С. Я. Новиков, В. В. Севостьянова, Равномерные жесткие фреймы Мальцева, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2022, том 86, выпуск 4, 162–174

DOI: 10.4213/im9137

УДК 517.982.254

С. Я. Новиков, В. В. Севостьянова

Равномерные жесткие фреймы Мальцева

Фрейм пространства $\mathbb{R}^d$ – это набор из $n \geqslant d$ векторов, линейная оболочка которых совпадает с $\mathbb{R}^d$. Фрейм называется равномерным, если все векторы фрейма имеют одинаковые нормы. Жесткий фрейм допускает представление произвольного вектора из $\mathbb{R}^d$ в форме, максимально похожей на представление в ортонормированном базисе. Каждый равномерный жесткий фрейм является ценным инструментом в создании эффективных вычислительных алгоритмов. Основой построения таких фреймов для $\mathbb{C}^d$ была матрица дискретного преобразования Фурье, в $\mathbb{R}^d$ первые построения равномерных жестких фреймов появились только в начале XXI в. В настоящей работе показано, что заметка А. И. Мальцева 1947 г. опередила время на десятилетия, оказалась пропущенной специалистами по теории фреймов, и именно А. И. Мальцева следует считать автором первой в мире конструкции равномерного жесткого фрейма в $\mathbb{R}^d$. Основная цель данной работы – показать историческую значимость открытия А. И. Мальцева. Упомянутая работа А. И. Мальцева рассмотрена с позиций современной теории фреймов конечномерных пространств. Для исследования важных с точки зрения теории фреймов свойств, таких как равенство модулей попарных скалярных произведений (равноугольность) и наличие полного спарка, т. е. линейная независимость каждого набора из d векторов фрейма, привлекаются проекторы Наймарка и другие операторные методы.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: матрица, равномерный жесткий фрейм, операторы синтеза и анализа, ортогональные строки матрицы, равноугольный фрейм, полный спарк.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9137

§ 1. Введение

Пусть n и d – натуральные числа, $n \geqslant d$. Фрейм в пространстве $\mathbb{R}^d$ – это полное семейство, состоящее из n векторов в d-мерном евклидовом пространстве, обобщающее понятие базиса; в определении нет требования линейной независимости векторов. Подробнее, семейство векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *фреймом* пространства $\mathbb{R}^d$, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$ такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j\rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-878.

Числа a и b называются *фреймовыми границами*, они определены неоднозначно, обычно имеют в виду оптимальные границы, т. е. минимум b и максимум a.

Для конечномерного пространства понятие фрейма эквивалентно полноте системы векторов, т. е. $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{R}^d$. Этот и другие известные факты о фреймах изложены в [1].

Оператор синтеза конечного набора векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{R}^d$ определяется как $\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{\Phi x} := \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ обозначает j-ю координату $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к оператору синтеза является *оператор анализа* $\mathbf{\Phi}^*\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, определяемый как $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y}\rangle$ для $j = 1, \ldots, n$.

Композиция операторов анализа и синтеза $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяет матрицу Грама: $(n \times n)$-матрицу, (j, j')-й элемент которой $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(j, j') = \langle \varphi_j, \varphi_{j'}\rangle$. Композиция этих операторов в другом порядке $\mathbf{\Phi\Phi}^*\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ определяет *фреймовый оператор* $\mathbf{\Phi\Phi}^*\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \mathbf{y}\rangle \varphi_j$. Известно, что последовательности $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ и $\{\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{R}^d$ имеют одинаковые матрицы Грама тогда и только тогда, когда существует унитарный оператор $\mathbf{U}$ такой, что $\mathbf{U}\varphi_j = \widehat{\varphi}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Для отдельно взятого вектора $\{\varphi_j\}$ операторы синтеза и анализа представляются в виде

$$\varphi_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \quad \varphi_j x = x\varphi_j; \qquad \varphi_j^*\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \varphi_j^*\mathbf{y} = \langle \varphi_j, \mathbf{y}\rangle.$$

Используя такое представление, фреймовый оператор может быть записан в виде $\mathbf{\Phi\Phi}^* = \sum_{j=1}^n \varphi_j \varphi_j^*$.

Таким образом, матричное представление оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ выглядит как $(d \times n)$-матрица, столбцами которой являются координаты векторов фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$. В частности, если фреймовые границы равны между собой, то фреймовый оператор представляется диагональной матрицей $\mathbf{\Phi\Phi}^* = a\mathbf{I}_{\mathbb{R}^d}$ с $a > 0$, и это представление позволяет получить весьма простое фреймовое представление вектора или сигнала:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a}\mathbf{\Phi\Phi}^*\mathbf{x} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \mathbf{x}\rangle \varphi_j, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d.$$

Такой фрейм называется *жестким* или *a-жестким*; 1-жесткий фрейм называют *фреймом Парсеваля*.

Особый интерес представляют жесткие фреймы, векторы которых имеют одинаковые нормы. Такие фреймы называются *равномерными*. Подробнее, фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется равномерным, если существует $c > 0$ такое, что $\|\varphi_j\|^2 = c$, $j = 1, \ldots, n$.

Если a-жесткий фрейм является равномерным, то между введенными выше величинами d, c и a существуют зависимости:

$$da = \operatorname{trace}(a\,\mathbf{I}_{\mathbb{R}^d}) = \operatorname{trace}(\mathbf{\Phi\Phi}^*) = \operatorname{trace}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2 = nc.$$

В частности, для фрейма Парсеваля имеем $d = nc$, поэтому равномерный фрейм Парсеваля имеет нормы $\leqslant 1$.

§ 2. Теорема Наймарка и ее матричные следствия

Следующий результат М. А. Наймарка [2] оказался основой для численных конструкций фреймов и постоянно цитируется в статьях, посвященных фреймам и их многочисленным приложениям.

Теорема 1. *Если $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^d$, то существует ортонормированный базис $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi_j = \mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{b}_j$ для всех j, где $\mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}$ обозначает ортогональный проектор из пространства $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^d$.*

Обратное утверждение также справедливо и легко доказывается.

Теорема 2. *Если $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, то $\mathbf{\Phi} = \{\mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{b}_j\}_{j=1}^n$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^d$, здесь $\mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}$ – ортогональный проектор в $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_j = \mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{b}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, то

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{x}, \mathbf{b}_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{b}_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j\rangle|^2,$$

таким образом, $\mathbf{\Phi}$ оказывается фреймом Парсеваля. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 обобщены в работе [3] на фреймы общего вида, которые оказались проекциями базисов Рисса. Проекции общих ортогональных систем, вообще говоря, неполных, рассмотрены в [4].

Пусть матрица оператора синтеза

$$\Phi = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \mid & \mid & & \mid \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \mid & \mid & & \mid \end{array}\right)$$

есть $(d \times n)$-матрица, в которой столбцами являются координаты векторов фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ в стандартном базисе.

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – фрейм в $\mathbb{R}^d$. Тогда координаты векторов φ_j могут рассматриваться как первые d координат векторов в $\mathbb{R}^n$, которые образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Если $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – жесткий фрейм, то координаты векторов φ_j являются первыми d координатами некоторых векторов, которые образуют ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – произвольный фрейм в пространстве $\mathbb{R}^d$. Оператор анализа $\Phi^*\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ имеет матрицу

$$\Phi^* = \left(\begin{array}{c} \hline \text{——} \quad \varphi_1^t \quad \text{——} \\ \hline \text{——} \quad \varphi_2^t \quad \text{——} \\ \hline \ldots \\ \hline \text{——} \quad \varphi_n^t \quad \text{——} \\ \hline \end{array}\right).$$

Если $\Phi^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то

$$0 = \|\Phi^*\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle \varphi_j, \mathbf{x}\rangle|^2.$$

Так как $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{R}^d$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и, таким образом, Φ^* – инъекция. Поэтому оператор Φ^* может быть продолжен до биекции $\widetilde{\Phi}^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, например, следующим образом. Если $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, то, выделяя некоторый базис $\{\mathbf{b}_j\}_{j=d+1}^n$ в ортогональном дополнении образа $\mathcal{R}_{\Phi^*}$ в $\mathbb{R}^n$, полагаем по определению $\widetilde{\Phi}^*\mathbf{e}_j := \mathbf{b}_j$, $j = d+1, \dots, n$. Матрица $\widetilde{\Phi}^*$ является $(n \times n)$-матрицей, в которой первые d столбцов совпадают с матрицей Φ^*:

$$\widetilde{\Phi}^* = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \text{—— } \varphi_1^t \text{ ——} & | & & | \\ \hline \dots & b_{d+1} & \dots & b_n \\ \hline \text{—— } \varphi_n^t \text{ ——} & | & & | \end{array}\right).$$

Так как $\widetilde{\Phi}^*$ по построению – сюръекция, то столбцы этой матрицы полны в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, и строки матрицы $\widetilde{\Phi}^*$ полны в $\mathbb{R}^n$, они линейно независимы и образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

Если векторы $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ образуют a-жесткий фрейм в $\mathbb{R}^d$, то, как было замечено выше, $\Phi\Phi^* = aI$. Это значит, что строки матрицы оператора Φ ортогональны, если рассматривать их как векторы пространства $\mathbb{R}^n$. Добавляя к этой матрице $n-d$ строк так, чтобы расширенная таким образом матрица имела ортогональные строки, получаем $(n \times n)$-матрицу с ортогональными строками. Следовательно, и столбцы расширенной матрицы ортогональны. Теорема доказана.

§ 3. Матрица Мальцева. Равноугольные фреймы. Фреймы с полным спарком

В 1947 г. опубликована заметка А. И. Мальцева [5], в которой он, отвечая на вопрос из статьи [6], построил матрицу, строки которой, как векторы (вещественного) евклидова пространства, ортогональны и имеют единичную длину, а столбцы этой матрицы, как векторы, имеют одинаковую длину. Такие матрицы мы называем *матрицами Мальцева*. Фактически, впервые построен равномерный фрейм Парсеваля.

Работа Наймарка, о которой мы упомянули в § 2, часто цитируется в статьях о фреймах, а работа Мальцева осталась незамеченной. Современные конструкции равномерных жестких фреймов в $\mathbb{R}^d$ стали появляться только в начале XXI в. [7].

Рассмотрим подробнее построение матрицы Мальцева. Обоснуем сначала возможность рассмотрения только случая $d < n/2$.

Лемма 1. *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – a-жесткий фрейм в $\mathbb{R}^d$, и $d < n$. Тогда $(n \times n)$-матрица $(1/a)\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$ является матрицей ортогонального проектора на d-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Матрица Грама $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$ имеет собственные значения a кратности d и 0 кратности $n-d$.*

Доказательство. Так как $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – a-жесткий фрейм, имеем

$$\varphi_l = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^n \langle\varphi_j, \varphi_l\rangle\varphi_j, \qquad l = 1, \ldots, n.$$

Отсюда для любых k, l получаем, что

$$\langle\varphi_k, \varphi_l\rangle = \left\langle\varphi_k, \frac{1}{a}\sum_{j=1}^n \langle\varphi_j, \varphi_l\rangle\varphi_j\right\rangle = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^n \langle\varphi_k, \varphi_j\rangle\langle\varphi_j, \varphi_l\rangle$$

или

$$\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi} = \frac{1}{a}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})^2.$$

Если $\mathbf{P} := (1/a)\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$, то $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$. Учитывая, что оператор $\mathbf{P}$ самосопряженный, получаем, что $\mathbf{P}$ является ортогональным проектором на d-мерное подпространство. Матрица ортогонального проектора имеет d собственных значений, равных 1, и $n-d$ нулевых собственных значений, $\operatorname{trace}\mathbf{P} = \operatorname{rank}\mathbf{P} = d$. Следовательно, $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi} = a\mathbf{P}$ имеет d собственных значений, равных a, и $n-d$ нулевых собственных значений,

$$\operatorname{trace}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = ad = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2, \qquad \operatorname{rank}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = d.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Каждый a-жесткий фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{R}^d$ имеет дополнительный по Наймарку фрейм $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ со следующими свойствами*:

(i) $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ *является a-жестким фреймом для* $\mathbb{R}^{(n-d)}$;

(ii) *матрица Грама* $\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = a\mathbf{I}_{\mathbb{R}^n} - \mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$;

(iii) $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^* = \mathbf{0}$.

Доказательство. (i) Непосредственно проверяется, что матрица $\mathbf{Q} := \mathbf{I}_{\mathbb{R}^n} - (1/a)\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^2$ и ее собственные значения – 1 и 0 с кратностями $n-d$ и d соответственно. Это означает, что столбцы матрицы $\mathbf{Q}$, $\widetilde{\psi}_j := \mathbf{Q}\mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, определяют $\operatorname{span}\bigl(\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^n\bigr) = \mathbb{R}^{(n-d)}$.

Если $\mathbf{f} \in \operatorname{span}\bigl(\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^n\bigr)$, то $\mathbf{Q}\mathbf{f} = \mathbf{f}$,

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}\left(\sum_{j=1}^n \langle\mathbf{Q}\mathbf{f}, \mathbf{e}_j\rangle\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n \langle\mathbf{f}, \mathbf{Q}\mathbf{e}_j\rangle\mathbf{Q}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \langle\mathbf{f}, \widetilde{\psi}_j\rangle\widetilde{\psi}_j,$$

т. е. набор векторов $\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^n$ образует фрейм Парсеваля для $\operatorname{span}\bigl(\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^n\bigr)$.

(ii) Векторы $\psi_j = \sqrt{a}\widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, n$, образуют a-жесткий фрейм для $\operatorname{span}(\{\psi_j\}_{j=1}^n) = \operatorname{span}\bigl(\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^n\bigr)$ и $\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = a\mathbf{I}_{\mathbb{R}^n} - \mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$.

(iii) По лемме имеем

$$(\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^*)^*(\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^*) = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{\Phi}(a\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi}^* = a\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^* - (\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*)^2 = \mathbf{0}.$$

Норма Фробениуса матрицы

$$\|\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^*\|_{\mathrm{Fro}}^2 = \operatorname{trace}\big((\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^*)^*(\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^*)\big) = \operatorname{trace}\mathbf{0} = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{0}$, и сопряженная к ней $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^* = \mathbf{0}$.

Теорема доказана.

Теорема 4 утверждает, что к $(d \times n)$-матрице $\mathbf{\Phi}$ оператора синтеза равномерного жесткого фрейма с векторами пространства $\mathbb{R}^d$ могут быть добавлены $n - d$ строк так, чтобы таким образом расширенная $(n \times n)$-матрица была ортогональной. При этом добавленные строки образуют $((n - d) \times n)$-матрицу оператора синтеза $\mathbf{\Psi}$ равномерного жесткого фрейма пространства $\mathbb{R}^{(n-d)}$.

Для $d = n/2$ в качестве $\mathbf{\Phi}$ можно взять пару ортогональных $(d \times d)$-матриц, умноженных на $1/\sqrt{2}$ и поставленных рядом.

Рассмотрим конструкцию Мальцева для $d < n/2$.

Для полноты изложения, следуя [5], напоминаем конструкцию матриц Сильвестра–Уолша, которые образуют подмножество множества матриц Адамара.

Замечание 1. Для каждого натурального m существует $(2^m \times 2^m)$-матрица $\mathbf{H}_{2^m}$, все элементы которой равны ± 1, со взаимно ортогональными строками и столбцами.

Действительно, для $m = 1$ матрица имеет вид

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы более высоких порядков определяются следующим образом:

$$\mathbf{H}_{2^m} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_{2^{m-1}} & \mathbf{H}_{2^{m-1}} \\ \hline \mathbf{H}_{2^{m-1}} & -\mathbf{H}_{2^{m-1}} \end{array}\right) = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_{2^{m-1}},$$

$2 \leqslant m \in \mathbb{N}$, где $\otimes$ обозначает произведение Кронекера.

Матрицы Сильвестра–Уолша тесно связаны с дискретными функциями Уолша, которые имеют много полезных приложений [8].

В качестве следствия к доказанному замечанию получаем, что для каждого натурального m и для любого натурального $k \leqslant 2^m$ существуют k взаимно ортогональных строк длины 2^m с числами ± 1.

Число n, обозначающее количество столбцов строящейся матрицы $\mathbf{\Phi}$, представим в виде

$$n = 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_t}, \qquad 0 \leqslant m_1 < \cdots < m_t.$$

Найдется число s такое, что $1 \leqslant s \leqslant t - 1$ и $2^{m_s} < d \leqslant 2^{m_{s+1}}$.

Построение матрицы оператора синтеза равномерного жесткого фрейма $\mathbf{\Phi}$ будет проведено в два этапа. На первом мы построим матрицу с ортогональными строками из чисел ± 1 и нулей, а на втором, не нарушая ортогональности строк, проведем требуемую условиями задачи нормировку. Матрица первого этапа имеет следующую структуру:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
A_{1,1} & 0 & \dots & 0 & A_{1,s+1} \\ \hline
0 & A_{2,2} & \dots & 0 & A_{2,s+1} \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \dots & A_{s,s} & A_{s,s+1} \\ \hline
0 & 0 & \dots & 0 & A_{s+1,s+1}
\end{array}\right).$$

Все ненулевые блоки заполняются сначала числами ± 1. Блок $A_{1,1}$ – это $(2^{m_1} \times 2^{m_1})$-матрица с ортогональными строками, блок $A_{2,2}$ – это $((2^{m_2} - 2^{m_1}) \times 2^{m_2})$-матрица с ортогональными строками, $\dots$, блок $A_{s,s}$ – это $((2^{m_s} - 2^{m_{s-1}}) \times 2^{m_s})$-матрица с ортогональными строками.

Таким образом, левая часть матрицы $\mathbf{\Phi}$ состоит из 2^{m_s} строк и $2^{m_1}+\dots+2^{m_s}$ столбцов.

Все блоки со вторым индексом $s+1$ состоят из $p := 2^{m_{s+1}}+\dots+2^{m_t}$ столбцов. Каждый блок $A_{i,s+1}$, $i = 1, \dots, s$, имеет столько же строк, как и блок $A_{i,i}$, $i = 1, \dots, s$, а блок $A_{s+1,s+1}$ состоит из $d - 2^{m_s}$ строк и p столбцов.

В каждом блоке $A_{i,i}$, $i = 1, \dots, s$, количество строк $2^{m_i} - 2^{m_{i-1}} \leqslant 2^{m_i}$ и в силу замечания ортогональные строки длины 2^{m_i} возможны.

Рассмотрим подробнее правую часть матрицы.

Разобьем блок

$$\begin{array}{|c|}
\hline
A_{1,s+1} \\ \hline
\vdots \\ \hline
A_{s,s+1} \\ \hline
A_{s+1,s+1} \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B_{s+1} & \dots & B_t \\ \hline
\end{array}$$

на $t-s$ блоков B_j размерами $d \times 2^{m_j}$, $j = s+1, \dots, t$. Заметим, что в каждом блоке B_j число строк $d \leqslant 2^{m_j}$, и, следовательно, блоки B_j можно заполнить ± 1 так, чтобы строки длины 2^{m_j} были взаимно ортогональны. Заметим, что объединяя строки блоков B_j, получаем ортогональные строки длины p. Рассматривая построенную таким образом матрицу целиком, видим, что это $(d \times n)$-матрица из ± 1 и нулей с попарно ортогональными строками.

Переходим к нормировке элементов построенной матрицы. Все элементы блоков $A_{i,i}$, $i = 1, \dots, s$, умножаем на числа α_i, $i = 1, \dots, s$, элементы блоков $A_{j,s+1}$, $j = 1, \dots, s+1$, на числа β_j, $j = 1, \dots, s+1$, таким образом, чтобы длина любой вектор-строки была равна 1, длина любого вектор-столбца – $\sqrt{d/n}$. Заметим, что при умножении блоков на любые числа строки матрицы останутся ортогональными. Для выбора чисел α_i и β_j вычислим суммы квадратов элементов каждого столбца вновь построенной матрицы Φ:

$$\alpha_1^2 \cdot 2^{m_1} = \frac{d}{n}, \quad \alpha_2^2 \cdot (2^{m_2} - 2^{m_1}) = \frac{d}{n}, \quad \ldots, \quad \alpha_s^2 \cdot (2^{m_s} - 2^{m_{s-1}}) = \frac{d}{n}, \tag{3.1}$$

$$\beta_1^2 \cdot 2^{m_1} + \beta_2^2 \cdot (2^{m_2} - 2^{m_1}) + \cdots + \beta_s^2 \cdot (2^{m_s} - 2^{m_{s-1}}) + \beta_{s+1}^2 \cdot (d - 2^{m_s}) = \frac{d}{n}. \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.1) получаем значения

$$\alpha_1^2 = \frac{d}{n \cdot 2^{m_1}}, \qquad \alpha_i^2 = \frac{d}{n \cdot (2^{m_i} - 2^{m_{i-1}})}, \quad i = 2, \ldots, s.$$

Условия нормировки строк дают

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 \cdot 2^{m_1} + \beta_1^2 \cdot (2^{m_{s+1}} + \cdots + 2^{m_t}) = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha_s^2 \cdot 2^{m_s} + \beta_s^2 \cdot (2^{m_{s+1}} + \cdots + 2^{m_t}) = 1, \\ &\beta_{s+1}^2 \cdot (2^{m_{s+1}} + \cdots + 2^{m_t}) = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставив найденные значения α_i^2 в (3.3), получим

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{1}{2^{m_{s+1}} + \cdots + 2^{m_t}} \left(1 - \frac{d}{n}\right), \\ \beta_j^2 &= \frac{1}{2^{m_{s+1}} + \cdots + 2^{m_t}} \left(1 - \frac{d \cdot 2^{m_j}}{n(2^{m_j} - 2^{m_{j-1}})}\right), \qquad j = 2, \ldots, s, \\ \beta_{s+1}^2 &= \frac{1}{2^{m_{s+1}} + \cdots + 2^{m_t}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Условие $d < n/2$ влечет

$$\begin{aligned} 1 - \frac{d \cdot 2^{m_j}}{n(2^{m_j} - 2^{m_{j-1}})} &> 1 - \frac{\frac{n}{2} \cdot 2^{m_j}}{n(2^{m_j} - 2^{m_{j-1}})} \\ &= \frac{(2^{m_j} - 2^{m_{j-1}}) - 2^{m_j - 1}}{2^{m_j} - 2^{m_{j-1}}} = \frac{2^{m_j - 1} - 2^{m_{j-1}}}{2^{m_j} - 2^{m_{j-1}}} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, правые части равенств (3.4) положительны, что гарантирует существование чисел β_j.

Легко убедиться, что найденные α_i и β_j удовлетворяют равенству (3.2). Полученные таким образом системы векторов будем называть *равномерными жесткими фреймами Мальцева.*

Приведем примеры матриц Мальцева.

Пример 1. Рассмотрим случай $d = 3$, $n = 7$. Число n представим в виде $n = 2^0 + 2^1 + 2^2$, тогда матрица оператора синтеза будет иметь вид

$$\mathbf{\Phi} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & 0 & A_{1,3} \\ \hline 0 & A_{2,2} & A_{2,3} \\ \hline 0 & 0 & A_{3,3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_2 & \beta_2 & -\beta_2 & \beta_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_3 & -\beta_3 & -\beta_3 \end{array}\right).$$

Из условий нормировки строк и столбцов находим значения α_i и β_j:

$$\mathbf{\Phi} = \left(\begin{array}{c|cc|cccc} \sqrt{\frac{3}{7}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \hline 0 & \sqrt{\frac{3}{7}} & \sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{1}{2\sqrt{7}} & -\frac{1}{2\sqrt{7}} & \frac{1}{2\sqrt{7}} & -\frac{1}{2\sqrt{7}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Пример 2. Пусть $d = 7$, $n = 15$. Так как $15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$, то

$$\mathbf{\Phi} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,4} \\ \hline 0 & A_{2,2} & 0 & A_{2,4} \\ \hline 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{array}\right),$$

где

$$A_{1,1} = \left(\sqrt{\frac{7}{15}}\right), \qquad A_{2,2} = \left(\sqrt{\frac{7}{15}} \quad \sqrt{\frac{7}{15}}\right),$$

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{7}{30}} & \sqrt{\frac{7}{30}} & \sqrt{\frac{7}{30}} & \sqrt{\frac{7}{30}} \\ \sqrt{\frac{7}{30}} & -\sqrt{\frac{7}{30}} & \sqrt{\frac{7}{30}} & -\sqrt{\frac{7}{30}} \end{pmatrix},$$

$$A_{1,4} = \left(\sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad \sqrt{\frac{1}{15}}\right),$$

$$A_{2,4} = \left(\frac{1}{2\sqrt{30}} \quad -\frac{1}{2\sqrt{30}} \quad \frac{1}{2\sqrt{30}} \quad -\frac{1}{2\sqrt{30}} \quad \frac{1}{2\sqrt{30}} \quad -\frac{1}{2\sqrt{30}} \quad \frac{1}{2\sqrt{30}} \quad -\frac{1}{2\sqrt{30}}\right),$$

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{30}} & \frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & \frac{1}{2\sqrt{30}} & \frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} \\ \frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & \frac{1}{2\sqrt{30}} & \frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{30}} & \frac{1}{2\sqrt{30}} \end{pmatrix},$$

$$A_{4,4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Матрица Адамара порядка 16, построенная по алгоритму Мальцева, выглядит следующим образом:

$$
\begin{pmatrix}
+ & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - \\
+ & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - \\
+ & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + \\
+ & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - \\
+ & - & + & - & - & + & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + \\
+ & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + \\
+ & - & - & + & - & + & + & - & + & - & - & + & + & - & + & - \\
+ & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - \\
+ & - & + & - & + & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + \\
+ & + & - & - & + & + & - & - & - & - & + & + & - & - & + & + \\
+ & - & - & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - \\
+ & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + \\
+ & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + & + & - & + & - \\
+ & + & - & - & - & - & + & + & - & - & + & + & + & + & - & - \\
+ & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - & + & - & - & +
\end{pmatrix}. \tag{3.5}
$$

Матрица состоит только из чисел ± 1, поэтому мы показали только расстановку знаков. Для чисел $d = 6$, $n = 16$ можно выбирать произвольные 6 строк из (16×16)-матрицы Адамара (3.5) и получать таким образом равномерные жесткие фреймы в $\mathbb{R}^6$. Однако специальным выбором строк этой матрицы можно получить дополнительные свойства фрейма.

Напомним, что равномерный фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *равноугольным*, если существует число $\gamma \geqslant 0$ такое, что $|\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle| = \gamma$ для всех $j \neq j'$.

Матрица, состоящая из строк матрицы (3.5) с номерами 1, 9, 5, 3, 2 и 16, является матрицей оператора синтеза равноугольного фрейма. Другой способ выбора равноугольного жесткого фрейма приведен в [9]. Это строки с номерами 2, 3, 4, 6, 11, 16. Существуют ли другие способы выбора строк для получения равноугольного фрейма, нам неизвестно.

Для $n \neq 2^k$ фреймы Мальцева не могут быть равноугольными, так как векторы-столбцы левой части матрицы ортогональны друг другу, а среди векторов из правой части найдется хотя бы одна пара неортогональных.

В работах по теории сжатых измерений большое внимание уделяется так называемому *спарку* системы (см. [10]).

Определение 1. Спарком $(d \times n)$-матрицы $\mathbf{\Phi}$ называется наименьшее количество линейно зависимых столбцов $\mathbf{\Phi}$.

Если $\operatorname{spark}(\Phi) = d + 1$, то любая группа из d векторов-столбцов состоит из линейно независимых векторов, в этом случае говорят о фрейме *с полным спарком.*

Предложение 1. *В равномерном жестком фрейме Мальцева с $n \geqslant 4$ существуют 4 линейно зависимых вектора.*

Доказательство. Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – жесткий фрейм Мальцева, и $n \geqslant 4$, то в двоичном представлении n участвуют степени 2^t с $t \geqslant 2$. Считая, что t – максимальное число такое, что $2^t \leqslant n$, в $(d \times n)$-матрице Φ последний блок B_t имеет размеры $d \times 2^t$. Покажем, что среди вектор-столбцов блока B_t всегда найдутся 4 линейно зависимых вектора.

Перенумеруем векторы фрейма так, чтобы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^t}$ образовывали последние 2^t столбцов матрицы Φ, т.е. блок B_t. Согласно алгоритму построения фрейма Мальцева блок B_t получается удалением в матрице

$$\mathbf{H}_{2^t} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_{2^{t-1}} & \mathbf{H}_{2^{t-1}} \\ \hline \mathbf{H}_{2^{t-1}} & -\mathbf{H}_{2^{t-1}} \end{array}\right)$$

любых $2^t - d$ строк. Пусть блок B является результатом удаления из матрицы $\mathbf{O}_{t-1}$ некоторых $2^{t-1} - p$ строк, а B' – результатом удаления из $\mathbf{O}_{t-1}$ некоторых $2^{t-1} - d + p$ строк, тогда B имеет размер $p \times 2^{t-1}$, а B' – размер $(d-p) \times 2^{t-1}$:

$$B_t = \left(\begin{array}{c|c} B & B \\ \hline B' & -B' \end{array}\right).$$

Для любого $i = 1, \ldots, 2^{t-1}$ сумма вектор-столбцов блока B_t с номерами i и $k_i = 2^{t-1} + i$ равна вектору

$$\varphi_i + \varphi_{k_i} = \begin{pmatrix} 2\beta_1 \\ \ldots \\ 2\beta_p \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\1 \end{matrix}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\1 \end{matrix}}\right\} d-p \end{matrix},$$

где β_j – некоторые числа, на которые при построении фрейма Мальцева были умножены строки блока B_t. Таким образом, для любых i, j выполняется

$$\varphi_i + \varphi_{k_i} = \varphi_j + \varphi_{k_j}.$$

Поскольку в блоке B_t не менее четырех столбцов, можно заключить, что среди векторов фрейма существуют четыре линейно зависимых вектора. Предложение доказано.

Следовательно, жесткий фрейм Мальцева может быть фреймом с полным спарком только при условии $\mathrm{spark}(\Phi) = d + 1 \leqslant 4$.

Предположим, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – жесткий фрейм Мальцева с полным спарком, тогда, как было показано, $d \leqslant 3$. Поскольку при построении матрицы Φ умножение блоков $A_{i,j}$ на ненулевые числа α_i и β_j не меняет ортогональность векторов-строк и линейную зависимость и независимость векторов-столбцов матрицы Φ, будем считать, что все ненулевые элементы матрицы Φ равны ± 1.

Найдем, какие размеры может иметь блок B_t. Всегда можно умножить строки и столбцы матрицы Φ на ± 1 так, чтобы все элементы в первой строке и первом столбце блока B_t были равны 1.

Предположим, что $d = 2$ и в блоке B_t больше двух столбцов. Тогда, так как $\varphi_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и первые координаты векторов φ_2 и φ_3 равны 1, при любом выборе вторых координат в φ_2 и φ_3 получим два одинаковых вектора во фрейме, что противоречит равенству полноты спарка $\mathrm{spark}(\Phi) = 3$. Таким образом, фрейм Мальцева с полным спарком в $\mathbb{R}^2$ возможен только для $n = 3$. Такой фрейм однозначно определяется описанным выше алгоритмом:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для $d = 3$ несложным перебором получаем единственный с точностью до перестановки столбцов вариант блока

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем ограничения на количество столбцов блока B_t и на общее количество векторов фрейма: $n \leqslant 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$. Рассматривая значения $n = 5, 6, 7$, замечаем, что ни один из фреймов Мальцева не будет фреймом с полным спарком. Следовательно, представленная матрица B_2 доставляет единственно возможный фрейм Мальцева с полным спарком в $\mathbb{R}^3$.

Следствие 1. *Существуют ровно два равномерных жестких фрейма Мальцева с полным спарком*:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003, xxii+440 pp.
2. М. А. Наймарк, “Спектральные функции симметрического оператора”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:3 (1940), 277–318.
3. Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, “Замечание об описании фреймов общего вида”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 941–945; англ. пер.: B. S. Kashin, T. Yu. Kulikova, “A note on the description of frames of general form”, *Math. Notes*, **72**:6 (2002), 863–867.
4. С. Я. Новиков, “Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 893–903; англ. пер.: S. Ya. Novikov, “Bessel sequences as projections of orthogonal systems”, *Math. Notes*, **81**:6 (2007), 800–809.
5. А. И. Мальцев, “Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов””, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:6 (1947), 567–568.

6. А. Н. Колмогоров, А. А. Петров, Ю. М. Смирнов, “Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:6 (1947), 561–566.
7. P. G. Casazza, M. T. Leon, “Existence and construction of finite tight frames”, *J. Concr. Appl. Math.*, **4**:3 (2006), 277–289.
8. М. С. Беспалов, “Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша”, *Пробл. передачи информ.*, **46**:3 (2010), 60–79; англ. пер.: M. S. Bespalov, “Eigenspaces of the discrete Walsh transform”, *Problems Inform. Transmission*, **46**:3 (2010), 253–271.
9. M. Fickus, J. Jasper, D. G. Mixon, J. Peterson, “Hadamard equiangular tight frames”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **50**:1 (2021), 281–302.
10. M. Elad, *Sparse and redundant representations. From theory to applications in signal and image processing*, Springer, New York, 2010, xx+376 pp.

Сергей Яковлевич Новиков
(Sergey Ya. Novikov)
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
E-mail: nvks@ssau.ru

Поступило в редакцию
29.12.2020
25.05.2021

Виктория Владимировна Севостьянова
(Victoria V. Sevost’yanova)
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
E-mail: victoria.sevostyanova@gmail.com