2000. Т.36, №1. С. 39 — 46

УДК 517.926.4

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПОЛУГИПЕРБОЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

С. Г. Крыжевич

1. Определение классов $\mathrm{SH}(\lambda,\varepsilon)$ и некоторые примеры систем, принадлежащих данным классам. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $x = \mathrm{col}(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

с непрерывной при $t \geq t_0$ матрицей коэффициентов. Обозначим символом $\chi(\cdot)$ характеристический показатель (часто обозначаемый символом $\lambda(\cdot)$). Положим $\|x\| = \max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$. Тем же символом обозначим соответствующую матричную норму.

Определение. Пусть $\lambda > 0$, $\varepsilon \geq 0$. Будем говорить, что система (1.1) принадлежит классу $\mathrm{SH}(\lambda,\varepsilon)$ (полугиперболична с константами λ и ε), если для некоторой ее фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ существуют такие кусочно-непрерывные матрицы $P^+(t)$ и $P^-(t)$, что $P^+(t)+P^-(t) \equiv E$ — единичной $(n\times n)$-матрице и

$$\int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)P^+(\tau)\| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\,d\tau + \int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)P^-(\tau)\| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\,d\tau \leq C\exp(-\lambda t). \tag{1.2}$$

Введем обозначения: $\Phi^+(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)P^+(\tau)$, $\Phi^-(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)P^-(\tau)$.

Теорема 1.1. *Если система (1.1) гиперболична, то существует такое $\lambda_0 > 0$, что данная система принадлежит всем классам $\mathrm{SH}(\lambda,0)$ при любых $0<\lambda<\lambda_0$.*

Доказательство. Выберем в качестве λ_0 показатель гиперболичности системы (1.1), а в качестве $P^+(t)$ и $P^-(t)$ возьмем проекции на устойчивое и неустойчивое подпространства данной системы. Верно, что $\max(\|P^+(t)\|,\|P^-(t)\|) \leq M$ для некоторого $M>0$ при любом t. Фиксируем произвольное $0<\lambda<\lambda_0$. Имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| \exp(-\lambda\tau)\,d\tau + \int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| \exp(-\lambda\tau)\,d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} Ma\exp(-\lambda_0(t-\tau))\exp(-\lambda\tau)\,d\tau + \int\limits_{t}^{\infty} Ma\exp(\lambda_0(t-\tau))\exp(-\lambda\tau)\,d\tau =$$

$$= Ma\left(\exp(-\lambda_0 t)\int\limits_{t_0}^{t}\exp((\lambda_0-\lambda)\tau)\,d\tau + \exp(\lambda_0 t)\int\limits_{t}^{\infty}\exp(-(\lambda_0+\lambda)\tau)\,d\tau\right) \leq C\exp(-\lambda t).$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Если коэффициент неправильности Гробмана системы (1.1) меньше $\lambda\varepsilon$ для некоторых положительных λ и ε, то данная система принадлежит классу $\mathrm{SH}(\lambda,\varepsilon)$.*

Доказательство. Фиксируем $\lambda > 0$. Выберем в качестве $\Phi(t)$ нормальную фундаментальную матрицу системы (1.1) и введем в рассмотрение матрицу $\Psi^+(t)$ размера $n\times n$, состоящую из тех строк матрицы $\Phi^{-1}(t)$, характеристические показатели которых не меньше $\lambda(1+\varepsilon)$, и нулевых строк. Не умаляя общности, можно считать, что для некоторого

$0 \le k \le n$ первые k строк матрицы $\Psi^+(t)$ совпадают с первыми k строками матрицы $\Phi^{-1}(t)$, а все остальные строки $\Psi^+(t)$ нулевые. Определим: $P^+(t) = \Phi(t)\Psi^+(t)$, $P^-(t) = E - P^+(t) = \Phi(t)\Psi^-(t)$, где $\Psi^-(t)$ состоит из k нулевых строк и $n-k$ последних строк матрицы $\Phi^{-1}(t)$. Проверим справедливость неравенства (1.2). Обозначим через $y^+_{ij}(t,\tau)$ элементы матрицы $\Phi^+(t,\tau)$, а через $x_{ij}(t)$ и $\eta_{ij}(t)$ элементы матриц $\Phi(t)$ и $\Phi^{-1}(t)$ соответственно. В силу того что $\Phi^{-1}(t)P^+(t) = \Psi^+(t)$, имеем

$$\int_{t_0}^{t} |y^+_{ij}(t,\tau)| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \left|\sum_{r=1}^{k} x_{ir}(t)\eta_{rj}(\tau)\right| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{k} |x_{ir}(t)| \int_{t_0}^{t} |\eta_{rj}(\tau)| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau. \tag{1.3}$$

Из выбора k ясно, что $\chi(|\eta_{rj}(t)| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)t)) \ge 0$, и, стало быть,

$$\chi\left(\int_{t_0}^{t} |\eta_{rj}(\tau)| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau\right) \le \chi(\eta_{rj}(t)) - \lambda(1+\varepsilon).$$

Так как коэффициент неправильности Гробмана системы (1.1) меньше $\lambda\varepsilon$, имеем $\chi(x_{ir}(t)) + \chi(\eta_{rj}(t)) - \lambda\varepsilon < 0$, откуда видно, что правая часть неравенства (1.3) имеет характеристический показатель, меньший $-\lambda$, и, значит, оценивается сверху некоторой функцией $C_{ij}\exp(-\lambda t)$. А тогда

$$\int_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \max_i \sum_{j=1}^{n} |y^+_{ij}(t,\tau)| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau \le C_1 \exp(-\lambda t) \tag{1.4}$$

для некоторого $C_1 > 0$. Проведя аналогичную оценку для второго слагаемого (1.2) и сложив полученное неравенство с (1.4), получим (1.2), что и доказывает теорему.

Следствие 1.1. *Правильные системы принадлежат классам* SH(λ,ε) *для любых* $\lambda, \varepsilon > 0$.

2. Основное свойство полугиперболичных систем. Условимся называть мультииндексом набор из n неотрицательных целых чисел, из которых по крайней мере одно положительно. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — некоторый мультииндекс, а $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор. Введем следующие обозначения:

$$|l| = \sum_{i=1}^{n} l_i, \quad l! = l_1! \ldots l_n!, \quad x^l = x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}, \quad \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l} = \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}.$$

Определение. Пусть U — некоторая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$, $f(t,x) : [t_0, \infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ — отображение, непрерывное по t и C^1-гладкое по x, $\alpha > 1$ — вещественное число и N — наибольшее натуральное число, строго меньшее α.

Будем говорить, что отображение f имеет порядок малости α по x, если в некоторой окрестности U начала координат в $\mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:

1) $f(t,0) = 0$ для любых $t \ge t_0$;

2) $f \in C^N_x$ и для любого мультииндекса l такого, что $|l| \le N$, имеет место $\partial^{|l|} f(t,0)/\partial x^l = 0$;

3) для любого мультииндекса l такого, что $|l| = N$ и $t \ge t_0$, выполнено условие Гёльдера: для любых $x_1, x_2 \in U$

$$\|\partial^{|l|} f(t,x_1)/\partial x^l - \partial^{|l|} f(t,x_2)/\partial x^l\| \le L\|x_1 - x_2\|^{\alpha - N}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\lambda, \varepsilon > 0$, *а система (1.1) принадлежит классу* SH(λ,ε). *Пусть для системы*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{2.2}$$

определенной в области $\Omega = \{t, x : \ t \geq t_0, \ \|x\| < \sigma\}$, *выполнено: 1) отображение* f *имеет порядок малости не менее* $1+\varepsilon$ *по* x *в некоторой окрестности* U *начала координат в* $\mathbb{R}^n$; *2) если* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— характеристические показатели системы (1.1), то для некоторого* $0 \leq k \leq n$ *справедливо*

$$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_k < -\lambda \leq \lambda_{k+1} \leq \ldots \leq \lambda_n. \tag{2.3}$$

Если системы (1.1) и (2.2) удовлетворяют перечисленным выше условиям, а M *— наибольшее целое число, строго меньшее* $1+\varepsilon$, *то существует* C^M *-гладкое и взаимно однозначное отображение* g *некоторой окрестности нуля из* $\mathbb{R}^k$ *в* $\mathbb{R}^n$ *такое, что: 1)* $g(0) = 0$; *2) если* $\Phi(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ *— нормальная фундаментальная система решений (1.1) такая, что характеристические показатели вектор-функций* $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ *равны* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *соответственно, а* J *— матрица Якоби отображения* g *в точке* 0, *то* $J = (X_1(t_0), \ldots, X_k(t_0))$; *3) для любого* x_0, *такого, что* $\|x_0\| < \sigma$, *для которого существует* $y_0 \in \mathbb{R}^k$ *такое, что* $x_0 = g(y_0)$, *решение системы (2.2) с начальными данными* $x(t_0) = x_0$ *имеет при* $t \to +\infty$ *характеристический показатель, не превосходящий* $-\lambda$.

Замечание 2.1. Данная теорема обобщает теорему Ляпунова [1, с. 75].

Доказательство. Построим приближенные решения системы (2.2) по следующему алгоритму.

Возьмем некоторый достаточно малый по норме вектор $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ и введем в рассмотрение последовательность вектор-функций $\{X^{(m)}(t,y)\} = X^{(1)}(t,y), X^{(2)}(t,y), \ldots$ $\ldots, X^{(m)}(t,y), \ldots,$ первый член которой представим в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\Phi(t)$ с характеристическими показателями, меньшими $-\lambda$:

$$X^{(1)}(t,y) = \sum_{r=1}^{k} y_r X_r(t).$$

Вектор-функции $X^{(m+1)}(t,y)$ будем последовательно определять по формулам

$$X^{(m+1)}(t,y) = X^{(1)}(t,y) + \int_{t_0}^{t} \Phi^+(t,\tau) f(\tau, X^{(m)}(\tau,y))\, d\tau - \int_{t}^{\infty} \Phi^-(t,\tau) f(\tau, X^{(m)}(\tau,y))\, d\tau. \tag{2.4}$$

Далее будет показано, что $X^{(m)}(t,y) \to X^*(t,y)$ равномерно по всем $t \in [t_0, \infty)$, причем при любом y функция $X^*(\cdot, y)$ является некоторым решением системы (1.2) с отрицательным характеристическим показателем, не больше $-\lambda$, а также будет проверена C^M -гладкая и взаимно однозначная при любых t зависимость $X^*(t,y)$ от y. Положим $X^{(0)}(t,y) \equiv 0$ и докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Для любого* $q \in (0,1)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если норма* y *столь мала, что* $\|X^{(1)}(t,y)\| \leq \delta \exp(-\lambda t)$ *при любом* $t \geq t_0$, *то* $X^{(2)}(t,y), X^{(3)}(t,y), \ldots, X^{(m)}(t,y), \ldots$, *полученные последовательно по формулам (2.4), определены и имеют характеристические показатели, не большие* $-\lambda$. *При этом для любых* $m \geq 1$, $t \geq t_0$ *верна оценка*

$$\|X^{(m)}(t,y) - X^{(m-1)}(t,y)\| \leq \delta q^{m-1} \exp(-\lambda t). \tag{2.5}$$

Доказательство проведем методом индукции. По выбору $X^{(1)}(t,y)$ для $m = 1$ лемма верна. Пусть $m > 1$, а $X^{(1)}(t,y), \ldots, X^{(m-1)}(t,y)$ определены и удовлетворяют утверждению леммы.

Из разложения по формуле Тейлора с центром в нуле и условия Гёльдера (2.1) ясно, что, так как $X^{(m-1)}(t,y)$ имеет характеристический показатель, не больший чем $-\lambda$, характеристический показатель функции $f(t, X^{(m-1)}(t,y))$ не превысит $-\lambda(1+\varepsilon)$. Тогда все интегралы в (2.4) будут сходящимися и функции $X^{(m)}(t,y)$, полученные по этим формулам, будут определены.

Складывая неравенства (2.5), получаем

$$\|X^{(m-1)}(t,y)\| \leq \delta \exp(-\lambda t) \frac{1-q^{m-1}}{1-q} < \delta \frac{\exp(-\lambda t)}{1-q}. \tag{2.6}$$

Аналогично можно показать, что $\|X^{(m-2)}(t,y)\| < \delta\exp(-\lambda t)/(1-q)$, а тогда такая же оценка справедлива для любой выпуклой комбинации функций $X^{(m-2)}(t,y)$ и $X^{(m-1)}(t,y)$.

Пусть $f(t,x) = \mathrm{col}(f_1(t,x),\dots,f_n(t,x))$. По формуле Тейлора для любых $k=1,\dots,n$ и $t \ge t_0$ при достаточно малых по норме векторах ζ и z из $\mathbb{R}^n$ выполнено

$$f_k(t,z) - f_k(t,\zeta) = \sum_{|l|\le M-1} \frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|} f_k}{\partial x^l}(t,\zeta)(z-\zeta)^l + \sum_{|l|=M} \frac{1}{l!}\frac{\partial^M f_k}{\partial x^l}(t,\theta_k\zeta + (1-\theta_k)z)(z-\zeta)^l \quad (2.7)$$

для некоторого $\theta_k \in [0,1]$. Оценим нормы слагаемых суммы (2.7). По формуле (2.1) для достаточно малых по норме векторов ζ и z и произвольного мультииндекса l такого, что $|l| = M$, имеет место

$$|\partial^M f_k(t,\theta_k\zeta + (1-\theta_k z))/\partial x^l| \le L\max\{\|\zeta\|,\|z\|\}^{1+\varepsilon-M} \quad (2.8)$$

(так как $\|\theta_k\zeta + (1-\theta_k)z\| \le \max\{\|\zeta\|,\|z\|\}$). Кроме того, для любого мультииндекса $i = (i_1,\dots,i_n)$, такого, что $|i| = M-1$ верно

$$\frac{\partial^{M-1} f_k(t,\zeta)}{\partial x^i} = \frac{\partial^{M-1} f_k(t,0)}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^M f_k(t,\tau_k\zeta)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_j^{i_j+1}\dots\partial x_n^{i_n}}\zeta_j$$

для некоторого $\tau_k \in [0,1]$. Но $\partial^{M-1} f_k(t,0)/\partial x^i = 0$, $|\partial^M f_k(t,\tau_k\zeta)/\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_j^{i_j+1}\dots\partial x_n^{i_n}| \le L\|\zeta\|^{1+\varepsilon-M}$ для любого j в силу формулы (2.8). Тогда $|\partial^{M-1} f_k(t,\zeta)/\partial x^i| \le nL\|\zeta\|^{1+\varepsilon-(M-1)}$.

Понижая далее порядок дифференцирования, можно аналогичными рассуждениями доказать, что для любого мультииндекса l, такого, что $1 \le r = |l| \le M$:

$$|\partial^r f_k(t,\zeta)/\partial x^l| \le n^{M-r}L\|\zeta\|^{1+\varepsilon-r}, \quad |(\partial^r f_k(t,\zeta)/\partial x^l)(z-\zeta)^l| \le n^{M-r}L\|\zeta\|^{1+\varepsilon-r}\|\zeta - z\|^r. \quad (2.9)$$

Положив $\zeta = X^{(m-1)}(t,y)$, а $z = X^{(m-2)}(t,y)$, из справедливости утверждения леммы для $m-1$ (формула, получающаяся из (2.5) заменой $m \to m-1$) и формул (2.6), (2.7) и (2.9) получаем

$$\|f(t,X^{(m-1)}(t,y)) - f(t,X^{(m-2)}(t,y))\| = \max_{1\le k\le n} |f_k(t,X^{(m-1)}(t,y)) - f_k(t,X^{(m-2)}(t,y))| \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{M}\sum_{|l|=r} \frac{n^{M-r}}{l!} L\left(\frac{\delta\exp(-\lambda t)}{1-q}\right)^{1+\varepsilon-r} (\delta q^{m-2}\exp(-\lambda t))^r = C_1(\varepsilon)\delta^{1+\varepsilon}\exp(-\lambda(1+\varepsilon)t)q^{m-2},$$

$$C_1(\varepsilon) = L\sum_{r=1}^{M} \frac{n^{M-r}q^{(r-1)(m-2)}}{(1-q)^{1+\varepsilon-r}} \sum_{|l|=r}\frac{1}{l!}.$$

Докажем оценку (2.5):

$$\|X^{(m)}(t,y) - X^{(m-1)}(t,y)\| \le \int_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\|\,\|f(\tau,X^{(m-1)}(\tau,y)) - f(\tau,X^{(m-2)}(\tau,y))\|\,d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\|\,\|f(\tau,X^{(m-1)}(\tau,y)) - f(\tau,X^{(m-2)}(\tau,y))\|\,d\tau \le$$

$$\le C_1(\varepsilon)\delta^{1+\varepsilon}q^{m-2}\left(\int_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\|\exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\,d\tau + \int_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\|\exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\,d\tau\right) \le$$

$$\le CC_1(\varepsilon)\delta^{1+\varepsilon}q^{m-2}\exp(-\lambda t).$$

Взяв $\delta > 0$ таким, что $\delta^\varepsilon CC_1(\varepsilon)q^{-1} \le 1$, получим, что $\|X^{(m)}(t,y) - X^{(m-1)}(t,y)\| \le \delta q^{m-1}\exp(-\lambda t)$, откуда видно, что неравенство (2.5) выполнено при малых δ. Так как характеристический показатель $X^{(m-1)}(t,y)$ не больше $-\lambda$, из (2.5) получаем, что это же верно и для характеристического показателя $X^{(m)}(t,y)$. Лемма доказана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(X^{(m)}(t,y)-X^{(m-1)}(t,y)). \tag{2.10}$$

Из оценок (2.5) видно, что ряд (2.10) сходится равномерно. Пусть $X^*(t,y)$ — его сумма. Суммируя (2.5) по всем m от 1 до ∞, получим, что $\|X^*(t,y)\| \le \delta\exp(-\lambda t)/(1-q)$, и, следовательно, характеристический показатель $X^*(t,y)$ не превосходит $-\lambda$.

Лемма 2.2. *При любом выборе достаточно малого по норме $y\in\mathbb{R}^n$ функция $X^*(t,y)$ является решением системы интегральных уравнений*

$$X(t,y)=X^{(1)}(t,y)+\int_{t_0}^{t}\Phi^+(t,\tau)f(\tau,X(\tau,y))\,d\tau-\int_{t}^{\infty}\Phi^-(t,\tau)f(\tau,X(\tau,y))\,d\tau, \tag{2.11}$$

а тем самым и решением системы (2.2).

Доказательство. В силу неравенств (2.6) интегралы из правой части равенства (2.4) сходятся равномерно. Таким образом, в (2.4) можно перейти к пределу по m под знаком интеграла. Тем самым проверяется справедливость (2.11). Лемма доказана.

Для завершения доказательства исходного утверждения покажем, что при малом по норме y зависимость вектора $X^*(t_0,y)$, построенного по указанному выше алгоритму, от y является C^M-гладкой и при этом ранг матрицы Якоби $J=\partial X^*(t_0,0)/\partial y$ равен k.

Лемма 2.3. *При $t\ge t_0$ отображение $X^*(t,y)$ имеет непрерывные в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$ частные производные $\partial X^*(t,y)/\partial y_1,\dots,\partial X^*(t,y)/\partial y_k$ такие, что*

$$\frac{\partial X^*}{\partial y_r}(t,y)=X_r(t)+\int_{t_0}^{t}\Phi^+(t,\tau)\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,X^*(\tau,y))\frac{\partial X^*}{\partial y_r}(\tau,y)\,d\tau-$$
$$-\int_{t}^{\infty}\Phi^-(t,\tau)\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,X^*(\tau,y))\frac{\partial X^*}{\partial y_r}(\tau,y)\,d\tau \tag{2.12}$$

при любых r от 1 до k.

Доказательство. Из определения $X^{(1)}(t,y)$ видно, что $\partial X^{(1)}(t,y)/\partial y_r=X_r(t)$ при любом r. Покажем, что $X^{(m)}(t,y)$ дифференцируемо по y при всех m, причем

$$\frac{\partial X^{(m)}}{\partial y_r}(t)=X_r(t)+\int_{t_0}^{t}\Phi^+(t,\tau)\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,X^{(m-1)}(\tau,y))\frac{\partial X^{(m-1)}}{\partial y_r}(\tau,y)\,d\tau-$$
$$-\int_{t}^{\infty}\Phi^-(t,\tau)\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,X^{(m-1)}(\tau,y))\frac{\partial X^{(m-1)}}{\partial y_r}(\tau,y)\,d\tau. \tag{2.13}$$

Это утверждение доказывается по индукции. Пусть $X^{(m-1)}(t,y)$ имеет частные производные $\partial X^{(m-1)}(t,y)/\partial y_1,\dots,\partial X^{(m-1)}(t,y)/\partial y_k$. Тогда, дифференцируя правую часть равенства (2.4) по y_r, получим, что существуют $\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_1,\dots,\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_k$, удовлетворяющие (2.13). Заметим, что дифференцирование под знаком интеграла в равенстве (2.4) возможно в силу равномерной по y из некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$ сходимости интегралов

$$\int_{t_0}^{t}\Phi^+(t,\tau)f(\tau,X^{(m-1)}(\tau,y))\,d\tau,\qquad \int_{t}^{\infty}\Phi^-(t,\tau)f(\tau,X^{(m-1)}(\tau,y))\,d\tau.$$

Покажем,что функции $\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r$ при фиксированном r образуют фундаментальную последовательность. Возьмем $K>0$ такое, что $\max\limits_{i\le k}\|X_i(t)\|\le K\exp(-\lambda t)/2$. Убедимся, что если y достаточно мал, то для любого m выполнено неравенство

$$\|\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r\|\le K\exp(-\lambda t). \tag{2.14}$$

Для $m = 1$ неравенство (2.14) справедливо, так как $\partial X^{(1)}(t,y)/\partial y_r = X_r(t)$. Кроме того, в силу того, что отображение f имеет порядок малости $1+\varepsilon$ по x, $\|\partial f(t, X^{(m-1)}(t,y))/\partial x\| \leq$ $\leq C_2(\varepsilon)\delta^\varepsilon \exp(-\varepsilon\lambda t)$ для некоторого $C_2(\varepsilon)$. Рассуждая по индукции, в силу (2.13) получаем

$$\left\|\frac{\partial X^{(m)}}{\partial y_r}(\tau,y)\right\| \leq \|X_r(t)\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, X^{(m-1)}(t,y))\right\| \left\|\frac{\partial X^{(m-1)}}{\partial y_r}(\tau,y)\right\| d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, X^{(m-1)}(\tau,y))\right\| \left\|\frac{\partial X^{(m-1)}}{\partial y_r}(\tau,y)\right\| d\tau \leq$$

$$\leq K\exp(-\lambda t)/2 + \int_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| C_2(\varepsilon)\delta^\varepsilon \exp(-\varepsilon\lambda\tau) K \exp(-\lambda\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| C_2(\varepsilon)\delta^\varepsilon \exp(-\varepsilon\lambda\tau) K \exp(-\lambda\tau)\, d\tau. \tag{2.15}$$

По аналогии с доказательством леммы 2.1 выберем $\delta > 0$ таким, чтобы правая часть неравенства (2.15) не превысила $K\exp(-\lambda t)/2$. А тогда оценка (2.14) верна для любых $m \in \mathbb{N}$.

Покажем, что при любых r и t последовательность $\{\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r\}$ фундаментальна, причем для любых $m_1 > m_2$ справедливы оценки

$$\|\partial X^{(m_1)}(t,y)/\partial y_r - \partial X^{(m_2)}(t,y)/\partial y_r\| \leq K q^{\varepsilon(m_2-1)} \exp(-\lambda t). \tag{2.16}$$

При $m_2 = 0$ оценка (2.16) следует из (2.15). При бо́льших m_2, рассуждая по индукции, имеем по аналогии с леммой 2.1 (формула (2.5))

$$\|\partial X^{(m_1)}(t,y)/\partial y_r - \partial X^{(m_2)}(t,y)/\partial y_r\| \leq$$

$$\leq C_3(\varepsilon)\delta^\varepsilon K q^{\varepsilon(m_2-2)} \left(\int_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| \exp(-(1+\varepsilon)\lambda\tau)\, d\tau + \int_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| \exp(-(1+\varepsilon)\lambda\tau) d\tau \right)$$

для некоторого $C_3(\varepsilon) > 0$. Таким образом, взяв достаточно малое δ, можно добиться того, чтобы правая часть полученного неравенства была меньше $Kq^{\varepsilon(m_2-1)}\exp(-\lambda t)$. Из оценки (2.16) следует, что последовательность $\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r$ является фундаментальной при любом $t \geq 0$. Определим

$$Y_r(t,y) = \lim_{m\to\infty} \partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r. \tag{2.17}$$

В силу оценки (2.16) сходимость $\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r$ к $Y_r(t,y)$ будет равномерной по t при $t \geq t_0$ и по y из некоторой окрестности точки O. Отсюда следует, что все функции $Y_r(t,y)$ непрерывны при $t \geq t_0$ и малых по норме y.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы. В силу того, что $X^{(m)}(t,y) \to$ $\to X^*(t,y)$, и формулы (2.17) (в обоих случаях последовательности сходятся равномерно по y) при любых r частные производные $\partial X^*(t,y)/\partial y_r$ существуют и равны $Y_r(t,y)$. Так как $\partial X^{(m)}(t,y)/\partial y_r \to \partial X^*(t,y)/\partial y_r$ равномерно по t, то, переходя в равенстве (2.13) к пределу при $m \to \infty$, получаем соотношения (2.12). Лемма доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать существование и непрерывность частных производных по y высших порядков, не превосходящих M, для функции $X^*(t,y)$. Так как $X^*(t,0) \equiv 0$, из соотношения (2.12) следует, что $\partial X^*(t,0)/\partial y_r = X_r(t)$. Тогда матрица J состоит из первых k столбцов матрицы $\Phi(t_0)$ и, следовательно, ранг ее равен k. Таким образом, при любом фиксированном $t \geq t_0$ отображение $X^*(t,\cdot)$ является C^M-гладким вложением некоторой малой окрестности $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$. Определим $g(y) = X^*(0,y)$. Это отображение, как было показано выше, удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 2.1.

Таким образом, утверждение об условной устойчивости нулевого решения системы (1.1) доказано полностью.

З а м е ч а н и е 2.2. Условия теоремы 2.1 можно ослабить, заменив в формуле (2.1) (условие Гёльдера) константу L положительной функцией $L(t)$ с характеристическим показателем, равным некоторому числу $\beta \in \mathbb{R}$. В этом случае утверждение теоремы 2.1 справедливо для всех отображений f, имеющих порядок малости, больший $1+\varepsilon+\beta/\lambda$.

С л е д с т в и е 2.1. *Если коэффициент неправильности системы (1.1) равен σ, а λ и ε таковы, что $\lambda\varepsilon > \sigma$, то для любого отображения f, имеющего порядок малости не менее $1+\varepsilon$ по x в некоторой окрестности нуля, справедливо утверждение теоремы 2.1.*

Рассмотрим систему (2.2) с возмущением $f(t,x)$ таким, что $f(t,0)\equiv 0$, и которое вместо рассмотренного выше условия малости обладает на множестве Ω из условия теоремы 2.1 следующим свойством:

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \le L(t)\|x_1-x_2\| \tag{2.18}$$

для любых $t \ge t_0$, $x_1, x_2 \in U$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $\lambda > 0$, $\varepsilon \ge 0$, система (1.1) принадлежит классу $\mathrm{SH}(\lambda,\varepsilon)$ и число k таково, что ее характеристические показатели удовлетворяют (2.3). Пусть, кроме того, система (2.2) такова, что для возмущения f выполнено условие (2.18), причем $\|L(t)\| < l\exp(-\lambda\varepsilon t)$. Тогда найдется такое $l_0 > 0$, что если $0 < l \le l_0$, то существует непрерывное взаимно однозначное отображение h некоторой окрестности нуля из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ такое, что: 1) $h(0)=0$; 2) $\|h(y_1)-h(y_2)\| \le Dl\|y_1-y_2\|$, причем константа D зависит только от свойств системы (1.1); 3) если $J=(X_1(t_0),\ldots,X_k(t_0))$ (вектор-функции $X_1(t),\ldots,X_k(t)$ рассмотрены выше), то для любого x_0, такого, что $\|x_0\|<\sigma$, для которого существует $y_0 \in \mathbb{R}^k$ такое, что $x_0 = Jy_0 + h(y_0)$, решение системы (2.2) с начальными данными $x(t_0)=x_0$ имеет при $t \to +\infty$ характеристический показатель, не превосходящий $-\lambda$.*

З а м е ч а н и е 2.3. Данный результат обобщает теоремы Ляпунова — Перрона [2] (при $\varepsilon = 0$) и Гробмана [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о, приведенное ниже, аналогично доказательству теоремы Ляпунова — Перрона, изложенному в [4, с. 18 — 22].

Будем решать систему (2.2) методом последовательных приближений (2.4). Выберем, как и выше, вектор $y=\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_k)$ и покажем, что при малых l все последовательные приближения определены и при любых m удовлетворяют оценкам

$$\|X^{(m)}(t,y)\| \le D\|y\|\exp(-\lambda t) \quad \text{для некоторого } D>0. \tag{2.19}$$

Оценка (2.19) устанавливается по индукции. Условимся, не умаляя общности, считать, что в формуле (1.2) для системы (1.1) константа C больше 1. Выберем $D>0$ таким, что $\|X^{(1)}(t,y)\| \le (D/(2C))\|y\|\exp(-\lambda t)$ при всех y. Тогда первое приближение очевидно удовлетворяет (2.19). Предположим, что $(m-1)$-е приближение удовлетворяет данной оценке. Из формул (2.4) по условиям теоремы получаем

$$\|X^{(m)}(t,y)\| \le (D/(2C))\|y\|\exp(-\lambda t) + \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| l\exp(-\lambda\varepsilon\tau) D\|y\|\exp(-\lambda\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| l\exp(-\lambda\varepsilon\tau) D\|y\|\exp(-\lambda\tau)\,d\tau \le D\|y\|\exp(-\lambda t)((2C)^{-1}+lC).$$

Выбрав $l \le (2C)^{-1}$, получаем оценку (2.19).

Положим $Y^{(m)}(t,y) = X^{(m)}(t,y) - X^{(1)}(t,y)$. Покажем, что при любом m функции $Y^{(m)}$ удовлетворяют условию Липшица

$$\|Y^{(m)}(t,y) - Y^{(m)}(t,z)\| \le Dl\|y-z\|\exp(-\lambda t) \tag{2.20}$$

для достаточно малых по норме y и z.

Неравенство (2.20) также устанавливается по индукции. Первое приближение этим оценкам удовлетворяет. Из формул (2.4) получаем неравенство

$$\|Y^{(m)}(t,y)-Y^{(m)}(t,z)\| \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| \, \|f(\tau,Y^{(m-1)}(\tau,y)+X^{(1)}(\tau,y)) - f(\tau,Y^{(m-1)}(\tau,z)+X^{(1)}(\tau,z))\| \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| \, \|f(\tau,Y^{(m-1)}(\tau,y)+X^{(1)}(\tau,y)) - f(\tau,Y^{(m-1)}(\tau,z)+X^{(1)}(\tau,z))\| \, d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| l \exp(-\lambda\varepsilon\tau)(\|Y^{(m-1)}(\tau,y)-Y^{(m-1)}(\tau,z)\| + \|X^{(1)}(\tau,y)-X^{(1)}(\tau,z)\|)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| l \exp(-\lambda\varepsilon\tau)(\|Y^{(m-1)}(\tau,y)-Y^{(m-1)}(\tau,z)\| + \|X^{(1)}(\tau,y)-X^{(1)}(\tau,z)\|)\, d\tau \le$$

$$\le \left(Dl+\frac{D}{2C}\right) l \|y-z\| \left(\int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau + \int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| \exp(-\lambda(1+\varepsilon)\tau)\, d\tau \right) \le$$

$$\le Dl(lC+1/2)\|y-z\| \exp(-\lambda t) \le Dl\|y-z\| \exp(-\lambda t).$$

Проверим теперь, что при всех m и достаточно малых по норме y выполняются неравенства

$$\|X^{(m)}(t,y)-X^{(m-1)}(t,y)\| \le 2^{1-m} D\|y\| \exp(-\lambda t). \tag{2.21}$$

При $m=1$ это неравенство очевидно выполнено. Предположим по индукции, что (2.21) выполнено. Оценим норму разности $X^{(m+1)}(t,y)-X^{(m)}(t,y)$ с учетом (2.4):

$$\|X^{(m+1)}(t,y)-X^{(m)}(t,y)\| \le \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi^+(t,\tau)\| l \exp(-\lambda\varepsilon\tau) \|X^{(m)}(\tau,y)-X^{(m-1)}(\tau,y)\| \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t}^{\infty} \|\Phi^-(t,\tau)\| l \exp(-\lambda\varepsilon\tau) \|X^{(m)}(\tau,y)-X^{(m-1)}(\tau,y)\| \, d\tau \le$$

$$\le 2^{1-m} DCl\|y\| \exp(-\lambda t) \le 2^{-m} D\|y\| \exp(-\lambda t).$$

Неравенство (2.21) доказано.

Таким образом, последовательность $X^{(m)}(t,y)$ сходится равномерно. Положим $X^*(t,y) = \lim\limits_{m\to\infty} X^{(m)}(t,y)$, $Y^*(t,y) = X^*(t,y) - X^{(1)}(t,y)$. Из неравенства (2.20) вытекает

$$\|Y^*(t,y)-Y^*(t,z)\| \le Dl\|y-z\| \exp(-\lambda t). \tag{2.22}$$

Переходя в равенстве (2.4) к пределу, убеждаемся, что при любых y вектор-функции $X^*(\cdot,y)$ суть решения системы интегральных уравнений

$$X(t) = X^{(1)}(t,y) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^+(t,\tau) f(\tau,X(\tau))\, d\tau - \int\limits_{t}^{\infty} \Phi^-(t,\tau) f(\tau,X(\tau))\, d\tau$$

и, стало быть, системы (2.2). Положим $h(y) = Y^*(t_0,y)$. Из оценок (2.22) и того факта, что $X^*(t,0) = X^{(1)}(t,0) = 0$, следует, что функция $h(\cdot)$ удовлетворяет утверждению теоремы.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М., 1956. Т. 2.
2. *Perron O.* // Math. Z. 1929. Bd 29. S. 129 — 160.
3. *Гробман Д. М.* // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 1. С. 121 — 166.
4. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., 1977.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 6 января 1999 г.