ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2013, том 53, № 9, с. 1569–1588

УДК 519.7

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ В КЛАССЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ[1)]

Ю. В. Максимов

(117303 Москва, ул. Керченская 1а, кор. 1, МФТИ (ГУ) и НИУ ВШЭ)

e-mail: yury.maximov@phystech.edu

Поступила в редакцию 16.02.2012 г.
Переработанный вариант 31.03.2013 г.

Рассматривается задача построения простых дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) булевых функций с малым числом нулей. Указанная задача интересна как в контексте исследования сложности булевых функций, так и с точки зрения ее приложений в задачах анализа данных. Метод, используемый в работе, является развитием редукционного подхода к построению ДНФ булевых функций. Ключевой идеей редукционного метода является представление булевой функции в виде дизъюнкции булевых функций с меньшим числом нулей. В ряде практически важных случаев предлагаемая техника позволяет значительно снизить сложность ДНФ реализации булевых функций. Библ. 41.

Ключевые слова: булева функция, дизъюнктивная нормальная форма, сложность булевой функции, вероятностно почти корректное обучение, алгебраические методы классификации.

DOI: 10.7868/S0044466913090093

1. ВВЕДЕНИЕ

К задаче построения простых дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) булевых функций с малым числом нулей приводят многие задачи машинного обучения, в частности, построение характеристических функций в задачах распознавания образов (см. [1], [2]), и некоторые задачи вероятностно почти корректного обучения (PAC-learning, см. [3]–[7]).

Задача построения минимальной ДНФ произвольной булевой функции, равно как и задача распознавания свойства минимальности, является в общем случае сложной, переборной задачей (см. [8]–[10]).

При этом качество аппроксимации задачи построения минимальной ДНФ эффективными алгоритмами также невысоко, даже в наиболее простом случае, когда булева функция задана своей таблицей истинности (см. [9], [10]). Наилучший известный приближенный алгоритм построения минимальной дизъюнктивной нормальной формы, основан на сведении задачи минимизации ДНФ к задаче о покрытии множеств, дает решение размера $O(n \cdot \mathrm{OPT})$, где n – число переменных булевой функции, а OPT – размер минимальной ДНФ. В [10] показано, что NP-трудно получить приближенное решение задачи с точностью хотя бы n^{γ} для некоторого $\gamma > 0$.

Однако, как это было указано впервые С.В. Яблонским, построение минимальных (или близких к ним) дизъюнктивных нормальных форм булевых функций с малым числом нулей в ряде случаев может быть выполнено достаточно эффективно.

В частности, С.В. Яблонским было показано, что всякая булева функция, имеющая не более, чем 2 различных нуля, может быть реализована с использованием не более, чем $n + 1$ конъюнкций.

Существенный прорыв в теории сложности булевых функций с малым числом нулей связан с работами [4], [5]. Следуя [4], обозначаем через P_k^n класс булевых функций от n переменных, имеющих ровно k нулевых точек.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании, ФУПМ МФТИ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0073.

Скажем, что “почти все” функции класса $P^n_{k(n)}$ обладают свойством $\mathscr{A}$, если доля функций класса, для которых это свойство не выполнено, стремится к 0 при $n \longrightarrow \infty$.

В [6] были разработаны методы построения простых ДНФ булевых функций. Предложенный метод позволяет строить, для почти всех функций из класса P^n_k, дизъюнктивные нормальные формы, число конъюнкций которых не превосходит величины

$$4\frac{nk}{\log_2 n} - \frac{k(\log_2 k - \log_2\log_2 n)}{\log_2 n}.$$

Несмотря на ряд недавних публикаций по минимизации булевых функций с малым числом нулей (см., например, [7], [11]–[18]), указанный результат во многих случаях оставался наилучшим из известных к настоящему времени.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ РАБОТЫ

В настоящей статье предложены алгоритмы построения ДНФ для булевых функций от n переменных, имеющих в точности k различных нулей (функций класса P^n_k) при $k > \log_2 n/2$.

Предлагаемые в работе методы позволяют для почти всех функций класса P^n_k снизить оценки минимального числа конъюнкций, содержащихся в их ДНФ реализации, до величины, асимптотически равной

$$n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_\alpha}\right)\right[} \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(1 + o(1)),$$

при $n \longrightarrow +\infty$, $k_\alpha = \log_2 n - (\log_2 n)^{0.5+\alpha}$, α – произвольная положительная постоянная, определяющая скорость сходимости к указанному значению.

Более того, если число нулей булевой функции ограничено полиномом от размерности, то полученные дизъюнктивные нормальные формы для почти всех функций класса P^n_k содержат число литералов, не превосходящее

$$n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_\alpha}\right)\right[}\left(2 + \left]\log_2\left(\frac{k}{k_\alpha}\right)\right[\right)(1 + o(1)) \leqslant 2\frac{nk(3 + \log_2 k - \log_2\log_2 n)}{\log_2 n}(1 + o(1)).$$

Оценка, полученная в настоящей работе, улучшает ряд известных оценок минимального числа литералов и конъюнкций, достаточных для реализации типичных булевых функций класса P^n_k дизъюнктивными нормальными формами.

Во многих практически важных случаях полученная оценка длины ДНФ является асимптотически наилучшей из известных к настоящему моменту. В частности, это имеет место при числе нулей булевой функции, ограниченном снизу логарифмом и ограниченном сверху произвольным полиномом от размерности пространства переменных с положительными коэффициентами.

В сочетании с нижними оценками сложности, полученными в [6], указанные результаты позволяют эффективно строить существенно более точные ДНФ, чем это возможно в случае произвольных функций (см. [10]).

3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим через $\log x$ натуральный алгоритм числа x, $\log^{(1)}x = \log x$, $\log^{(k+1)}x = \log(\log^{(k)}x)$ при всех $k \geqslant 1$.

Напомним используемые в работе стандартные асимптотические записи. Запись $f(n) = O(g(n))$ означает, что существует константа $C > 0$ такая, что $\forall n\, f(n) < C \cdot g(n)$. Запись $g(n) = \Omega(f(n))$ эквивалентна записи $f(n) = O(g(n))$. Запись $f(n) = o(g(n))$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon : f(n) < \varepsilon \cdot g(n)$. Запись $g(n) = \omega(f(n))$ эквивалентна записи $f(n) = o(g(n))$.

Стандартные асимптотические записи $O(\cdot)$, $o(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$ и $\omega(\cdot)$ всегда, кроме специально оговоренных случаев, применяются при $n \longrightarrow +\infty$. Выражения $f << g$ и $f >> g$, применяемые в неравенствах и формулировках утверждений, равносильны равенствам $f = o(g)$ и $f = \omega(g)$ соответственно.

Матрицей нулей $M[f]$ функции f назовем булеву матрицу, по строкам которой расположены нули функции f. Обозначим через $[k]$ множество $\{1, 2, ..., k\}$, через $M[f]_{i_1, i_2, ..., i_t}^{j_1, j_2, ..., j_r}$ – подматрицу матрицы $M[f]$, образованную пересечением строк $i_1, i_2, ..., i_t$ со столбцами $j_1, j_2, ..., j_r$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данном разделе, для удобства читателя, будут введены основные понятия теории сложности дизъюнктивных нормальных форм.

Проективным весом булева вектора называется минимум из числа его нулей и единиц.

Логической суммой (дизъюнкцией) функций f_1 и f_2 называется такая функция f^1, которая равна единице в точке x только в случае, если хотя бы одна из функций f_1 или f_2 равна единице в точке x.

Логическим произведением (конъюнкцией) функций f_1 и f_2 называется такая функция f^2, которая равна единице в точке x только в случае, когда обе функции f_1 и f_2 равны единице в точке x.

Логической импликацией функций f_1 и f_2 называется такая функция $f^3 = f_1 \longrightarrow f_2$, которая равна 0 в точке x только в случае, если функция f_1 принимает значение 1, а f_2 принимает значение 0 в точке x.

Литералом называется булева переменная или ее отрицание.

Логическое произведение литералов, отвечающих различным булевым переменным, называется элементарной конъюнкцией. Конъюнкция $\mathcal{K}$ называется логической импликантой для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если импликация $\mathcal{K} \longrightarrow f$ истинна при всех значениях переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Конъюнкция $\mathcal{K}$ называется *несократимой* (для функции f), если $\mathcal{K}$ является логической импликантой f, однако при вычеркивании из $\mathcal{K}$ любого из литералов, входящих в ее запись, полученная конъюнкция перестает быть логической импликантой f. Несократимые конъюнкции часто называются *простыми логическими импликантами*.

Дизъюнкция D_f логических импликант функции f называется *дизъюнктивной нормальной формой* функции f, если функции D_f и f принимают одинаковые значения во всех точках булева куба.

Дизъюнктивная нормальная форма D булевой функции f называется *кратчайшей* (минимальной), если в записи D содержится наименьшее число конъюнкций (литералов) среди всех ДНФ, реализующих функцию f. Число конъюнкций, входящих в запись D, называется *длиной* ДНФ D. Число литералов, входящих в запись D, называется *рангом* ДНФ D. (В ряде работ, в частности в [6], вместо термина ранг используется термин сложность. Однако, по мнению автора, термин ранг распространен существенно шире.)

Следует отметить, что множества минимальных и кратчайших ДНФ могут не пересекаться. Впервые это было показано в [19]. Более того, число литералов в кратчайших ДНФ может существенно превышать число литералов в минимальных ДНФ; аналогично, число конъюнкций, содержащихся в минимальных ДНФ, может существенно превышать число конъюнкций, содержащихся в кратчайших ДНФ. Однако в случае, если число переменных булевой функции не превосходит 4, множества минимальных и кратчайших ДНФ любой функции имеют не пустое пересечение; при $n \geqslant 5$ множества минимальных и кратчайших ДНФ могут не пересекаться (см. [20]).

В [20] подробно исследовались меры сложности ДНФ, представляющие собой произвольные выпуклые комбинации длины и ранга. Интересный обзор результатов по минимизации ДНФ по указанным мерам сложности можно найти в [20]–[22].

В [23] было показано, что длина почти всех булевых функций имеет один порядок. Обозначим указанную величину через $\bar{l}(n)$, следуя [24].

В [25] для указанной величины была получена оценка

$$\bar{l}(n) \geqslant \frac{1}{2\log_2 n \log_2^{(2)} n} 2^n (1 + o(1))$$

при $n \longrightarrow +\infty$.

В [26] улучшена эта оценка и доказана

Теорема 1 (см. [26]). *При $n \longrightarrow \infty$ справедлива оценка*

$$\bar{l}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log_2 n \cdot \log_2^{(2)} n}\left(1 + O\left(\frac{\log_2^{(3)} n}{\log_2^{(2)} n}\right)\right).$$

Эта оценка в настоящий момент является наилучшей из известных автору.

Из работ, посвященных верхним оценкам сложности ДНФ, следует особо отметить работы [24], [27]–[30]. Верхняя оценка сложности дизъюнктивных нормальных форм почти всех булевых функций имеет вид

$$m(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqslant C(n)\frac{2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}, \tag{1}$$

где $C(n)$ – некоторая осциллирующая функция, ограниченная сверху и снизу ненулевыми константами C_0 и C_1 соответственно.

Наилучшая известная в настоящее время оценка получена в [24].

Теорема 2 (см. [24]). *Справедлива оценка*

$$\bar{l}(n) \leqslant \frac{H(n)2^n}{\log_2 n \cdot \log_2^{(2)} n}\left(1 + O\left(\frac{\log_2^{(4)} n}{\log_2^{(2)}(n)}\right)\right),$$

где

$$H(n) = 2^{\nu}\left(\frac{1}{2} + \left(\sum_{k \leqslant 0} 2^k 2^{-2^k 2^{\nu}}\right)\log 2\right)$$

и

$$\nu = \{\log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \log_2 n\}.$$

(Через $\{x\}$ в оригинальной работе обозначена дробная часть числа x; $\{x\} = x - [x]$.)

В [24] показано, что функция $H(n)$ может быть ограничена снизу величиной 1.38826... для $\nu = 0$ и величиной 1.54169... при $\nu \longrightarrow 1$.

Исторически первая оценка вида (1) приведена в [27], где $C_0 = 1.581411...$, и $C_1 = 2.621132...$ Близкий результат был получен в [30].

Более подробный обзор результатов в этом направлении заинтересованный читатель может найти в [24], [31].

Следует заметить, что ввиду экспоненциального характера зависимости полученных оценок от размерности пространства переменных функции, построение минимальных и кратчайших ДНФ для типичных булевых функций от n переменных не представляется возможным даже в задачах относительно небольшой размерности.

Обширная литература посвящена исследованию сложности дизъюнктивных нормальных форм булевых функций, принимающих значение 0 лишь в относительно небольшом числе точек. Указанная задача мотивирована, в первую очередь, практическими приложениями в задачах анализа данных и машинного обучения (см. [1], [7]).

Случай числа нулей $k = 2$ был полностью описан С.В. Яблонским, а случай $k = 3, 4$ был рассмотрен А.Ю. Коганом. Более того, в [4] было показано, что при числе нулей k таком, что $k = \log_2 n \longrightarrow -\infty$, всякая функция от n переменных, обращающаяся в 0 в точности k раз, может быть реализована с использованием не более $n(1 + o(1))$ конъюнкций.

В более общем случае при произвольном k длина ДНФ почти всех булевых функций удовлетворяет неравенству из [6]:

$$|D_f| \leqslant 4\frac{nk}{\log_2 n} - \frac{k(\log_2 k - \log_2 \log_2 n)}{\log_2 n},$$

где через $|D_f|$ обозначена длина дизъюнктивной нормальной формы функции f класса P_k^n. Напомним, что в [4] через P_k^n обозначен класс булевых функций от n переменных, имеющих ровно k нулевых точек.

В [7] указаны наиболее сильные, из числа известных автору, оценки сложности произвольных булевых функций от n переменных, содержащих в точности k различных нулей. Обозначим через $XC(n, 1, k)$ указанную сложность (см. [7]).

Теорема 3 (см. [7]). *Справедливы следующие оценки:*

а) *при* $n \geqslant 2$ *и* $k \geqslant 2$

$$XC(n, 1, k) \leqslant \frac{n-1}{2}k + 1;$$

б)

$$XC(n, 1, k) \leqslant (n - \lceil \log_2 k \rceil + 1)k.$$

Следуя работе [7], через $\lceil x \rceil$ обозначено минимальное целое число, не меньшее x.

Существенное число работ посвящено исследованию свойств специальных конфигураций, позволяющих снизить оценки сложности дизъюнктивных нормальных форм булевых функций, нулевые точки которых связаны специальными соотношениями. К их числу можно отнести [12], [32].

В [13], [15] изложен ряд эффективных подходов к построению простых дизъюнктивных нормальных форм булевых функций.

Несмотря на высокую практическую ценность указанных алгоритмов, в общем случае они не способны гарантировать достаточно низких верхних оценок на сложность дизъюнктивной нормальной формы, получаемой в результате их применения.

5. СТРУКТУРА РАБОТЫ

Рассмотрим процесс построения ДНФ функции $f \in P_k^n$. Запишем формулу редукционного разложения (см. [33])

$$D_f = \bigvee_{(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^t) \in \{0,1\}^t} x_1^{\sigma_i^1} x_2^{\sigma_i^2} \dots x_t^{\sigma_i^t} \varphi_{(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^t)}(x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_n), \tag{2}$$

при этом в (2) функция $\varphi_{(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^t)}$ обращается в ноль в точке $(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*, x_n^*)$, если и только если функция f обращается в ноль в точке $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, x_{t+1}^*, x_{t+2}^*, x_n^*)$.

С большой вероятностью, при достаточно больших значениях n и t, большая часть функций $\{\varphi_{(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^t)}\}$, составляющих разложение случайной функции $f \in P_k^n$, имеет число нулей, лишь немногим большее, чем $\frac{n}{2^t}$. Для доказательства этого факта удобно рассмотреть модель случайного, равновероятного и независимого размещения шаров по урнам (см. ниже разд. 6).

В то же время, если функция φ от n переменных имеет число нулей, несколько меньшее, чем $\log_2 n$, то число конъюнкций в ее ДНФ реализации может быть лишь немногим больше n (разд. 7, леммы 5, 6, 7).

Идея доказательства состоит в том, чтобы выделить все функции, имеющие число нулей, меньшее порогового, и реализовать их “простым” способом (разд. 8, теорема 5).

Оставшиеся функции могут быть реализованы с несколько большей сложностью (разд. 7, лемма 4). Тем не менее доля “сложных” подфункций не велика (разд. 8, теорема 5). Важно отметить, что максимальное число нулей каждой функции φ при некоторых ограничениях с большой вероятностью достаточно близко к математическому ожиданию (разд. 6, теорема 4; разд. 6, лемма 8). Указанный факт позволяет доказать, что общий вклад “сложных” подфункций в построенную ДНФ невелик (разд. 7, лемма 4; разд. 8, теорема 5).

6. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель случайного размещения n шаров по $m(n)$ урнам в случае, когда число шаров превышает число урн. Предположим, что шары размещаются в урны последовательно, равновероятно и независимо друг от друга.

Обозначим через $p = \frac{1}{m}$ вероятность того, что при случайном бросании шар попадет в заданную урну. Обозначим через $S_i = S_i(k_0; n, m)$ случайную величину, равную числу шаров в корзине с номером i, если оно не меньше, чем k_0, и ноль в противном случае. Обозначим через

$$S(k_0; n, m) = \sum_{i=1}^{m} S_i(k_0; n, m)$$

общее число шаров в корзинах, содержащих не менее, чем k_0 шаров.

Обозначим через $M(n, m)$ максимальное число шаров в одной урне.

Целью данного раздела является получение условий, при которых

$$S(k_0; n, m) := \sum_{i=1}^{n} S_i(k_0; n, m) = o(m)$$

и оценка распределения величины $M(n, m)$.

Дальнейшие рассуждения и обозначения основаны, в основном, на работе [34], в которой анализировалось распределение максимума числа шаров в корзинах. Выкладки опираются на метод первого и второго моментов.

Обозначим через $Y_i = Y_i(n, m)$ случайную величину, равную числу шаров в корзине с номером i, при равномерном и независимом распределении n шаров по m урнам.

Величина Y_i распределена по биномиальному закону с параметрами n и $1/m$, что мы будем записывать как $Y_i \sim B(n, 1/m)$; соответственно

$$\Pr[Y_i = k] := b(k; n, 1/m) := \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}.$$

Пусть $X_i = X_i(k_0; n, m)$ и $Z_i = Z_i(k_0; n, m)$ – случайные величины, определяемые равенствами

$$X(k_0; n, m) := \sum_{i=1}^{n} X_i(k_0; n, m) \quad \text{и} \quad X_i(k_0; n, m) := \begin{cases} 1, & Y_i \geqslant k_0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$Z_i(k_0; n, m) := \frac{1}{k_0} X_i(k_0; n, m) Y_i(n, m), \quad Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i = \frac{1}{k_0}\sum_{i=1}^{m} X_i Y_i.$$

Заметим, что

$$E[X_i(k_0; n, m)] = \Pr[B(n, 1/m) \geqslant k_0] \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$E[X(k_0; n, m)] = n\Pr[B(n, 1/m) \geqslant k_0].$$

Основной задачей данного раздела является поиск такого k_0, при котором справедливо соотношение

$$E[S(k_0; n, m)] = k_0 E[Z(k_0; n, m)] = o(m).$$

Пусть $\omega(k; n, p) := kb(k; n, p)$. Докажем следующую лемму о связи моментов случайных величин X_i и Z_i.

Лемма 1. *Пусть $p = p(n)$ зависит от n. Тогда для всех $h \geqslant 1$ выполнены соотношения*

а) $\Pr[B(n, p) \geqslant np + h] \leqslant \left(1 + O\left(\frac{np}{h}\right)\right) b(np + h; n, p)$;

б) $E[Z_i(np+h, n, p)] \leqslant \left(1 + O\left(\frac{np}{h}\right)\right) b(np+h; n, p)$;

в) $E[Z_i(np+h, n, p)] \leqslant \left(1 + O\left(\frac{np}{h^2}\right)\right) \Pr[B(n, p) \geqslant np+h]$.

Доказательство. Следуя работе [34], заметим, что при всех $k \geqslant np+h$ справедливо неравенство

$$\frac{b(k+1; n, p)}{b(k; n, p)} < \frac{\omega(k+1; n, p)}{\omega(k; n, p)} \leqslant \frac{(n-k)p}{k(1-p)} = \frac{((1-p)n-h)p}{(np+h)(1-p)} := \lambda.$$

Заметим, что при $h \geqslant 1$ имеем

$$\lambda = \frac{((1-p)n-h)p}{(np+h)(1-p)} \leqslant \frac{(1-p)np}{(np+h)(1-p)} < 1,$$

и, более того

$$\frac{1}{1-\lambda} \leqslant 1 + \frac{np}{h}, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda} = -1 + \frac{1}{1-\lambda} \leqslant \frac{np}{h}.$$

Оценим $\Pr[B(n, p) \geqslant np+h]$ и $E[Z_i(np+h, n, 0)]$:

$$\Pr[B(n, p) \geqslant np+h] \leqslant \sum_{k \geqslant np+h} b(k; n, p) \leqslant b(np+h; n, p) \sum_{i \geqslant 0} \lambda^i =$$

$$= \frac{b(np+h; n, p)}{1-\lambda}(np+h) E[Z_i(np+h, n, p)] \leqslant \sum_{k \geqslant np+k} \omega(k; n, p) \leqslant \omega(np+h; n, p) \sum_{i \geqslant 0} \lambda^i =$$

$$= \frac{\omega(np+h; n, p)}{1-\lambda} = \frac{np+h}{1-\lambda} b(np+h; n, p),$$

откуда следуют утверждения а) и б) леммы.

Кроме того,

$$\left| \sum_{k \geqslant np+h} b(k; n, p) - \frac{1}{np+h} \sum_{k \geqslant np+h} \omega(k; n, p) \right| \leqslant \frac{1}{np+h} b(np+h; n, p) \sum_{i=1}^{\infty} i\lambda^i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{np+h} b(np+h; n, p) \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2},$$

откуда следует утверждение в) леммы.

Лемма доказана.

Следствие 1.1. При $h^2 \gg np$ выполнено соотношение

$$E[Z_i(np+h; n, p)] = (1+o(1)) \Pr[B(n, p) \geqslant np+h].$$

В [34] были доказаны (лемма 2 из [34]) оценки, сформулированные в лемме 2.

Лемма 2. *Пусть* $p = p(n)$ *зависит от* n. *Тогда для всех* $h \geqslant 1$ *справедливо следующее.*

1. *При* $np + 1 \leqslant t \leqslant (\log n)^l$, *где* l *некоторая положительная константа, выполнено соотношение*

$$\Pr[B(n, p) \geqslant t] = \exp[t(\log np - \log t + 1) - np + O(\log^{(2)} m)];$$

2. *При*

$$t = np + o((pqn)^{2/3}) \quad \text{и} \quad x := \frac{t-np}{\sqrt{pqn}} \longrightarrow +\infty,$$

выполнено соотношение

$$\Pr[B(n, p) \geqslant t] = \exp\left[-\frac{x^2}{2} - \log x - \frac{1}{2}\log 2\pi + o(1)\right].$$

В дальнейших рассуждениях нам потребуется, в основном, вторая аппроксимация. Воспользуемся полученными равенствами для доказательства леммы 3.

Лемма 3. *Выберем функции* $\kappa(n)$ *и* $m(n)$ *следующим образом:*

$$\kappa = \frac{n}{m} + \sqrt{\frac{n(m-1)}{m^2}} \cdot x,$$

где $x(n) = \omega(1)$, $x(n) = o\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{1/3}\right)$ *при* $n \longrightarrow \infty$.

При указанном выборе κ, $n >> m$ *и* $m > 1$ *выполнено равенство*

$$E[S(\kappa; n, m)] = O\left(m \exp\left[\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right).$$

Доказательство. Пусть $p = \frac{1}{m}$, $q = 1 - p$.

Воспользуемся аппроксимацией леммы 1, пункт в) и получим

$$E[S(\kappa; n, m)] = \kappa m E[Z_i(\kappa; n, m)] \leqslant \left(1 + O\left(\frac{n}{m}\frac{1}{(\kappa - n/m)^2}\right)\right)\Pr[B(n, 1/m) \geqslant \kappa].$$

Воспользуемся аппроксимацией леммы 2, пункт б) и получим

$$E[S(\kappa; n, m)] \leqslant \kappa m\left(1 + O\left(\frac{n}{m}\frac{1}{(\kappa - n/m)^2}\right)\right)\exp\left[-\frac{x^2}{2} - \log x - \frac{1}{2}\log 2\pi + o(1)\right]\log\left(\frac{E[S(\kappa; m, n)]}{m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \log\kappa - \frac{1}{2}x^2 - \log x + \log\left(1 + O\left(\frac{n}{m(\kappa - n/m)^2}\right)\right) + O(1).$$

Рассмотрим выражение

$$d(n) := \frac{x\left(\frac{n}{m}\right)^{1/2}}{(npq)^{2/3}}.$$

Аппроксимация б) леммы 2 допустима при условии $d(n) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

Оценим величину $d^2(n)$:

$$\frac{x^2}{(npq)^{4/3}}npq = \frac{x^2}{(n(m-1)/m^2)^{1/3}} \leqslant x^2\left(\frac{m}{n}\right)^{1/3},$$

откуда следует допустимость использования аппроксимации из леммы 2б) при условии $x = x(n, m(x)) = o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{1/3}\right) = o((npq)^{1/3})$.

Оценим величину $n/(m(\kappa - n/m)^2)$:

$$\frac{n}{m(\kappa - n/m)^2} = \frac{n}{m}\frac{m^2}{n(m-1)}\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\log\left(\frac{E[S(\kappa; n, m)]}{m}\right) \leqslant \log\kappa - \frac{1}{2}x^2 - \log x + \log\left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + O(1) =$$

$$= \log\kappa - \frac{1}{2}x^2 - \log x + O(1) = \left(\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{x} + \frac{m}{n}\sqrt{\frac{n(m-1)}{m^2}}\right) + O(1),$$

$$\log\left(\frac{E[S(\kappa;\, n, m)]}{m}\right) = \left(\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2}\right) - \log x + O(1),$$

откуда получаем

$$E[S(\kappa;\, n, m)] \leqslant mO\left(\exp\left[\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right).$$

Лемма доказана.

Применением неравенства Маркова, утверждающего, что для случайной величины ξ выполнено неравенство $\Pr[\xi > a] \leqslant \frac{E(\xi)}{a}$, доказываются следующие два следствия из леммы 3.

Следствие 3.1. Пусть $\kappa = \kappa(n, m(n), x(n, m(n)))$ удовлетворяет условиям леммы 3, а δ – произвольная неотрицательная функция.

Тогда справедливо равенство

$$\Pr[S(\kappa;\, n, m) > m\delta] = O\left(\frac{1}{\delta}\exp\left[\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right).$$

Отметим, что $S(\kappa;\, n, m)$ является невозрастающей по κ функцией. В силу этого справедливо

Следствие 3.2. Пусть $\kappa = \kappa(n, m(n), g(n, m(n)))$ удовлетворяет условиям леммы 3, а δ – произвольная неотрицательная функция.

Тогда для всякого положительно $k > \kappa$ справедливо равенство

$$\Pr[S(k;\, n, m) > m\delta] = O\left(\frac{1}{\delta}\exp\left[\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right).$$

Следствие 3.3. Пусть $x \geqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{2\log n - 2\log m}$, $\varepsilon > 0$.

Тогда справедлива оценка

$$E[S(\kappa;\, n, m)] = O\left(m\exp\left[\log\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right) = O\left(\exp\left[-2\varepsilon\log\left(\frac{n}{m}\right)\right]\right) = o(m).$$

Для оценки величины $M(n, m)$ воспользуемся теоремой 1 из [34]. Обозначим через $polylog(m)$ множество функций, ограниченных сверху произвольным полиномом от логарифма m. В обозначениях, принятых в настоящей работе, теорема может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4 (см. [34]). *Положим M есть случайная величина, равная максимальному числу шаров в корзине, если n шаров распределяются в m урн независимо и равномерно.*

Тогда имеем $\Pr[M > k_\alpha] = o(1)$, *если* $\alpha > 1$ *и* $\Pr[M > k_\alpha] = 1 - o(1)$, *если* $0 < \alpha < 1$, *где*

$$k_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\log m}{\log\dfrac{m\log m}{n}}\left(1 + \alpha\dfrac{\log^{(2)}\dfrac{m\log m}{n}}{\log\dfrac{m\log m}{n}}\right), & \dfrac{m}{polylog(m)} \leqslant n \ll m\log m, \\ (d_c - 1 + \alpha)\log m, \quad n = cm\log m, \\ c - \text{некоторая константа}, \\ \dfrac{n}{m} + \alpha\sqrt{2\dfrac{n}{m}\log m}, & m\log m \ll n \leqslant mpolylog(m), \\ \dfrac{n}{m} + \sqrt{\dfrac{2n\log m}{m}\left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\log^{(2)} m}{2\log m}\right)}, & n \gg m(\log m)^3, \end{cases}$$

где d_c – подходящая постоянная, зависящая только от c.

7. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТЫХ ДНФ

Результаты предыдущего раздела будут использованы при построении простых ДНФ булевых функций с малым числом нулей. Предварительно докажем несколько лемм, являющихся ключевыми для дальнейших рассуждений.

Лемма 4. *Всякая булева функция $f \in P_k^n$ может быть реализована ДНФ, содержащей не более nk конъюнкций.*

Доказательство. Заметим, что если матрица нулей M_f функции f содержит только столбцы, состоящие целиком из нулей (единиц), то ее минимальная ДНФ содержит в точности n конъюнкций.

В противном случае, если найдется литерал x_i, соответствующий столбцу ненулевого проективного веса матрицы нулей M_f. Для данного столбца справедливо разложение

$$D_f = x_i D_{\varphi_1} \vee \bar{x}_i D_{\varphi_2}, \tag{3}$$

где функция φ_1 задается матрицей нулей, которая получается вычеркиванием из M_f всех строк, содержащих в столбце с номером i единицы и самого столбца с номером i; функция φ_2 задается матрицей нулей, которая получается вычеркиванием из M_f всех строк, содержащих в столбце с номером i нули и самого столбца с номером i.

Сумма числа нулей функций φ_1 и φ_2 равна числу нулей функции f. Если функция φ_1 (соответственно φ_2) задается матрицей нулей, состоящей только из единиц (нулей), то ее ДНФ состоит из n конъюнкций, в противном случае вычислим разложение функции φ_1 (соответственно φ_2) согласно формуле (3).

Продолжив цепочку разложений, после некоторого шага получим набор функций такой, что матрицы нулей каждой функции из набора содержат только нулевые или единичные столбцы. Так как суммарное число нулей функций равно k, то число полученных функций также не превосходит k. Учитывая, что сложность реализации каждой из них равна n, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

Следствие 4.1. Всякая булева функция $f \in P_k^n$ может быть реализована ДНФ, содержащей не более nk^2 литералов.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно заметить, что число функций, полученных при разложении по формуле (3) и имеющих в точности один ноль, не превосходит K. При этом каждый шаг разложения (3) увеличивает максимум из рангов конъюнкций, входящих в ДНФ, не более, чем на единицу.

Всего шагов разложения не более, чем $k - 1$, функции с одним нулем реализуются ДНФ, состоящими из конъюнкций ранга 1. Таким образом, максимум из рангов конъюнкций не превосходит k, общее число конъюнкций не превосходит nk, следовательно, общий ранг простейшей ДНФ реализации функции $f \in P_k^n$ не превосходит nk^2.

Лемма 5. *Рассмотрим функции $f: \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ и $g: \{0, 1\}^{n+m} \longrightarrow \{0, 1\}$, заданные матрицами нулей M_f и M_g. Если матрица M_f может быть получена из M_g путем удаления последних m столбцов матрицы M_g, то столбцы матрицы M_g, начиная со столбца с номером m по столбец с номером n, равны между собой; столбцы матриц M_g и M_f с одинаковыми номерами попарно равны между собой; то для всякой ДНФ D_f функции f существует ДНФ D_g функции g такая, что*

$$D_g = D_f \vee x_m \bar{x}_{m+1} \vee x_{m+1} \bar{x}_{m+2} \vee \ldots \vee x_n \bar{x}_m. \tag{4}$$

Доказательство. Заметим, что всякая функция D_f, полученная из ДНФ D_g функции g в соответствии с равенством (4), принимает значение 0 в точке $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ только в случае, если $y_m = y_{m+1} = \ldots = y_n$.

Кроме того, заметим, что значение функции D_f в точке $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-2}, y_{m-1}, y_m, y_m, \ldots, y_m)$ совпадает со значением функции D_g в точке $(y_1, y_2, \ldots., y_m)$.

Отметим, что функции f и g связаны теми же соотношениями, что функции D_f и D_g. Так как значения D_g и g совпадают во всех точках, то совпадают также значения D_f и f, что доказывает лемму.

Лемма 6. *Всякая булева функция $f \in P_k^n$, где число нулей k удовлетворяет неравенству $k \leqslant \log_2 n - \varepsilon(n)$, при $\varepsilon(n) > 0$ может быть реализована дизъюнктивной нормальной формой с числом конъюнкций, не превосходящим $(k-1)2^{k-1} + n$.*

Доказательство. Заметим, что в матрице нулей с k строками и n столбцами содержится не более, чем d^{k-1} различных столбцов (с точностью до инверсии).

Выделим из рассматриваемой нами матрицы нулей подматрицу, содержащую k строк и m столбцов, где m — число различных (с точностью до инверсии) столбцов матрицы нулей f, $m \leqslant 2^{k-1}$.

Применение лемм 5 и 4 завершает доказательство леммы.

Следствие 6.1. Всякая булева функция $f \in P_k^n$, где число нулей k удовлетворяет неравенству $k \leqslant \log_2 n - \varepsilon(n)$, при $\varepsilon(n) > 0$ может быть реализована дизъюнктивной нормальной формой с числом литералов, не превосходящим $2n + (k^2 - 2)2^{k-1}$.

Доказательство. Согласно леммам 4 и 5, ДНФ реализация булевой функции $f \in P_k^n$, заданной матрицей с m различными (с точностью до инверсии) столбцами, требует не более

$$k^2 m + 2(n - m) \leqslant k^2 2^{k-1} + 2(n - 2^{k-1})$$

литералов.

Лемма 7. *Пусть $f \in P_k^n$, где для числа нулей k справедливо*

$$k \leqslant \log_2 n - \varepsilon(n), \quad \varepsilon(n) \longrightarrow +\infty.$$

Тогда f может быть реализована дизъюнктивной нормальной формой с числом конъюнкций

$$n + O\left(n\frac{\log_2 n}{n^{\beta}}\right),$$

и числом литералов

$$2n + O\left(n\frac{(\log_2 n)^2}{n^{\beta}}\right) \quad \beta = \frac{3\sqrt{2\log_2 e} - 2}{2\sqrt{2\log_2 e} + 2} = 0.7270\ldots, \quad n \longrightarrow \infty.$$

При этом обе указанные оценки достигаются на одной и той же дизъюнктивной нормальной форме.

Доказательство. Заметим, что в рассматриваемой матрице не более $\dfrac{n}{2^{1+\varepsilon(n)}}$ различных столбцов (с точностью до инверсии). Таким образом, построение ДНФ функции f сводится со сложностью не более $\left(n - \dfrac{n}{2^{1+\varepsilon(n)}}\right)$ к построению ДНФ приведенной функции φ, имеющей k нулей и зависящей не более, чем от $\dfrac{n}{2^{1+\varepsilon(n)}}$ переменных.

По лемме 6, функция φ может быть реализована с использованием не более, чем

$$n + \frac{n\log_2 n}{2^{1+\varepsilon(n)}} - \frac{n}{2^{1+\varepsilon(n)}}$$

конъюнкций. Верхняя оценка для числа литералов ДНФ реализации функции f по лемме 6 имеет вид

$$2n + \frac{n(\log_2 n)^2}{2^{1+\varepsilon(n)}} - \frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}. \tag{5}$$

Однако указанный способ позволяет получить требуемую в лемме оценку только в случае, когда число различных нулей приведенной функции невелико.

Для получения эффективных в случае большой размерности приведенной функции φ, воспользуемся границей Чернова для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{t=0}^{k/2-\lambda}\binom{k}{t} \leqslant 2^k e^{-2\lambda^2/k}.$$

Для того, чтобы в матрице нулей функции φ присутствовал хотя бы один столбец проективного веса не меньше $\frac{\log_2 n - \varepsilon(n)}{2} - \lambda$, необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{n}{2^{1+\varepsilon(n)}} \geqslant 2^k e^{-2\lambda^2/k},$$

что эквивалентно неравенству $-2\lambda^2 \leqslant k\log\left(\frac{t2^{\varepsilon(n)}}{n}\right)$, откуда имеем $\lambda \geqslant \lambda \triangleq \sqrt{\frac{k}{2}\cdot\log\left(\frac{n}{t2^{\varepsilon(n)}}\right)}$.

При указанном выше ограничении на λ выделим столбец матрицы нулей функции φ, обладающий проективным весом не менее $k/2-\lambda$. Сделаем шаг редукционного алгоритма по переменной, связанной с указанным столбцом:

$$D_\varphi = x_i D_{\varphi_1} \vee \bar{x}_i D_{\varphi_2}.$$

В каждой из указанных функций имеется не более, чем $2^{k/2+\lambda}$ различных столбцов. Таким образом, число конъюнкций, достаточных для реализации функций φ_1 и φ_2, не превосходит

$$\begin{gathered}|D_f| \leqslant 2(\log_2 n\cdot 2^{k/2+\lambda}) + \left(n-\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}\right) = \left(n-\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}\right) + \log_2 n\sqrt{\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}}\cdot 2^{\sqrt{\frac{\log_2 n-\varepsilon(n)}{2}\cdot\log\left(\frac{n}{t2^{\varepsilon(n)}}\right)}} < \\ < \left(n-\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}\right) + \log_2 n\sqrt{\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}}\cdot 2^{\frac{\log_2 n-\varepsilon(n)/2}{\sqrt{2\log_2 e}}} = \left(n-\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}\right) + \log_2 n\sqrt{\frac{n}{2^{\varepsilon(n)}}}\left(\frac{n}{2^{\varepsilon(n)/2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2\log_2 e}}} < \\ < n + \log_2 n\left(\frac{n}{2^{\varepsilon(n)/2}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\log_2 e}}}.\end{gathered} \tag{6}$$

С использованием данного приема можно получить оценку минимального числа литералов, достаточного для реализации f:

$$\operatorname{rank}(f) \leqslant 2n + (\log_2 n)^2\left(\frac{n}{2^{\varepsilon(n)/2}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\log_2 e}}}.$$

Введем обозначение

$$\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\log_2 e}}.$$

Для получения оптимальных по порядку оценок, достаточно потребовать совпадения порядков вторых членов в разложениях (5) и (6), т.е.

$$\frac{n\log_2 n}{2^{\varepsilon(n)}} = O\left(\log_2 n\left(\frac{n}{2^{\varepsilon(n)/2}}\right)^{\alpha}\right),$$

что эквивалентно $n^{1-\alpha} = O(2^{\varepsilon(n)(1-\alpha/2)})$, откуда значение $\varepsilon(n)$, при котором величина $\left(\frac{n}{2^{\varepsilon(n)/2}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\log_2 e}}}$ достигает оптимального значения, равно $\varepsilon(n) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha/2}\log_2 n$.

Обозначим через β величину

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha/2} = \frac{3\sqrt{2\log_2 e}-2}{2\sqrt{2\log_2 e}+2}.$$

Итоговая длина ДНФ реализации функции f, имеющей не более $\log_2 n - \varepsilon(n)$ нулей, не превышает

$$n + O\left(\frac{n\log_2 n}{n^{\beta}}\right),$$

а число содержащихся в ней литералов ограничено величиной

$$2n + O\left(\frac{n(\log_2 n)^2}{n^{\beta}}\right).$$

Заметим, что $0 < \beta < 1$, откуда сложность результирующей ДНФ имеет оценку $n(1 + o(1))$.

Точные вычисления дают $\alpha = 0.3288\ldots$ и $\beta = 0.7270\ldots$

Указанный результат уточняет результат работы [4]. Ряд результатов по соотношению типичных и экстремальных характеристик сложности ДНФ булевых функций были получены в [11].

Следствие 7.1. Пусть $f \in P_k^n$, где для числа нулей k справедлива оценка

$$k \leqslant \log_2 n - \varepsilon(n), \quad \varepsilon(n) \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Тогда f может быть реализована дизъюнктивной нормальной формой с числом конъюнкций $n(1 + o(1))$ и числом литералов $2n(1 + o(1))$ при $n \longrightarrow \infty$.

Лемма 8. *Пусть $k(n)$, $m(n)$ — функции от переменной n, принимающие неотрицательные значения. Пусть, кроме того, указанные функции связаны неравенствами*

$$\log n/2 \leqslant k \leqslant 2^n \quad \text{и} \quad \frac{2k}{\log n} \geqslant m \geqslant \frac{k}{\log n}.$$

Тогда, при условии случайного, равновероятного и независимого размещения $k(n)$ шаров по $m(n)$ урнам имеем

а) *если $\exists C > 0 : k = O(n^C)$, то максимальное число шаров M в одной урне не превосходит $O\left(\frac{k}{m}\right)$ с вероятностью $1 - o(1)$;*

б) *если $\forall C > 0 : k = \omega(n^C)$, то максимальное число шаров M в одной урне не превосходит $O\left(\frac{k}{m}\right)$ с вероятностью $o(1)$.*

Доказательство. Пусть $k = \Theta(n^C)$ для некоторого $C > 0$. В этом случае $m = \Theta\left(\frac{n^C}{\log n}\right)$, откуда имеем $k = \Theta(m\log m)$ и по теореме 4 (случай 2), получаем $M = O\left(\frac{k}{m}\right)$ с вероятностью $1 - o(1)$ для случайной функции из класса P_k^n.

Пусть $k = o(n^C)$ для всякого $C > 0$. В этом случае $\frac{\log k}{\log n} \longrightarrow 0$, следовательно, $m\log m = k\frac{\log m}{\log n} \ll k$ и по теореме 4 (случаи 3, 4), имеем $M = \frac{k}{m}(1 + o(1))$ с вероятностью $1 - o(1)$ для случайной функции из класса P_k^n.

Пусть $k = \omega(n^C)$ для всякого $C > 0$. В этом случае $\frac{\log k}{\log n} \longrightarrow +\infty$, следовательно, $m\log m = \frac{\log m}{\log n} >> k$ и по теореме 4 (случай 1) получаем

$$\frac{m}{k}M = \frac{m}{k}\frac{\log m}{\log\frac{m\log m}{k}}(1+o(1)) = \omega(1),$$

с вероятностью $1 - o(1)$ для случайной функции из класса P_k^n.

Лемма доказана.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В леммах 5, 6, 7 указаны конструкции, позволяющие строить асимптотически наиболее простые дизъюнктивные нормальные формы для всех функций, имеющих не более чем $\log_2 n - \varepsilon(n)$ нулей при условии $\varepsilon(n) \longrightarrow +\infty$, $n \longrightarrow +\infty$.

Для произвольных булевых функций предложены методы, позволяющие строить ДНФ полиномиально ограниченного размера по числу переменных и нулей функции. А именно, в лемме 4 указан способ, позволяющий построить ДНФ с числом конъюнкций, не превосходящим nk, и числом литералов, не превосходящим nk^2.

Указанные результаты будут существенным образом использованы при доказательстве теоремы 5 (см. ниже). Указанный результат в несколько иной форме анонсирован в [35].

Теорема 5. *Рассмотрим множество булевых функций класса от n переменных, имеющих в точности k различных нулей. Указанные функции формируют класс* $P_{k(n)}^n$. *Тогда для почти всех функций класса* $P_{k(n)}^n$ *при* $n \longrightarrow \infty$ *выполнена оценка*

$$|D_f| \leqslant n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}(1+o(1)),$$

где через $]x[$ *обозначено минимальное целое число, не меньшее x. При этом вероятность того, что для случайной функции класса* $P_{k(n)}^n$ *указанная граница нарушена, не превосходит* $1 - o(1)$.

Кроме того, если $\exists C > 0$, *для которого* $k = O(n^C)$, *то справедлива следующая оценка ранга ДНФ почти всех функций*:

$$\operatorname{rank}(D_f) \leqslant \left(2 + \left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[\right) n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}(1+o(1)).$$

При этом вероятность того, что для случайной функции класса $P_{k(n)}^n$ *указанная граница нарушена, не превосходит* $1 - o(1)$.

Доказательство. Определим величину $k_0 = k_0(n)$ равенством

$$k_0 = \log_2 n - \sqrt{\log_2 n}\,x(\log n),$$

при этом $x(n) = \omega(1)$, $x = o(n^{1/3})$ при $n \longrightarrow \infty$.

Обозначим через $\varphi(n) = \varphi(n, x(n))$ величину $n + \sqrt{n}x(n)$; а через $\varepsilon(n)$ величину $\varepsilon(n, x(n)) := := x(n)^2/2$.

Отметим, что все определенные выше функции положительны на множестве неотрицательных чисел и неограниченно возрастают.

Алгоритм построения ДНФ произвольной булевой функции $f \in P_k^n$ выглядит следующим образом:

1) выбираем первые $t = \left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[$ столбцов матрицы нулей M функции f;

2) рассматриваем разложение

$$D_f = \bigvee_{(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)} x_1^{\alpha_1^i} x_2^{\alpha_2^i} \ldots x_n^{\alpha_n^i} D_{f(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_t^i; x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_n)},$$

где дизъюнкция берется по всем подстрокам $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$ матрицы $M_{[k]}^{[t]}$;

3) выделяем все те функции $f(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_t^i; x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_n)$, число нулей которых не больше, чем $\varphi(k_0)$. Для них строим ДНФ длины не более $n(1 + o(1))$.

Такое построение возможно по лемме 7 при условии $\log_2 n - \varphi(k_0) \longrightarrow +\infty$. Указанное построение можно провести одним из алгоритмов, предложенным в [4], [12], [13];

4) для оставшихся функций $\{f_j\}$ строим ДНФ длины nk_j и ранга nk_j^2, где $k_j > \varphi(k_0)$ – число нулей функции f_j. Такое построение возможно по лемме 4.

Для более эффективного построения следует воспользоваться алгоритмами из [13];

5) итоговая ДНФ для почти всех функций класса $P_{k(n)}^n$ имеет длину $n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}(1 + o(1))$ и ранг $n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}\left(\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[+ 2\right)(1 + o(1))$.

Докажем корректность полученных оценок.

Анализ шага 3.

Воспользуемся леммой 3. Оценим величину $\varphi(k_0) = k_0 + (k_0)^{1/2}x$. В силу монотонности x по n получаем

$$\varphi(k_0) = \log_2 n - \sqrt{\log_2 n}x + \sqrt{\log_2 n - \sqrt{\log_2 n}x}x,$$

$$\varphi(k_0) \leqslant \log_2 n - \frac{\sqrt{\log_2 n}x}{\sqrt{\log_2 n} + \sqrt{\log_2 n - \sqrt{\log_2 n}x}}x \leqslant \varphi(k_0) \leqslant \log_2 n - \frac{x^2}{2}.$$

Откуда имеем $\varphi(k_0) \leqslant \log_2 n - \frac{x^2}{2}$. Так как $\varepsilon(\log_2 n) = \frac{x^2}{2} \longrightarrow +\infty$, то построения, производимые на шаге 3, корректны.

Анализ шага 4.

В условиях леммы 3 число 2^t является числом корзин (среди которых, возможно, есть пустые), k является числом шаров.

Рассмотрим корзины, содержащие больше, чем $\log_2 n - \varepsilon(\log_2 n)$ шаров. Обозначим через $p_0(\delta)$ вероятность того, что суммарное число шаров в этих корзинах превосходит $2^t\delta$. Указанная функция оценивается сверху величиной

$$O\left(\frac{1}{\delta}\exp\left[\log\left(\frac{k}{2^{]k/(\log_2 n - \varepsilon(\log_2 n))[}}\right) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right) = O\left(\frac{1}{\delta}\exp\left[\log(\log_2 n) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right),$$

согласно лемме 3. При этом по условию леммы 3 для величины x выполнено условие $x = o((\log n)^{1/6})$. Следовательно, для того чтобы указанная оценка для $p_0(\delta)$ стремилась к нулю, необходимо, чтобы выполнялась оценка

$$\delta \leqslant \delta_0 \overset{\Delta}{=} \exp[(\log n)^{1/3}/(2(\log 2)^2)] = o(n^\eta)$$

для всякого значения $\eta > 0$.

Таким образом, для почти всех функций класса $P^n_{k(n)}$ суммарное число нулей функций, получаемых на шаге 4, не превосходит $O\left(\frac{k}{\log_2 n}\delta\right)$ с вероятностью $1 - p_0(\delta) = 1 - o(1)$.

Следовательно, суммарное число конъюнкций, необходимых для реализации всех функций, полученных на шаге 4 алгоритма, не превосходит $O\left(\frac{nk}{\log_2 n}\delta\right)$ с вероятностью $1 - p_0(\delta) = 1 - o(1)$.

Оценка длины построенной ДНФ.

Число конъюнкций в ДНФ реализации почти всех функций класса $P_k^{(n)}(n)$ не превосходит

$$n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[} + O\left(\frac{nk}{n^{\beta}}\right) + O\left(\frac{nk}{\log_2 n}\delta\right) = n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[} + O\left(\frac{nk}{\log_2 n}\delta\right) \tag{7}$$

с вероятностью

$$1 - p_0(\delta) = 1 - O\left(\frac{1}{\delta}\exp\left[\log(\log n) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right),$$

где β вычислено в лемме 7 и равно 0.7270...; $x = o\left(\left(\frac{k}{\log_2 n}\right)^{1/3}\right)$.

Оценка минимальной длины построенной ДНФ имеет вид

$$n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[} + nk(\log_2 n)^{\log e - 1}\exp\left[-\frac{1}{2}(\log n)^{1/3} \cdot o(1)\right] =$$

$$= n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[} + nk\exp[-(\log n)^{1/3} \cdot o(1)]$$

и выполняется с вероятностью $1 - o(1)$ для случайной функции класса $P^n_{k(n)}$.

Для корректной оценки ранга построенной ДНФ заметим, что

$$\sum_j nk_j^2 \leqslant n\sum_j k_j \max_j k_j.$$

По лемме 8, если $k = O(n^C)$ для некоторой положительной постоянной C, то выполнена оценка

$$\max_j k_j = O\left(k/2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}\right) = O(\log_2 n)$$

с вероятностью $1 - o(1)$.

Откуда получаем верхнюю оценку суммарного ранга ДНФ функций, полученных на шаге 4, в виде

$$r_1 = O\left(n\frac{k}{\log_2 n}\log_2 n\delta\right) = O(nk\delta),$$

которая выполнена с вероятностью

$$O\left(\frac{1}{\delta}\exp\left[\log(\log_2 n) - \frac{x^2}{2} - \log x\right]\right) = o(1).$$

По лемме 7, ранг ДНФ, получаемых на шаге 3 настоящего алгоритма, оценивается сверху величиной

$$r_2 = n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}\left(\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[+ 2\right) + O\left(\frac{nk(\log_2 n)}{n^{\beta}}(\log_2 k - \log_2\log_2 n + 1)\right).$$

Агрегируя полученные оценки, имеем общую оценку для ранга ДНФ в следующем виде:

$$\begin{gathered} r_1 + r_2 = n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}\left(\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[+ 2\right) \times \\ \times\left(1 + O\left(\frac{(\log n)^2}{n^{\beta}}\right) + \frac{\log_2 n}{\log_2 k - \log_2\log_2 n + 1}\exp[-(\log n)^{1/3} \cdot o(1)]\right), \end{gathered} \tag{8}$$

при этом для случайной функции $f \in P_k^n$ оценка (8) справедлива с вероятностью $1 - o(1)$.

Теорема доказана.

Следствие 5.1. Выберем $k_\alpha = \log_2 n - (\log_2 n)^\alpha$, где $0.5 < \alpha < 1$.

Пусть $k = k(n) > \log_2 n - (\log_2 n)^\alpha$. Тогда для почти всех функций класса $P_{k(n)}^n$ при $n \longrightarrow \infty$ выполнено неравенство

$$|D_f| \leqslant n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_\alpha}\right)\right[}(1 + o(1)) \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(1 + o(1)).$$

Следствие 5.2. Выберем $k_\alpha = \log_2 n - (\log_2 n)^\alpha$, где $0.5 < \alpha < 1$.

Пусть $k = k(n) > \log_2 n - (\log_2 n)^\alpha$. Тогда для почти всех функций класса $P_{k(n)}^n$ при $n \longrightarrow \infty$ выполнено неравенство

$$\operatorname{rank}(D_f) \leqslant n\left(2 + \left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[\right) \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_\alpha}\right)\right[}(1 + o(1)) \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(\log_2 k - \log_2^{(2)} n + 3)(1 + o(1)).$$

Рассмотрим класс $P_{k(n)}^n$. Выбором $x(n)$ можно управлять константами в оценках сложности типичных функций класса $P_{k(n)}^n$ дизъюнктивными нормальными формами, получаемыми в результате работы алгоритма, описанного в теореме. Следующие примеры иллюстрируют это свойство.

Пример 1. Рассмотрим класс $P_k^n \equiv P_{n^t}^n$, $t > 0$, выберем $x(n) = n^{0.1}$. Теорема 5 утверждает, что для почти всех функций из $P_{n^t}^n$ при $n \longrightarrow \infty$, выполнено неравенство

$$|D_f| \leqslant n(1 + o(1)) \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_\alpha}\right)\right[} = n(1 + o(1)) \cdot 2^{]t\log_2 n - \log_2(\log_2 n - (\log_2 n)^{0.6})[} \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(1 + o(1)).$$

Получим оценку ранга:

$$\operatorname{rank}(D_f) \leqslant n \cdot 2^{\left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[}\left(2 + \left]\log_2\left(\frac{k}{k_0}\right)\right[+ O\left(\frac{(\log_2 n)^3}{n^{\beta}}\right)\right) \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(3 + \log_2 k - \log_2^{(2)} n)(1 + o(1)).$$

Пример 2. Рассмотрим класс P_k^n, $k = t]\log_2 n - (\log_2 n)^{0.7}[$, где t – некоторое натуральное число. Выберем $x(n) = n^{0.1}$.

Теорема 5 утверждает, что для почти всех функций из класса $P^n_{t\,\cdot\,]\log_2 n - (\log_2 n)^{0.7}[}$ при $n \longrightarrow \infty$ выполнено неравенство

$$|D_f| \leqslant n \cdot 2^{]\log_2(t\,\cdot\,]\log_2 n - (\log_2 n)^{0.7}[) - \log_2(\log_2 n - (\log_2 n)^{0.6})[}(1 + o(1)) = \frac{nk}{\log_2 n}(1 + o(1)).$$

Получим оценку ранга:

$$\mathrm{rank}(D_f) \leqslant \frac{nk}{\log_2 n}(2 + \log_2 k - \log_2^{(2)} n)(1 + o(1)).$$

Рассмотрим класс $P^n_k \equiv P^n_{k(n)}$. Выбором $x(n)$ можно управлять вероятностью реализации случайной функции с малым числом нулей либо на шаге 3 алгоритма, либо на шаге 4; таким образом можно варьировать скорость сходимости и величину остаточного члена.

Пример 3. Пусть $k = 2^{n/p}$, где p – достаточно слабо растущая функция или константа.

Рассмотрим оценку ранга дизъюнктивных нормальных форм, в соответствии с предложенным алгоритмом имеем

$$\mathrm{rank}(D_f) \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(3 + \log_2 k - \log_2^{(2)} n)\left(1 + O\left(\frac{(\log n)^2}{n^\beta}\right) + \frac{p}{n}e^{-(\log n)^{1/3}\cdot o(1)}\right) =$$

$$= 2\frac{nk}{\log_2 n}(3 + \log_2 k - \log_2^{(2)} n)\left(1 + O\left(\frac{(\log n)^2}{n^\beta}\right)\right).$$

Пример 4. Пусть $k = (\log n)^p$, где p – достаточно слабо растущая функция или константа.

Рассмотрим оценку ранга дизъюнктивных нормальных форм; в соответствии с предложенным алгоритмом имеем

$$\mathrm{rank}(D_f) \leqslant 2\frac{nk}{\log_2 n}(3 + \log_2 k - \log_2^{(2)} n)\left(1 + O\left(\frac{(\log n)^2}{n^\beta}\right) + e^{-(\log n)^{1/3}\cdot o(1)}\right) =$$

$$= 2\frac{nk}{\log_2 n}(3 + \log_2 k - \log_2^{(2)} n)(1 + e^{-(\log n)^{1/3}\cdot o(1)}).$$

9. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ

Рассмотрим приложения методов построения простых ДНФ в задачах анализа данных, решаемых комбинаторно-логическими методами и методами вероятно-корректного обучения (PAC learning).

В [1] рассматривается классическая задача классификации объектов, заданных своими бинарными признаковыми описаниями, на 2 класса. Задано множество эталонных объектов конечного размера, для которых метки классов известны. Требуется указать метки классов на тестовой выборке.

В [36]–[38] предлагается описывать каждый класс совокупностью простейших отделителей – конъюнкций, которые обращаются в ноль на объектах других классов и в единицу на (некоторых) объектах самого класса.

Как правило, описания классов строятся следующим способом. Сначала строится ДНФ, обращающаяся в ноль на всех объектах "чужого" класса, затем из нее вычеркиваются конъюнкции, не обращающиеся в ноль ни на одном объекте "своего" класса. Далее, на основе полученных описаний, решается вопрос о принадлежности нового объекта классам.

Модель алгоритмов вычисления оценок (АВО), предложенная в [1], по существу является обобщением предлагаемого метода. В модели АВО, при решении задач классификации с бинарными данными, множества литералов конъюнкций определяют систему опорных множеств признаков, по которым оценивается близость рассматриваемых объектов. Отметим, что для модели АВО получены удовлетворительные оценки обобщающей способности (см. [39]), что позволяет получать достаточно высокие оценки точности классификации контрольной выборки.

Модель вероятностно почти корректного обучения, разработанная в [3], является одним из основных объектов теоретических исследований в области анализа данных.

В теории вероятностно почти корректного обучения обучаемый алгоритм получает случайный набор примеров в соответствии с определенным распределением вероятностей и должен выбрать некоторую функцию (гипотезу) f из определенного класса функций $\mathcal{F}$.

Цель обучаемого алгоритма состоит в том, чтобы с высокой вероятностью выбранная функция была, в некотором смысле, близка к истинной гипотезе. Обучаемый должен быть эффективным (т.е. использовать в процессе работы приемлемое количество вычислительных ресурсов).

Одним из ключевых вопросов вероятностно почти корректного обучения является вопрос о возможности обучения дизъюнктивной нормальной формы за полиномиальное время (см. [3]).

В [7], [40], [41] указано, что вопрос сложности обучения ДНФ тесно связан со сложностью некоторого преобразования ДНФ. Указанное преобразование для функции f состоит в следующем. Пусть функция f реализуется ДНФ D_f, а функция χ принимает значение 0 лишь в небольшом числе точек булева куба. Вопрос состоит в получении границы сложности для ДНФ функции $f \wedge \chi$. Верхняя оценка числа конъюнкций в ДНФ функции $f \wedge \chi$ есть произведение числа конъюнкций ДНФ функций f и χ.

Результат настоящей работы можно рассматривать как попытку оценить указанную величину для типичных конфигураций нулей функции χ.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был рассмотрен метод разложения булевой функции по части переменных, успешно применяющийся при синтезе функциональных схем (см. [33]).

Доказано, что, основываясь на данном подходе, можно эффективно сводить задачу реализации булевой функции к реализации последовательности функций с меньшим числом нулей.

Показано, что при определенных ограничениях на число нулей булевых функций приведенные в работе алгоритмы позволяют получать наилучшие из известных оценки на минимальное число конъюнкций и минимальное число литералов в ДНФ реализации типичных булевых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. 1978. В. 33. С. 5–68.
2. *Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В.* "Распознавание". Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: Фазис, 2006.
3. *Valiant L.G.* A theory of learnable // Communications of ACM. 1984. V. 27. № 11. P. 1134–1142.
4. *Журавлев Ю.И., Коган А.Ю.* Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 795–799.
5. *Журавлёв Ю.И., Коган А.Ю.* Алгоритм построения дизъюнктивной нормальной формы, эквивалентной произведению левых частей булевых уравнений нельсоновского типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 8. С. 1243–1249.
6. *Коган А.Ю.* О дизъюнктивных нормальных формах булевых функций с малым числом нулей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 6. С. 924–931.
7. *Mubayi D., Turan G., Zhao Y.* The DNF exception problem // Theoret. Comput. Sci. V. 352. Iss. 1–3. 2006. P. 85–96.
8. *Umans C.* The minimum equivalent DNF problem and shortest implicants // 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 1998. P. 556–563.
9. *Umans C.* Hardness of approximating Σ_2^p minimization problems // 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 1999. P. 465–475.
10. *Feldman V.* Hardness of approximate two-level logic minimization and PAC learning with membership queries // J. Comput. System. Sci. 2009. V. 75. Iss. 1. P. 13–26.
11. *Максимов Ю.В.* Сравнительный анализ сложности булевых функций с малым числом нулей // Докл. АН. 2012. Т. 447. № 6. С. 607–609.
12. *Дьяконов А.Г.* Реализация одного класса булевых функций с малым числом нулей тупиковыми дизъюнктивными нормальными формами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 5. С. 828–835.

13. *Дьяконов А.Г.* Тестовый подход к реализации дизъюнктивными нормальными формами булевых функций с малым числом нулей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 6. С. 924–928.

14. *Дьяконов А.Г.* Построение дизъюнктивных нормальных форм в логических алгоритмах распознавания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1899–1907.

15. *Дьяконов А.Г.* Построение ДНФ последовательным перемножением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 10. С. 1589–1600.

16. *Юдаев П.В.* Сравнение двух алгоритмов упрощения дизъюнктивных нормальных форм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 26. № 10. С. 1552–1558.

17. *Romanov M.Yu.* Efficient construction of DNF for some boolean functions with a small number of zeros // Pat. Recogn. Image Analys. 2011. V. 21. № 4. P. 649–651.

18. *Romanov M.Yu.* Maximal faces of Boolean functions with a small number of zeroes // Pat. Recogn. Image Analys. 2010. V. 20. № 4. P. 474–478.

19. *Журавлев Ю.И.* О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм // Сиб. матем. журнал. 1960. Т. 1. № 4. С. 609–610.

20. *Лин Сян-Лян.* О сравнении сложности минимальных и кратчайших дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Пробл. кибернетики. 1967. Т. 18. С. 11–44.

21. *Сапоженко А.А., Чухров И.П.* Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Матем. Стат. Теор. Кибернет. ВИНИТИ. 1987. Т. 25. С. 68–116.

22. *Вебер К.* О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм // Пробл. кибернетики. 1979. В. 36. С. 129–158.

23. *Нигматуллин Р.Г.* Вариационный принцип в алгебре логики // Дискретный анализ. 1967. № 10. С. 69–89.

24. *Pippenger N.* The shortes disjunctive normal form of a random Boolean function // Random Struct. Algorithms. 2003. V. 22. № 2. P. 161–186.

25. *Глаголев В.В.* Оценка сложности сокращенной дизъюнктивной нормальной формы для почти всех функций алгебры логики // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 4. С. 770–773.

26. *Кузнецов С.Е.* О нижней оценке длины кратчайшей д.н.ф. почти всех булевых функций // Вероятностные методы и кибернетика. 1983. № 19. С. 44–47.

27. *Коршунов А.Д.* Верхняя оценка сложности кратчайших д.н.ф. почти всех булевых функций // Кибернетика. 1969. № 6. С. 1–8.

28. *Коршунов А.Д.* О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм булевых функций // Методы дискретного анализа. 1981. Т. 37. С. 9–41.

29. *Коршунов А.Д.* О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм случайных булевых функций // Методы дискретного анализа. 1983. Т. 40. С. 25–83.

30. *Андреев А.Е.* О синтезе дизъюнктивных нормальных форм близких к минимальным // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 1. С. 11–15.

31. *Коршунов А.Д.* Сложность вычислений булевых функций // Успехи матем. наук. 2009. Т. 67. В. 1. С. 97–168.

32. *Нурлынбаев А.Н.* Об упрощении булевых функций с множеством нулей специального вида // Дискретная матем. 1991. Т. 3. В. 1. С. 88–97.

33. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ. 1984.

34. *Raab M., Steger A.* Balls into bins – a simple and tight analysis // Lect. Notes In Comput. Sci. 1998. V. 1518. P. 159–170.

35. *Максимов Ю.В.* Простые дизъюнктивные нормальные формы булевых функций с ограниченным числом нулей // Докл. АН. 2012. Т. 445. № 2. С. 143–145.

36. *Журавлев Ю.И.* Об алгоритмах распознавания с представительными наборами (о логических алгоритмах) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 9. С. 1425–1435.

37. *Дюкова Е.В., Журавлёв Ю.И.* Дискретный анализ признаковых описаний в задачах распознавания большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1264–1278.

38. *Дюкова Е.В., Журавлёв Ю.И., Рудаков К.В.* Об алгебро-логическом синтезе корректных процедур распознавания на базе элементарных алгоритмов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 8. С. 215–223.

39. *Матросов В.Л.* Корректные алгебры ограниченной емкости над множеством алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 5. С. 1276–1291.

40. *Board R., Pitt L.* On the necessity of Occam algorithms // Theoret. Comput. Sci. 1992. V. 100. P. 157–184.

41. *Li M., Tromp J., Vitnyi P.* Sharpening Occam's razor // Inf. Proc. Lett. 2003. V. 85. P. 267–274.