A_G(\bar{E}_k)$. Пусть $\bar{Z}_k$ — образ Z_k при естественном гомоморфизме $A_G(E_k)$ на A_k, а $\bar{t}$ и $\bar{V}_k$ — образы t и V_k в $\bar{E}_k$.

Если u — элемент из E_{k+1} и $t^u\in tV_{k-1}$, то

$$u\in N_G(\langle t, V_{k-1}\rangle)\cap E_{k+1}=N_G(E_{k-1})\cap E_{k+1}=E_k,$$

поэтому при естественном гомоморфизме $N(E_k)$ на A_k образ $\bar{E}_{k+1}$ группы E_{k+1} изоморфен E_{k+1}/E_k, и для любого элемента $\bar{u}\in\bar{E}_{k+1}$ имеет место $\bar{t}^u\neq\bar{t}$.

При действии $\bar{Z}_k$ множество $\bar{E}_k^{\#}=\bar{E}_k\setminus\{1\}$ разбивается на орбиты $\{\bar{t}\}$, $\bar{V}_k^{\#}$ и $\bar{V}_k^{\#}\bar{t}$. Если все инволюции из $\bar{E}_k$ сопряжены относительно A_k, то $|A_k: C_{A_k}(\bar{t})|=|\bar{E}_k^{\#}|$ — нечетное число и $C_{A_k}(\bar{t})$ содержит силовскую 2-подгруппу из A_k. Но тогда $N_G(\langle t, V_{k-1}\rangle)=N_G(E_{k-1})$ содержит силовскую 2-под-

группу из $N_G(E_k)$, что противоречит условию $k<s$. Поэтому инволюция $\bar{t}$ не сопряжена с инволюциями из $\bar{V}_k^{\#}\bar{t}$ или с инволюциями из $\bar{V}_k^{\#}$.

Пусть $\bar{u}$ — инволюция из $\bar{E}_{k+1}$. Мы показали, что $\bar{t}^{\bar{u}}\neq\bar{t}$. Предположим что $\bar{t}^{\bar{u}}=\bar{v}_k\in\bar{V}_k$. Тогда $\bar{v}_k^{\bar{u}}=\bar{t}$, и для всех элементов $\bar{v}\in\bar{V}_k$, не равных $\bar{v}_k$, выполнено включение $\bar{v}^{\bar{u}}\in\bar{V}_k$. Действительно, в противном случае $\bar{v}^{\bar{u}}=\bar{v}'\bar{t}$, где $\bar{v}'\in\bar{V}_k^{\#}$. Поскольку все элементы из $\bar{V}_k^{\#}$ сопряжены относительно $\bar{Z}_k$, отсюда следует, что все элементы из $\bar{E}_k^{\#}$ сопряжены относительно A_k, что по предыдущему абзацу неверно. Пусть теперь $\bar{v}\in\bar{V}_k^{\#}$ и $v\neq v_k$. Такой элемент существует, потому что $n>1$ по условию предложения 1. Тогда $(\bar{t}\bar{v})^{\bar{u}}=\bar{v}_k\bar{v}^{\bar{u}}\in\bar{V}_k$, и снова все инволюции из $\bar{E}_k$ сопряжены относительно A_k, что невозможно. Таким образом, выполнено следующее утверждение:

(1.3) *Орбитами A_k на $\bar{E}_k$ являются множества $\bar{V}_k^{\#}$ и $\bar{V}_k\bar{t}$. Подгруппа V_k инвариантна в $N_G(E_k)$.*

Так как A_k действует транзитивно на множестве $\bar{V}_k\bar{t}$ и стабилизатор точки $\bar{t}$ содержит подгруппу $\bar{Z}_k$, действующую транзитивно на $\bar{V}_k\bar{t}\setminus\{\bar{t}\}$, то

(1.4) *A_k действует дважды транзитивно на множестве $\bar{V}_k\bar{t}$, и ни одна инволюция из A_k не оставляет точку $\bar{t}$ неподвижной.*

Последнее утверждение следует из того, что силовская 2-подгруппа из $N(\langle t, V_{k-1}\rangle)\cap N(E_k)$ совпадает с E_k и отображается в единицу при гомоморфизме $N(E_k)$ на A_k.

(1.5) *$t^{E_{k+1}}=tV_k$, и для $i=k+1$ верен пункт* в) *из* (1.2).

Действительно, все элементы, сопряженные с t в E_{k+1}, лежат по (1.3) в tV_k. Так как $|C_{E_{k+1}}(t)|=|E_1|=|E_{k+1}/V_k|$, то $|E_{k+1}:C_{E_{k+1}}(t)|=|V_k|=|tV_k|$. Поэтому $|t^{E_{k+1}}|=|tV_k|$ и $t^{E_{k+1}}=tV_k$.

В частности, все элементы из tV_k — инволюции, поэтому t инвертирует каждый элемент из V_k. Отсюда следует, что V_k — абелева группа, в которой t централизует все элементы порядка 2. Так как $\Omega_1(V_k)\subseteq E_1\cap V_k=V_1\subseteq\Omega_1(V_k)$, то $\Omega_1(V_k)=V_1$. Далее, Z_k действует транзитивно на $V_1^{\#}$, поэтому V_k — прямое произведение циклических групп одного порядка. Мы доказали утверждение (1.5).

(1.6) *Если A_k — разрешимая группа, то пункт* (1.2) *верен для $i=k+1$.*

По (1.5) достаточно проверить пункты б) и а) из (1.2). По (1.4) $\bar{E}_{k+1}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в A_k: $\bar{E}_{k+1}$ — элементарная 2-группа порядка 2^n.

Предположим, что $t\in\Phi(E_{k+1})$. По утверждению (1.3) существует такой элемент $x\in E_{k+1}$, что $x^2=tv$, где $v\in V_k$. По (1.5) элемент t сопряжен в E_{k+1} с tv, поэтому в E_{k+1} есть такой элемент y, что $y^2=t$. Но тогда $y\in E_1$ и $t\in\Phi(E_1)=1$. Полученное противоречие показывает, что $t\notin\Phi(E_{k+1})$. Поскольку E_{k+1}/E_k — элементарная группа, E_{k+1}/V тоже элементарная группа. Далее, по утверждению (1.6), $V_k\subseteq\Phi(E_{k+1})$, поэтому $V_k=\Phi(E_{k+1})$, и справедлив пункт б) из (1.2).

Так как $\bar{E}_{k+1}\lhd A_k=A_G(E_k/\Phi(E_k))$, то

$$N(E_k) = (N(E_{k+1}) \cap N(E_k)) \cdot C(E_k),$$

$$A_G(E_k) = N(E_k)/C(E_k) \simeq (N(E_{k+1}) \cap N(E_k))/N(E_{k+1}) \cap C(E_k).$$

Пусть $\hat{Z}_{k+1}$ — образ Z_k в $N(E_{k+1}) \cap N(E_k)/N(E_{k+1}) \cap C(E_k)$ при этом изоморфизме. Тогда образ Z_{k+1} группы $\hat{Z}_{k+1}$ при естественном гомоморфизме $(N(E_{k+1}) \cap N(E_k))/(N(E_{k+1}) \cap C(E_k))$ на $(N(E_{k+1}) \cap N(E_k))/C(E_{k+1})$ изоморфен Z_k.

Теперь для Z_{k+1}, очевидно, выполнен пункт а) из (1.2) при $i=k+1$. Утверждение (1.6) доказано.

Мы можем считать A_k неразрешимой группой. По (1.4) и результату Х. Бендера [1] в A_k есть нормальная подгруппа N, изоморфная $PSL(2, q)$ для некоторого числа q, и $C_{A_k}(N)=1$.

Если силовская 2-подгруппа из A_k не содержится в N, то A_k обладает подгруппой L индекса 2, которая, очевидно, тоже дважды транзитивна и обладает тем же стабилизатором точки, что и A_k. Но тогда $L=A_k$. Поэтому любая силовская 2-подгруппа из A_k содержится в N. Поскольку $|A_k|=2^n|S|$, где S — стабилизатор точки, имеющий нечетный порядок, то $A_k=TS$, где T — силовская 2-подгруппа из A_k, откуда $N=T(S \cap N)$. Так как $PSL(2, q)$ при четном q не обладает дополнением к силовской 2-подгруппе, то q нечетно, и T — группа диэдра порядка 2^n. Пусть $X=\langle x \rangle$ — циклическая подгруппа из T порядка 2^{n-1}. Тогда X точно действует на векторном пространстве $\overline{V}_k$ размерности n над полем из двух элементов. Выберем в $\overline{V}_k$ базу так, чтобы матрица x в этой базе имела жорданов вид. Тогда некоторая жорданова клетка матрицы x имеет размерность, не меньшую, чем $2^{n-2}+1$, поэтому $2^{n-2}+1 \leqslant n$, т. е. $n \leqslant 3$. Так как силовская 2-подгруппа из A_k неабелева, то $n=3$. Так как A_k действует точно на $\overline{V}_k$, то A_k изоморфна подгруппе из $GL(3, 2) \simeq \simeq PSL(2,7)$. Поэтому

(1.7) $n=3$, $A_k \simeq PSL\ (2,7)$.

Пусть $\overline{N} = N(E_k)/\mathfrak{O}(N(E_k))V_{k-1}$. Пусть $\overline{E}_k$, $\overline{E}_{k+1}$, $\overline{V}_k$ — образы E_k, E_{k+1}, V_k при естественном гомоморфизме $N(E_k)$ на $\overline{N}$ (для нас удобнее теперь забыть смысл старых обозначений $\overline{E}_k$ и $\overline{E}_{k+1}$). Очевидно, фактор-группа $\overline{N}/\overline{E}_k$ изоморфна $PSL\ (2,7)$ и $\overline{V}_k \lhd \overline{N}$. Далее, $\overline{E}_k$ — элементарная группа порядка 16. Обозначим через D фактор-группу $\overline{E}_{k+1}/\overline{E}_k \simeq E_{k+1}/E_k$, изоморфную группе диэдра порядка 8. Группа D естественным образом действует на $\overline{E}_k$, и, как показано выше, ни один элемент из $D^{\#}$ не централизует ни один элемент из $\overline{V}_k\bar{t}$, где $\bar{t}$ — образ t при гомоморфизме $N(E_k)$ на $\overline{N}$.

Если d — элемент порядка 4 из D, то d индуцирует в $\overline{V}_k$ линейное преобразование, жорданова форма которого состоит из одной клетки. Так как $C_{\overline{E}_k}(d) \cap \overline{V}_k\bar{t}=\varnothing$, то d индуцирует на $\overline{E}_k$ линейное преобразование, жорданова форма которого состоит из одной клетки.

Мы получаем следующее утверждение:

(1.8) *Если d — элемент порядка 4 из $D=\bar{E}_{k+1}/\bar{E}_k \cong E_{k+1}/E_k$, то в $\bar{E}_k$ можно выбрать базу $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ так, что $\bar{e}_1=\bar{t}$, $\langle \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\rangle = \bar{V}_k$ и $\bar{e}_1^d = \bar{e}_1\bar{e}_2$, $\bar{e}_2^d=\bar{e}_2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3^d=\bar{e}_3\bar{e}_4$, $\bar{e}_4^d=\bar{e}_4$.*

Предположим сначала, что $V_{k-1}=1$. Пусть $t^g \in E_{k+1}\setminus E_k$ для некоторого элемента g из G. Так как $\bar{N}/\bar{E}_k \simeq PSL\ (2,\ 7)$, то в нормализаторе E_k элемент t^g сопряжен с элементом из смежного класса d^2 фактор-группы $D=E_{k+1}/E_k$. Пусть d_1 — элемент группы E_{k+1} из смежного класса d. Тогда элемент t сопряжен в G с элементом вида d_1^2e, где $e\in E_k$.

Мы покажем, что любая инволюция вида d_1^2e, где $e\in E_k$, является квадратом некоторого элемента, и придем к противоречию, поскольку в централизаторе t, а значит, и в централизаторе d_1^2e нет элементов порядка 4. Тем самым мы покажем, что выполнено

(1.9) *Если $V_{k-1}=1$, то слабое замыкание t в E_{k+1} относительно G содержится в E_k.*

Из равенства $(d_1^2e)^2=1$ следует, что $d_1^4e^{d_1^2}e=1$. Элемент d_1^4 лежит в E_k, и d_1 централизует d_1^4. Согласно (1.8), $d_1^4=\bar{e}_4^{\alpha}$, где $\alpha=0$ или $\alpha=1$. Пусть $e=\bar{e}_1^{\alpha_1}\bar{e}_2^{\alpha_2}\bar{e}_3^{\alpha_3}\bar{e}_4^{\alpha_4}$. Тогда, по (1.8), $e^{d_1^2}e=\bar{e}_3^{\alpha_1}\bar{e}_4^{\alpha_2}$. Поскольку $d_1^4e^{d_1^2}e=1$, то $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha$. Но теперь $d_1^2e=d_1^2\bar{e}_2^{\alpha}\bar{e}_3^{\alpha_3}\bar{e}_4^{\alpha_4}=(d_1\bar{e}_1^{\alpha}\bar{e}_2^{\alpha_3}\bar{e}_3^{\alpha_4})^2$, что и было обещано. Таким образом, (1.9) верно.

Покажем теперь, что справедливо следующее утверждение:

(1.10) *Если $V_{k-1}=1$, то E_{k+1} — силовская 2-подгруппа в G.*

Предположим противное. Тогда $E_{k+2}\neq E_{k+1}$. Пусть u — элемент из $E_{k+2}\setminus E_{k+1}$. Так как $1=V_{k-1}=\Phi(E_k)$, то E_k элементарна. Далее, $E_k^u\neq E_k$, поэтому в $E_k^u\setminus E_k$ есть инволюция. Эта инволюция централизует t, так как $t^{u^{-1}}\in E_{k+1}$ и по (1.9) $t^{u^{-1}}\in E_k$, т. е. $t\in E_k^u$. Но $C_{E_{k+1}}(t)\subseteq E_k$. Пришли к противоречию, доказывающему (1.10).

Пусть по-прежнему $V_{k-1}=1$. Так как $\bar{V}_k \lhd \bar{N}$ и $\bar{N}/\bar{E}_k\simeq PSL$ (2.7), то $\bar{N}/\bar{V}_k$ изоморфна $SL(2,7)$ или $PSL(2,7)\times C$, где C — группа порядка 2.

Если $\bar{N}/\bar{V}_k\simeq SL(2,7)$, то квадрат некоторого элемента из E_{k+1} лежит в смежном классе tV_k, а так как каждый элемент из tV_k сопряжен в G с t, то квадрат некоторого элемента x из G равен t. Но в $C(t)$ нет элементов порядка 4, поэтому $\bar{N}/\bar{V}_k\simeq PSL(2,7)\times C$, где $C=\langle \bar{t}\bar{V}_k\rangle$.

Мы показали, что $t\notin\Phi(E_{k+1})$. Далее, $V_k=[t,\ E_{k+1}]\subseteq\Phi(E_{k+1})$, поэтому существует такая максимальная подгруппа M в E_{k+1}, которая содержит V_k, но не содержит t. Так как V_k — максимальная подгруппа в E_k, то $M\cap E_k=V_k$.

По (1.10) и лемме Томпсона $t^g\in M$ для некоторого элемента $g\in G$. Согласно (1.9), $t^g\in M\cap E_k=V_k$. Но любая инволюция из V_k сопряжена в $N(E_k)$ элементом порядка 7 с некоторой инволюцией из центра E_{k+1}, поэтому $C(t)$ содержит силовскую 2-подгруппу из G, что противоречит предположению.

Мы показали, что

(1.11) $V_{k-1}\neq 1$.

Точно так же, как при доказательстве утверждения (1.10), можно показать, что

(1.12) $t \notin \Phi(E_{k+1})$ *и* $\overline{N}/\overline{V}_k \simeq PSL\ (2,7) \times C$, *где* $|C| = 2$.

Наша ближайшая цель доказать, что

(1.13) E_{k+1} — *силовская 2-подгруппа в* G.

Предположим, напротив, что E_{k+1} не является силовской 2-подгруппой в G. Согласно (1.12), E_{k+1}/V_k не содержит элементов порядка 8. По (1.5) $V_k \cap V_k^u \supseteq \supseteq V_{k-2} = \{x^4 \mid x \in V_k\}$ для элемента u из $E_{k+2} \setminus E_{k+1}$, квадрат которого лежит в E_{k+1}. Так как, по (1.5), $V_{k-2} = \Omega_{k-2}(V_k)$, то V_{k-2} — характеристическая подгруппа в $V_k \cap V_k^u$, и поэтому $\langle N(E_k), u\rangle \subseteq N(V_{k-2})$.

Пусть $t_1 = t^u$. Очевидно, $t_1 \in E_{k+1}$. Если $t_1 \in V_k$, то, по (1.5) и (1.11), $|C_{E_{k+1}}(t_1)| \geqslant |V_k| > |E_1|$. Поэтому $t_1 \notin V_k$. Если $t_1 \in E_k \setminus V_k$, то, согласно (1.5), в E_{k+1} существует такой элемент x, что $t_1^x = t$. Но тогда $ux \in C_{E_{k+2}}(t) \subseteq E_1 \subseteq \subseteq E_{k+1}$, откуда $u \in E_{k+1}$. Поэтому $t_1 = t^u \in E_{k+1} \setminus E_k$. Так как $N(E_k) \subseteq N(V_{k-2})$, то, согласно (1.7), в $N(V_{k-2})$ существует такой элемент m, что $t_1^m E_k$ является квадратом некоторого элемента dE_k порядка 4 из E_{k+1}/E_k. Положим $t_2 = = t_1^m = t^{um}$. По (1.5), $C_{E_{k+1}/V_{k-2}}(tV_{k-2}) = E_{k-1}/V_{k-2}$. Пусть E/V_{k-2} — силовская 2-подгруппа из $C_{N(V_{k-2})/V_k}(tV_{k-2})$, содержащая E_{k-1}/V_{k-2}. Очевидно, $E/V_{k-2} = = E_{k-1}/V_{k-2}$, и силовская 2-подгруппа из $C_{N(V_{k-2})/V_{k-2}}(tV_{k-2})$ элементарна. Поскольку $u^m \in N(V_{k-2})$, элементарна и силовская 2-подгруппа из $C_{N(V_{k-2})/V_{k-2}}(t^{um}V_{k-2})$. В частности, элементарна группа $C_{E_{k-1}/V_{k-2}}(t_2V_{k-2})$. Пусть $V = V_k/V_{k-2}$. Согласно (1.5), (1.7) и (1.11), V — прямое произведение трех циклических групп порядка 4. Элемент t_2 индуцирует в V такой же автоморфизм, какой индуцирует в V элемент d^2 или td^2. Утверждение (1.13) будет доказано, если мы покажем, что каждый из элементов d^2 и td^2 централизует в V элемент порядка 4.

В V/V^2 можно выбрать базу v_1V^2, v_2V^2, v_3V^2 так, что $v_1^d \in v_1v_2V^2$, $v_2^d \in \in v_2v_3V^2$, $v_3^d \in v_3V^2$. Элемент $v_1^{-1}v_1^d$ лежит в v_2V^2. Не нарушая общности, мы можем считать, что $v_1^{-1}v_1^d = v_2$. Точно так же можно считать, что $v_2^{-1}v_2^d = v_3$. Очевидно, что $V = \langle v_1\rangle \times \langle v_2\rangle \times \langle v_3\rangle$ и элемент d представляется в базе v_1, v_2, v_3 матрицей

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 1 + 2\alpha_3 \end{bmatrix},$$

где α_1, α_2, α_3 — вычеты по mod 4. Так как d^4 индуцирует в V тождественный автоморфизм, то $\delta^4 = 1$, откуда

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 + 2x \end{bmatrix},$$

где x — некоторый вычет по mod 4. Теперь

$$\delta^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2(1+x) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку t инвертирует V, то td^2 централизует v_3, а d^2 централизует элемент $v_1^2 v_3$. Каждый из элементов v_3, $v_1^2 v_3$ имеет порядок 4. Утверждение (1.13) доказано.

Докажем утверждение (1.2). Согласно (1.12), $E_{k+1}/V_k = \langle tV_k \rangle \times D/V_k$, где D — группа диэдра порядка 8, и все инволюции из D/V_k сопряжены в $N(V_k)$. По лемме Томпсона инволюция t сопряжена в G с инволюцией u из D. Если $u \in V_k$, то $|C_{V_k}(u)| > 16$, что невозможно. Поэтому $u \in D \setminus V_k$. Поскольку все инволюции из D/V_k сопряжены в $N(V_k)$, мы можем считать, что $uV_k \in Z(D/V_k)$. Так как все сопряженные с u в E_{k+1} элементы лежат в uV_k и $|C_{E_{k+1}}(u)| \leqslant |C_{E_{k+1}}(t)| = 16$, то $|uV_k| \geqslant |E_{k+1} : C_{E_{k+1}}(u)|$. Отсюда следует, что смежный класс uV_k состоит из инволюций. Поэтому u инвертирует V_k, что невозможно. Утверждение (1.2) доказано.

Докажем предложение 1. Согласно (1.2), $E_s/\Phi(E_s)$ — элементарная группа порядка 2^{n+1} и $t \notin \Phi(E_s)$. Кроме того, t инвертирует $\Phi(E_s)$, и $\Omega_1(\Phi(E_s)) \subseteq Z(E_s)$. По лемме Томпсона инволюция t сопряжена в G с элементом v из V_s. Так как $\Omega_1(\Phi(E_s)) \subseteq Z(E_s)$, то $v \in V_s \setminus \Phi(E_s)$. Так же, как и в предыдущем абзаце, v инвертирует $\Phi(E_s)$. Но все элементы из $(V_s/\Phi(E_s))^{\#}$ сопряжены под действием Z_s, поэтому любой элемент из $V_s \setminus \Phi(E_s)$ инвертирует $\Phi(E_s)$. Поскольку $V_s/\Phi(E_s)$ — нециклическая группа, $\Phi(E_s)$ — элементарная группа из $Z(E)$. Так как в каждом смежном классе $V_s/\Phi(E_s)$ имеется инволюция, то V_s — элементарная группа. Если $\Phi(E_s) \neq 1$, то $|V_s| \geqslant 2^{2n}$, где 2^{n+1} — порядок силовской 2-подгруппы из централизатора v. Так как $V_s \subseteq C(v)$, то $2^{2n} \leqslant 2^{n+1}$, что невозможно. Поэтому $\Phi(E_s) = 1$, и $E_s = E_1$ — элементарная группа. Это противоречит (1.1). Предложение 1 доказано.

2. Силовская 2-подгруппа из $C(t)$ неэлементарна

Предложение 2. *Если для инволюции t конечной группы G $L(C_G(t)) \simeq \langle t \rangle \times PSL(2, q)$, где $q \equiv \pm 1 \pmod 8$, то G — непростая группа.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть T_1 — силовская 2-подгруппа из $C(t)$ и $D = T_1 \cap [C(t), C(t)]$. Тогда D — группа диэдра порядка, не меньшего 8, и $T_1 = \langle t \rangle \times D$.

Поскольку в силовской 2-подгруппе T группы G есть элементарная подгруппа порядка 8, то в T есть нормальная четверная подгруппа V. Так как $|T : C_T(V)| \leqslant 2$, то инволюция t по лемме Томпсона сопряжена в G с инволюцией из $C_T(V)$. Мы можем считать, что V содержится в T_1. Подгруппа T_1, очевидно, не является силовской 2-подгруппой в G.

Покажем сначала, что

(2.1) $t \notin V$.

Предположив противное, получим, что T_1 — подгруппа индекса 2 в некоторой силовской 2-подгруппе T^* группы G. Не нарушая общности, можно считать, что $T^*=T$. Все инволюции из D являются квадратами некоторых элементов из $C(t)$, поэтому элемент t не сопряжен в G ни с одним элементом из D. Следовательно, элемент t сопряжен в T с инволюцией tz, где $\langle z\rangle=Z(D)$. Если $D^u\neq D$ для некоторого элемента $u\in T\setminus E_1$, то $d^u\in tD$ для некоторой инволюции d из D. Поскольку все инволюции из D сопряжены в $C(t)$, а все инволюции из tD сопряжены в G, инволюция z сопряжена в G с t, что невозможно, поскольку z — квадрат некоторого элемента из D.

Мы показали, что $D\lhd T$. Порядок $|T/D|$ равен 4, поэтому $[T, T]\subseteq D$. Если $[T, T]$ — циклическая группа, то по результату из работы [3] $T=A\times U$, где U — группа диэдра, полудиэдральная группа или группа, изоморфная сплетению $Z_2 \wr Z_2$, а A — абелева группа. Так как в нашем случае $|Z(T)|=2$, то $A=1$ и $T=U$. Но в U нет элементарных подгрупп порядка 8, поэтому $[T, T]$ — нециклическая группа. Пусть $\langle x\rangle$ — максимальная циклическая подгруппа из $[T, T]$, содержащая z. Так как $[T, T]$ — группа диэдра, то все элементы из $[T, T]\setminus\langle x\rangle$ — инволюции. Пусть $u\in T\setminus T_1$. Если $u^2=td$, где $d\in D$, то d не является инволюцией, поскольку элемент t сопряжен в G с любой инволюцией из tD и не является квадратом никакого элемента из G. В T_1 существует инволюция y, для которой $[u, y]\notin\langle x\rangle$. Но тогда $uy\notin T_1$ и $(uy)^2=u^2u^{-1}yuy=u^2[u, y]=td[u, y]$. Здесь $d[u, y]$ — инволюция из D. Заменяя u на uy, придем к противоречию, показывающему, что $u^2\in D$. Пусть $M=\langle D, u\rangle$. Тогда $t\notin M$ и $T=\langle M, t\rangle$. Если M не является группой максимального класса, то $|M:[M, M]|\geqslant 8$. Поскольку $|D:[D, D]|=4$ и $[D, D]\leqslant[M, M]$, в этом случае $[M, M]=[D, D]$. Так как t централизует $M/[D, D]$, то $[T, T]=[M, M]=[D, D]$. Если же M — группа максимального класса, то поскольку T не максимального класса, $[T, T]\subseteq[M, M]$. В каждом из случаев $[T, T]$ — циклическая группа, вопреки уже доказанному. Утверждение (2.1) доказано.

(2.2) $V\subseteq D$.

В противном случае некоторый элемент из V лежит в tD, и инволюция t, будучи сопряжена в G с любой инволюцией из tD, сопряжена с некоторым элементом из V, а это противоречит (2.1).

(2.2) $V\subseteq D$.

Действительно, если $|D|\neq 8$, то $SCN_3(T_1)=\varnothing$ и поэтому $SCN_3(T)=\varnothing$. Пусть $SCN_3(T)=\varnothing$. Так как согласно (2.2) все элементы из V сопряжены в G, то из результатов А. Мак-Вильямс [13] и Т. Харады [12] следует, что T изоморфна силовской 2-подгруппе одной из следующих простых групп: группы Холла — Янко, $G_2(q)$ для нечетного q, группы Лайонса. Утверждение (2.3) следует теперь из работ [7], [8], [10].

Обозначим через N нормализатор V в G. Пусть C — подгруппа индекса 2 из N, содержащая $C(V)$. Очевидно, $|C:C(V)|=3$. Согласно (2.3), $N\supseteq T_1$. Пусть $E_1=T_1\cap C$. Тогда E_1 — силовская 2-подгруппа в $C_C(t)$, и в $C_C(t)$ есть 3-элемент, транзитивно переставляющий при сопряжении

элементы из $V^{\#}$. Пусть E_i, $i=2, 3, \ldots$, — некоторая силовская 2-подгруппа из $N_C(E_{i-1})$. Пусть s — наименьшее число, для которого E_s — силовская 2-подгруппа в C. Если $s=1$, то T — силовская 2-подгруппа в G, что невозможно. Пусть $s>1$. Тогда справедливо утверждение (1.2) с заменой G на C. Действительно, в нашем случае $n=2$ и можно повторить доказательство утверждения (1.2) до пункта (1.6) включительно. Но в нашем случае A_k — подгруппа симметрической группы степени 3 и, следовательно, разрешима. Мы показали, что

(2.4) *$N_C(E_s)$ содержит 3-элемент y, обладающий следующими свойствами:*

а) $y^3 \in C(E_s)$;

б) $E_s = V_s\langle t\rangle$, где $[t, y]=1$, $V_s=[E_s, y]$ *и* $V_s\langle y\rangle/y^3$ — *группа Фробениуса*;

в) $E_s/\Phi(E_s)$ — *элементарная группа порядка* 8;

г) $\Phi(E_s)$ — *прямое произведение двух циклических групп порядка* 2^{s-1}, *и t инвертирует каждый элемент из* $\Phi(E_s)$.

Теперь мы можем полностью определить строение T.

(2.5) *T порождается инволюциями a, b, c, d, e, f, с определяющими соотношениями $[c, e]=[b, f]=a$, $[d, e]=b$, $[d, f]=c$; остальные коммутаторы от образующих тривиальны. Элемент a сопряжен в G с элементом из $T\setminus\langle a, b, c, d\rangle$.*

Доказательство. Пусть сначала элемент t сопряжен с некоторым элементом u из V_s. Тогда $u \notin Z(E_s)$, поэтому, согласно (2.4), $\langle u^y, u, Z(E_s)\rangle$ — элементарная подгруппа порядка 16; но в $C(t)$ такой подгруппы нет, поэтому ее нет и в $C(u)$. Итак,

(2.6) *Инволюция t не сопряжена в G ни с одним элементом из V_s.*

Обозначим через N_0 нормализатор E_s в N. Тогда $N_0 \cap N_C(E_s) = E_sK$, где K — группа нечетного порядка, содержащая y, и $|N_0 : E_sK| = 2$. Далее, $C_K(E_s) \subseteq O(N_0)$. Пусть $\overline{N}_0 = N_0/O(N_0)$, $\overline{K} = K/O(N_0)$, $\overline{E}_s = E_sO(N_0)/O(N_0)$, $\overline{V} = VO(N_0)/O(N_0)$, $\overline{y} = yO(N_0)$, $\overline{t} = tO(N_0)$. Тогда порядок $\overline{y}$ равен 3. Так как $C_{\overline{E}_s}(\overline{y}) = \langle\overline{t}\rangle$, то $N_{\overline{K}}(\overline{y}) \cap C(\overline{V})$, нормализуя $C_{\overline{E}_s}(\overline{y})$, централизует $\overline{V}\times\langle\overline{t}\rangle$. Подгруппа $\overline{V}\times\langle\overline{t}\rangle$ содержит свой централизатор в $\overline{E}_s$. По $P\times Q$-лемме Томпсона (см. [6], теорема 5.3.4) $N_{\overline{K}}(\overline{y}) \cap C(\overline{V}) = 1$. Так как $\overline{K} = (\overline{K} \cap C(\overline{V}))\langle\overline{y}\rangle$, то $\langle\overline{y}\rangle$—силовская 3-подгруппа в $\overline{K}$ и, значит, силовская 3-подгруппа в $\overline{E}_s\overline{K}$. Поэтому $N_0 = \overline{E}_s\overline{K}\cdot N(\langle\overline{y}\rangle)$. Так как $N(\langle\overline{y}\rangle)$ нормализует $C_{\overline{E}_s}(\overline{y}) = \langle\overline{t}\rangle$, то $N_0 = (N_0 \cap C)C_{N_0}(t)$. Таким образом, мы можем считать, что

(2.7) *Силовская 2-подгруппа T из $N(V)$ равна $E_s\langle d\rangle$, где d — элемент порядка 2 из $C(t)$.*

По лемме Томпсона инволюция t сопряжена в G с инволюцией из $\langle d\rangle V_s$. Согласно (2.6), она сопряжена с элементом u из dV_s. Так как u индуцирует в V линейное преобразование с одной клеткой Жордана, то, согласно (2.4), базу v_1, v_2 в $\Phi(E_s)$ можно выбрать так, что матрица u в этой базе будет иметь вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому u централизует элемент $v_1^2v_2$. Поскольку в под-

группе $C(u)$, сопряженной с $C(t)$, нет, в силу (2.3), элементов порядка 8, $\Phi(E_s)=Z_{2^r}\times Z_{2^r}$, где $r=0$, 1 или 2.

Если $r=0$, то T_1 — силовская 2-подгруппа в G, что невозможно.

Пусть $r=2$. Покажем, что в этом случае множество $SCN_3(T)$ пусто. Предположим, что W — нормальная элементарная подгруппа порядка 8 из T. Тогда $C_W(V)V$ — нормальная элементарная подгруппа порядка, не меньшего 8, из T, содержащая V. Можно считать, что $W\supseteq V$ и $W\subseteq C_T(V)=\langle t\rangle V_s$. Если $W\subseteq V_s$, то пусть $w\in W\setminus V$. Пользуясь пунктом (2.4, б), сопряжем элемент w элементом y. Тогда $\langle w, w^y, V\rangle$ — элементарная подгруппа порядка 16, инвариантная в E_s. Согласно (2.4, в) и (2.4, г), $\langle w, w^y, V\rangle\Phi(E_s)=V_s$ и $\langle w, w^y, V, t\rangle\Phi(E_s)=E_s$, откуда $\langle w, w^y, V\rangle\langle t\rangle=E_s$, что ввиду $r=2$ невозможно. Поэтому $W\not\subseteq V_s$ и в W содержится элемент tv, где $v\in V_s$. Если $v\in\Phi(E_s)$, то все элементы из $t\Phi(E_s)$ сопряжены в E_s, $W\supseteq t\Phi(V_s)$ и $|W|\geqslant|\Phi(E_s)|=16$, что противоречит выбору W. Поэтому $v\notin\Phi(E_s)$. Поскольку tv — инволюция, t инвертирует v, и поэтому t инвертирует элемент v^y, перестановочный с v. Мы видим, что t инвертирует абелеву подгруппу $\langle v\rangle\times\langle v^y\rangle$. Далее, $\langle t, v, v^y, \Phi(E_s)\rangle=E_s$, согласно (2.4, в). Поэтому $\langle t, v, v^y\rangle=E_s$, и элемент tv сопряжен в E_s с любым элементом из $tv\Phi(E_s)$. Отсюда $W\supseteq tv\Phi(E_s)$ и $|W|\geqslant|tv\Phi(E_s)|=16$, что неверно.

Итак, $r=1$. Далее, мы можем считать, что d инвертирует y по $\bmod O(N(E_s))$. Если $v\in V_s\setminus\Phi(E_s)$, то $\langle v, v^y\rangle$ — абелева группа. Если порядок v равен 4, то $V_s=\langle v\rangle\times\langle v^y\rangle$. Если же порядок v равен 2, то $V_s=V\times\langle v\rangle\times\langle v^y\rangle$ — элементарная группа порядка 16.

Пусть сначала V_s — элементарная группа, $V_s=V\times\langle v\rangle\times\langle v^y\rangle$. Пусть $v_1=v$, $v_2=v^y$, $v_3=[v, t]$, $v_4=[v_2, t]$. Тогда $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — база V_s, и t, y индуцируют в V_s линейные преобразования с матрицами

$$\hat{t}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \hat{y}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

соответственно. Пусть $\hat{d}$ — матрица преобразования, которое d индуцирует в $V_s=[E_s, \langle y\rangle]$.

Взяв элемент v из $V_s\setminus[V_s, d]$ и заменив при необходимости элемент y на y^2, мы можем считать, что

$$\hat{d}=\left[\begin{array}{cc:c}1&1&\\0&1&A\\\hdashline &0&\bar{B}\end{array}\right],$$

где A, B, 0 — матрицы размерности 2, и 0 состоит целиком из нулей. Из равенств $\hat{t}\hat{d}=\hat{d}\hat{t}$, $\hat{y}\hat{d}=\hat{d}\hat{y}^{-1}$, $\hat{d}^2=E$, где E — единичная матрица, получаем

$$\hat{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Полагая теперь $a=v_4$, $b=v_3$, $c=v_2$, $d=v_1$, $e=t$, $f=dt^{\alpha}$, получаем (2.5).

Пусть $V_s = \langle v\rangle \times \langle v^y\rangle$, где порядок v равен 4. Поскольку d не централизует $\Omega_1(V_s)$, базу $\{v_1, v_2\}$ группы V_s можно выбрать так, что $v_1^d = v_2$, $v_2^d = v_1$. Так как $v_1^t = v_1^{-1}$, $v_2^t = v_2^{-1}$, то T изоморфна силовской 2-подгруппе из группы Матье M_{12}. В группе G не менее двух классов сопряженных инволюций. Согласно результату Р. Брауэра и П. Фонга [2], G изоморфна M_{12}. В M_{12} централизатор нецентральной инволюции t изоморфен $\langle t\rangle \times PGL(2,5)$. Полученное противоречие доказывает утверждение (2.5).

(2.6) *G — непростая группа.*

В противном случае (2.5) показывает, что T изоморфна силовской 2-подгруппе знакопеременной группы A_8 (см. [9], стр. 210).

По теореме A^* и предложениям 3.1, 3.2 из [9] группа G изоморфна A_8, A_9 или же элемент a не сопряжен в G ни с одним элементом из $T\setminus\langle a, b, c, d\rangle$. Согласно (2.5), группа G изоморфна A_8 или A_9. Но в A_8 и A_9 нет инволюций, централизаторы которых удовлетворяли бы условиям предложения 2. Это противоречие доказывает утверждение (2.6), заканчивая одновременно доказательство предложения 2 и теоремы.

(Поступила в редакцию 3/V 1973 г.)

Литература

1. *H. Bender*, Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlässt, J. Algebra, *17*, № *4* (1971), 527—554.
2. *R. Brauer, P. Fong*, A characterization of the Mathieu group $\mathfrak{M}_{12}$, Trans. Amer. Math. Soc., *122*, № *1* (1966), 18—47.
3. *P. Chabot*, Groups whose Sylow 2-groups have cyclic commutator groups. II, J. Algebra, *21*, № *2* (1972), 312—320.
4. *W. Feit*, Characters of finite groups, New York, 1967.
5. *W. Feit, J. G. Thompson*, Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math., *13*, № *4* (1963), 775—1029.
6. *D. Gorenstein*, Finite groups, New York, 1967.
7. *D. Gorenstein, K. Harada*, A characterization of Janko's two new simple groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, *16*, № *3* (1970), 331—406.
8. *D. Gorenstein, K. Harada*, Finite simple groups of low 2-rank and the families $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, q odd, Bull. Amer. Math. Soc. *77*, № *6* (1971), 829—862.
9. *D. Gorenstein, K. Harada*, On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n=8, 9, 10, 11$, Math. Z., *117*, № *1—4* (1970), 207—238.
10. *D. Gorenstein, K. Harada*, On finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\hat{A}_n$, $n=8, 9, 10, 11$, J. Algebra, *19*, № *2* (1971), 185—277.
11. *K. Harada*, Groups with a certain type of Sylow 2-subgroups, J. Math. Soc. Japan, *19*, № *3* (1967), 303—307.
12. *K. Harada*, On some 2-groups of normal 2-rank 2, J. Algebra, *20*, № *1* (1972), 90—93.
13. *A. Mac-Williams*, On 2-groups with no normal abelian subgroups of rank 3, and their occurence as Sylow 2-subgroups of finite simple groups, Trans. Amer. Math. Soc., *150*, № *2* (1970), 345—408.
14. *J. Walter*, The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups, Ann. Math., *89*, № *3* (1969), 405—514.