

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

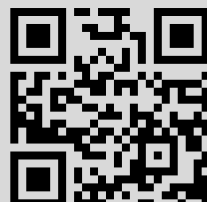
М. С. Белоцерковская, А. М. Опарин, Б. Н. Четверушкин,
Использование вложенных сеток для моделирования процесса
фильтрации, *Матем. моделирование*, 2004, том 16, номер 12, 3–
10

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

26 января 2025 г., 01:49:57



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЛОЖЕННЫХ СЕТОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ

© М.С.Белоцерковская¹, А.М.Опарин², Б.Н.Четверушкин³

¹ Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
119992, ГСП-2, Москва, Воробьевы горы, II учебный корпус, факультет ВМК
E-mail: marina@icad.org.ru

² Институт Автоматизации Проектирования РАН
123056, Москва, 2^{ая} Брестская ул., 19/18, E-mail: a.oparin@icad.org.ru

³ Институт Математического Моделирования РАН
125047, Москва, Миусская Пл., 4а, E-mail: chetver@imamod.ru

Работа посвящена дальнейшему исследованию возможностей численного моделирования процесса фильтрации с помощью модели, основанной на привлечении дополнительных регуляризирующих членов. Появление этих членов в уравнении неразрывности связано с отсутствием необходимости цельного описания процесса фильтрации на расстояниях, меньших характерного масштаба (порядка 100 зёрен породы). Рассматривается применение модели для расчёта задачи в пространственно-двумерной постановке. Особое внимание уделяется возможности использования вложенных сеток при моделировании процесса фильтрации.

APPLICATION OF THE NESTED GRIDS FOR MODELING OF A FILTRATION PROCESS

*M.S.Belotserkovskaya*¹, *A.M.Oparin*², *B.N.Chetverushkin*³

¹ Lomonosov Moscow State University
119992, GSP-2, Moscow, Vorob'evy gory, 2-nd training building, CMC, marina@icad.org.ru

² Institute for Computer Aided Design RAS
123056, Moscow, 2nd Brestskaya str., 19/18, E-mail: a.oparin@icad.org.ru

³ Institute for Mathematical Modeling RAS
125047, Moscow, Miusskaya Sq., 4a, E-mail: chetver@imamod.ru

Work is devoted to the further research of opportunities of numerical modeling of a filtration process with the help of the model based on attraction of additional regularizational members. Occurrence of these members in the equation of continuity is connected with absence of necessity of the integral description of a filtration process on distances smaller characteristic scale (about 100 grains of breed). Application of model is considered for calculation of a problem in space two-dimensional statement. The special attention is given an opportunity of application of the nested grids for modeling of a filtration process.

1. Введение

Особое внимание в данной работе уделяется возможности использования вложенных сеток при моделировании процесса фильтрации [1–4]. Она является естественным продолжением исследований, приведенных в работе [5], в которой рассматривалась модель фильтрации с дополнительным членом в правой части уравнения неразрывности, гарантирующим сглаживание решения на расстояниях меньше характерного масштаба l (порядка сотен зерен породы).

Напомним, что новая модель включает в себя уравнение Дарси

$$ku = -\nabla P, \quad (1)$$

где \mathbf{u} – скорость фильтрации, P – давление, k – проницаемость, т.е. проводимость пористой среды по отношению к данной жидкости.

Видоизмененное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \operatorname{div} \frac{lc}{2} \operatorname{grad} \rho, \quad (2)$$

где l – упомянутый выше характерный масштаб, c – характерная скорость. В правой части уравнения неразрывности стоит так называемый «регуляризатор» или диссипативный член.

Модель также включает в себя уравнение состояния

$$\rho = \rho^0 \left[1 + \beta_f (P - P^0) \right], \quad (3)$$

где β_f – коэффициент сжимаемости жидкости, ρ^0 и P^0 – плотность и давление фильтрующей среды в нормальных условиях. Наконец, модель включает в себя соответствующие конкретной задаче граничные условия и начальные данные.

Введение дополнительного члена в уравнение (2) связано с тем, что при рассмотрении процесса фильтрации не имеет смысла исследовать течение флюида на расстояниях, меньших l^1 . Отметим, что способ построения регуляризирующих членов во многом аналогичен алгоритму построения кинетически-согласованных схем [4].

В настоящей работе проводится дальнейшая апробация данной модели фильтрации на примере пространственно-двумерной задачи. Особое внимание уделяется алгоритмам, допускающим простую параллельную реализацию на многопроцессорных вычислительных системах [8]. Для аппроксимации уравнений системы (1)–(3) используются симметричные центральные разности [9]. Также используются прямоугольные вложенные сетки, которые допускают возможность эффективного сгущения узлов в области больших градиентов решения.

Одной из проблем вложенных сеток, разновидностью метода декомпозиции областей (Domain Decomposition) [10], является проблема сшивки решения на границах подобластей с разномасштабными шагами сеток. В работе проводится исследование различных методов интерполяции при сшивке решения в соседних подобластях.

2. Постановка задачи и разностная схема

Рассмотрим в качестве теста двумерный вариант (рис.1). Возьмем случай почти радиального фильтрационного течения – жидкость притекает к гидродинамически совершенной добывающей скважине [5]. Задача рассматривается в декартовых координатах (x, y) . Скважина S с координатами (x_s, y_s) расположена в центре прямоугольной области $D = [0, x_{end}] \times [0, y_{end}]$ и размазана по одной ячейке равномерной сетки, а контур питания (КП) находится на границе G области D .

Начальные условия в момент времени $t = 0$ следующие: на контуре питания задается давление $P_G = P_k = 10^7$, а вблизи скважины и внутри контура питания – $P_{D/G} = P_c = 10^6$. Скорость в начальный момент по всей области D задана равной 0. В качестве граничных условий на забое скважины и на контуре питания задаются постоянные давление и плотность, например, $P_G = P_k$, $P_S = P_c$.

¹ Следует обратить внимание на тот факт, что ранее в [2] было показано, что классический закон Дарси $\mathbf{u} = -k \nabla P$, может быть получен путем осреднения уравнения движения при условии малости конвективных членов по сравнению с вязкими членами на расстояниях порядка сотен зерен породы. Чтобы преодолеть это противоречие, уравнение неразрывности видоизменяется с учетом характерного масштаба осреднения l [5–7]

Необходимо найти установившиеся параметры течения внутри области интегрирования. Для этого введем равномерную по осям x и y сетку:

$$x_k = k\Delta x, \quad k = 0, \dots, K; \quad \Delta x = \frac{x_{end}}{K},$$

$$y_l = l\Delta y, \quad l = 0, \dots, L; \quad \Delta y = \frac{y_{end}}{L}.$$

Значения переменных ρ , P , u , v заданы в узлах. Например, обозначение ρ_{kl}^n – относится к узлу сетки с координатами (x_k, y_l) в момент времени t^n .

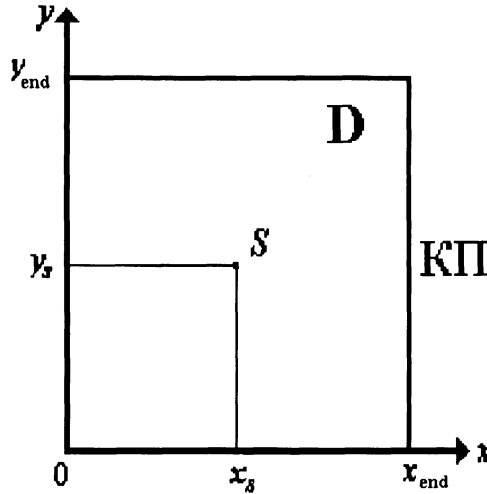


Рис.1. Прямоугольная расчетная область $D = [0, x_{end}] \times [0, y_{end}]$, КП – контур питания, S – область скважины, расположенная в центре области D с координатами (x_s, y_s) и размазанная по ячейке равномерной сетки.

Итак, в пространственно-двумерном случае уравнения (1)–(2) принимают следующий вид:

$$ku = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4)$$

$$kv = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = \frac{lc}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

где u и v – компоненты вектора скорости \mathbf{u} по направлениям x и y . Будем решать уравнения непосредственно в том виде и порядке, в каком они записаны в системе (4)–(6) и уравнение состояния (3), то есть из закона Дарси (4), (5) найдем скорость, из модифицированного уравнения неразрывности (6) – плотность. Давление определяется по плотности из уравнения состояния (3).

Итак, если известны все компоненты ρ_{kl}^n , P_{kl}^n , u_{kl}^n , v_{kl}^n на предыдущем временном слое n , то можно вычислить все значения на новом временном слое $(n + 1)$ (момент времени $t^{n+1} = t^n + \tau$):

$$u_{kl}^{n+1} = -\frac{1}{k} \frac{P_{k+1,l}^n - P_{k-1,l}^n}{2\Delta x}, \quad v_{kl}^{n+1} = -\frac{1}{k} \frac{P_{k,l+1}^n - P_{k,l-1}^n}{2\Delta y}$$

и аналогичные формулы с ориентированными разностями на границах. Например, для индекса $k = 0$

$$u_{0l}^{n+1} = -\frac{1}{k} \frac{P_{1l}^n - P_{-1l}^n}{\Delta x}, \quad v_{0l}^{n+1} = -\frac{1}{k} \frac{P_{0,l+1}^n - P_{0,l-1}^n}{\Delta y}$$

Далее, из уравнения неразрывности с учетом новых значений скорости находим плотность на новом временном слое

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{kl}^{n+1} - \rho_{kl}^n}{\Delta t} + \frac{\rho_{k+1,l}^n u_{k+1,l}^{n+1} - \rho_{k-1,l}^n u_{k-1,l}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\rho_{k,l+1}^n v_{k,l+1}^{n+1} - \rho_{k,l-1}^n v_{k,l-1}^{n+1}}{2\Delta y} = \\ = \frac{lc}{2} \left[\frac{\rho_{k+1,l}^n - 2\rho_{kl}^n + \rho_{k-1,l}^n}{\Delta x^2} + \frac{\rho_{k,l+1}^n - 2\rho_{kl}^n + \rho_{k,l-1}^n}{\Delta y^2} \right], \end{aligned}$$

и давление с помощью уравнения состояния:

$$P_{kl}^{n+1} = \frac{1}{\beta_f} \left[\frac{\rho_{kl}^{n+1}}{\rho^0} - 1 \right] + P^0.$$

В расчетах используются следующие значения (все размерные величины заданы в системе СГС):

$$P_0 = P_c = 10^6 \text{ г/(см}^3\text{с}^3), \quad P_k = 10^7 \text{ г/(см}^3\text{с}^2), \quad \rho^0 = \rho_c = 1 \text{ г/см}^3, \quad \rho_k = 1.009 \text{ г/см}^3,$$

$$k = 10^7 \text{ г/(см}^3\text{с}), \quad \beta_f = 10^{-9} \text{ (см}^3\text{с}^2\text{)/г},$$

$$D = [0, x_{end}] \times [0, y_{end}] = [0, 10000] \times [0, 10000] [\text{см}] \times [\text{см}].$$

3. Результаты численных расчетов

Рис.2 наглядно иллюстрирует сглаживающее действие регуляризатора. На этом рисунке представлены расчеты, выполненные для двумерной задачи по описанной выше схеме с применением регуляризатора (кривая 2) и без применения регуляризатора (кривая 1). Представлено давление в срезе $y = y_s$ на один и тот же момент времени. Очевидно, благодаря регуляризатору в модифицированном уравнении неразрывности (6) решение сглаживается.

Интересно исследовать устойчивость явной схемы в зависимости от параметров l и τ . Были выполнены параметрические расчеты для сеток 27×27 , 50×50 , 76×76 , 100×100 . На рис.3 представлены результаты для сетки 50×50 . Левее прямой 1 расположена область устойчивости для явной схемы уравнения диффузионного типа, к которому можно свести уравнения (1) и (2)². Кривая 2 ограничивает справа область устойчивости для описанной выше схемы с регуляризатором l .

² К уравнению диффузионного типа можно свести задачу фильтрации для линейной зависимости скорости от градиента давления. Для нелинейной зависимости (например, закон Форхаймера вместо закона Дарси) это упрощение не работает. В то же время предлагаемая схема расчета с регуляризатором работает и при нелинейной зависимости скорости от градиента давления.

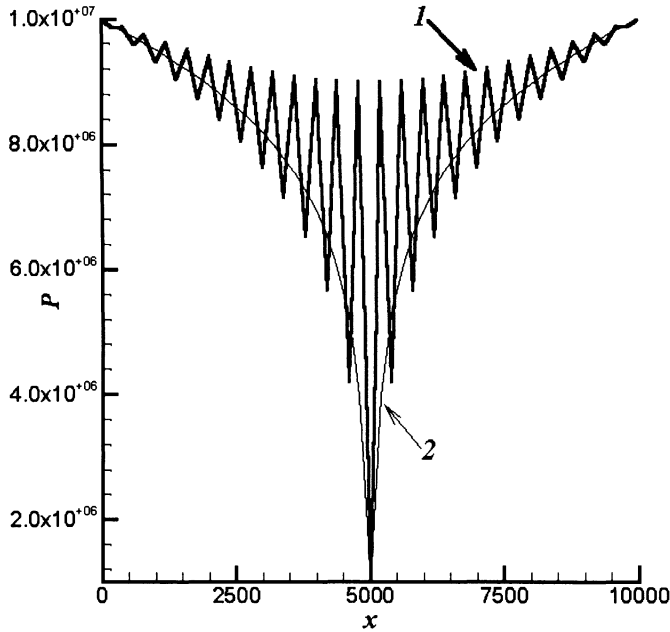


Рис.2. Профиль давления в срезе $y = y_s$ для двумерной задачи фильтрации, полученный с использованием регуляризатора (кривая 2) и без него (кривая 1).

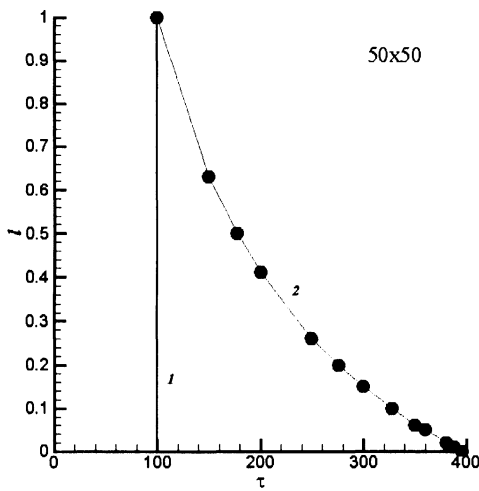


Рис.3. Область устойчивости схемы для сетки 50×50 с шагом по пространству $h = 200$. Кривая 2 ограничивает справа область устойчивости для схемы с регуляризатором l . Левее прямой l расположена область устойчивости уравнения диффузионного типа.

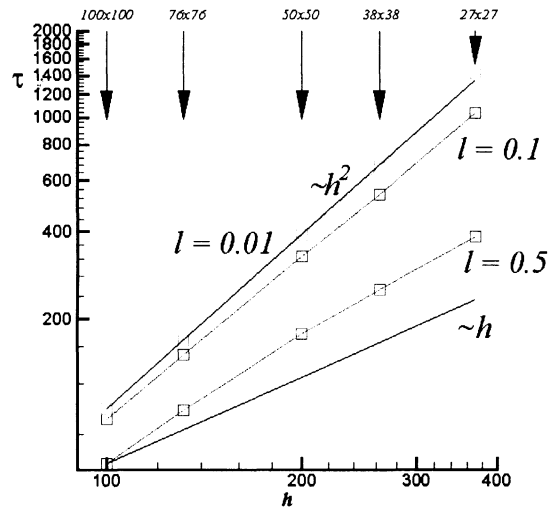


Рис.4. Зависимость шага по времени от шага по пространству для различных значений регуляризатора.

На рис.4 в логарифмическом масштабе сведены результаты расчетов для разных сеток. Зафиксировав значение l , можно для каждой сетки, которой соответствует шаг h , найти максимальный шаг по времени $\tau_{max}(h)$ (см. кривую 2 на рис.3), при котором ещё есть устойчивость. Таким образом, для каждого l , приведенного на рис.4, была получена соответствующая кривая $\tau_{max}(h)$. Оказалось, что при малых значениях регуляризатора l максимальный шаг по времени $\tau_{max}(h)$ пропорционален h^2 . При увеличении l наклон прямой падает, т.е. $\alpha \rightarrow 1$ в зависимости $\tau \sim h^\alpha$.

4. Реализация метода вложенных сеток

Для эффективного разрешения областей с большими градиентами физических величин был реализован метод вложенных сеток, который является составной частью метода декомпозиции областей [10]. В зоне с большими градиентами используются более подробные вложенные сетки. Главной проблемой расчета на системе вложенных сеток является передача значений физических величин из одной области в другую.

Для апробации реализованного метода вложенных сеток была рассмотрена задача почти радиального фильтрационного течения – жидкость притекает к гидродинамически совершенной добывающей скважине, форма которой может быть произвольна. Сама скважина должна умещаться на самой подробной вложенной сетке (см. рис.5). Расчетная область покрывается набором вложенных друг в друга сеток с одинаковым числом ячеек, но последовательно уменьшающимся в 2 раза абсолютным размером. Таким образом, расчетная область вблизи скважины имеет детальное разрешение.

Для выполнения условия устойчивости необходимо, чтобы четырем временным шагам вычислений на сетке k -го уровня соответствовал один шаг вычислений по времени на сетке $(k - 1)$ -го уровня (если $\tau \sim h^2$). Граничные значения, необходимые для вычисления величин на внешней границе k -го уровня с ячейками сетки $(k + 1)$ -го уровня, получались в результате интерполяции, а граничные значения на внутренней сетке – путем осреднения по ячейкам сетки $(k - 1)$ -го уровня. В вычислениях использовались три уровня вложенных равномерных сеток ($G0, G1, G2$).

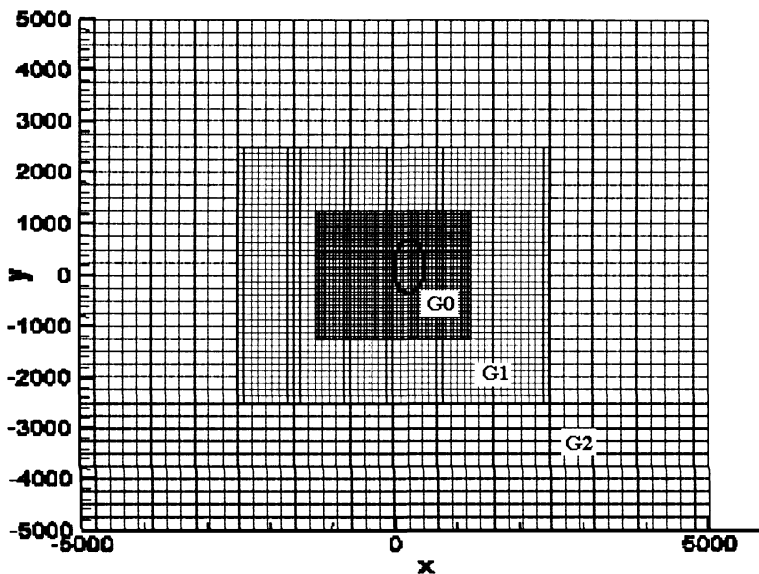


Рис.5. Три уровня вложенных равномерных сеток ($G0, G1, G2$), где $G0$ – внутренняя, самая подробная сетка с размещенной внутри скважиной, которая может быть произвольной формы.

Далее был проведен сравнительный анализ различных типов интерполяции: квадратичной, линейной и кусочно-постоянной. На примере трех вложенных сеток, размерность каждой 32×32 , ниже представлены результаты расчетов с помощью трех вышеперечисленных типов интерполяции см. рис.6. Вычисленные профили давления (представлена только правая половина) для всех интерполяций по сути дела совпадают. Это говорит о том, что можно использовать наименее затратную по числу вычислений интерполяцию (например, линейную).

На рис.7. представлено характерное пространственное изображение рассчитанного давления, полученное с помощью вычислений на системе из трех вложенных сеток размер каждой 60×60 . Для данного расчета взята круглая скважина конечного радиуса, расположенная в центре расчетной области.

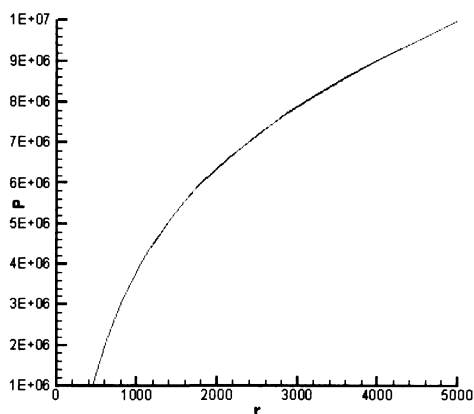


Рис.6. Сравнение профилей с использованием различных интерполяций на примере 3-х вложенных сеток каждая из которых, размерностью 32×32 (левая часть профилей — симметрична).

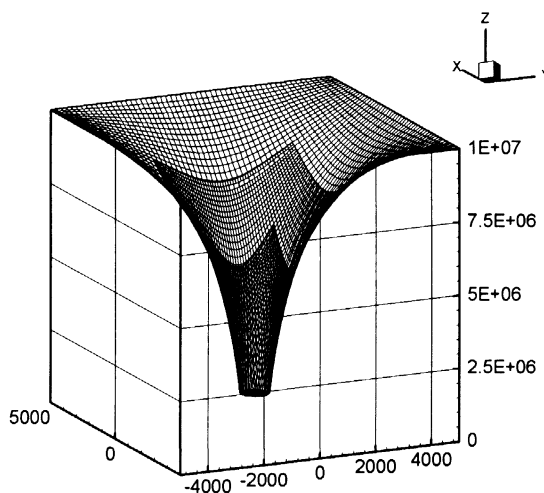


Рис.7. Давление в расчетной области.

5. Заключение

Новая численная схема для задач фильтрации разработана на базе кинетически-согласованных разностных схем и квазигазодинамической системы уравнений. Создан пакет программ для решения одномерных и двумерных задач фильтрации с использованием закона Дарси или более сложной зависимости скорости от градиента давления и уравнения неразрывности. Используется модифицированное уравнение неразрывности с регуляризатором. Разработаны соответствующие одномерные и двумерные программы для численного моделирования процессов фильтрации. Схемы реализуются на системе вложенных сеток, что позволяет резко уменьшить компьютерное время вычислений для заданной точности вычислений. При расчетах использовались различные типы интерполяции для передачи значений физических величин между соседними вложенными сетками. Был проведен сравнительный анализ интерполяций и было показано, что нет необходимости использовать интерполяцию более высокой степени точности, чем линейная. Разработанная методика моделирования фильтрации является явной, что говорит о перспективности ее эффективной реализации на многопроцессорных вычислительных системах [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Компьютерные модели и прогресс в медицине (под редакцией О. М. Белоцерковский, А.С. Холодов), – М.: Наука, 2001.
2. К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993, с. 416.
3. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач, – М.: Наука, 1986.
4. Б.Н. Четверушкин. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа. Алгоритмы, параллельная реализация, приложения, – М.: МГУ, 1999.
5. Б.Н. Четверушкин, М.А. Трапезникова, М.С. Белоцерковская. Аналог кинетически-согласованных схем для моделирования задач фильтрации, Математическое моделирование, 2002, т.14, №10, с.69-78.
6. Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984.
7. E. Oñate and M. Manzan. Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems, CIMNE 183, p. 43, February 2000, chapter of the book "Computational Analysis of Heat Transfer", G. Comini and B. Sundén (Eds.), WIT Press, Southampton, 2000.
8. Б.Н. Четверушкин. Проблема эффективного использования многопроцессорных вычислительных систем, Информационные технологии и вычислительные системы, 2000, т.2, с. 22-34.
9. А.А. Самарский. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1982.
10. V.F. Smith, P.E. Bjørstad, W.D. Gropp. Domain Decomposition. Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations, Cambridge, University Press, 1996.

Поступила в редакцию 29.03.2004.