Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2021. Том 62, № 3

УДК 510.67:512.56

ПРИМИТИВНАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ КЛАССА СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ

А. А. Степанова, Е. Л. Ефремов

Аннотация. Понятие слабо инъективного полигона можно рассматривать как обобщение понятия инъективного полигона. В работе описаны конечные моноиды, над которыми любой слабо инъективный полигон имеет примитивно нормальную теорию. Замечается, что примитивная нормальность класса всех главно слабо инъективных полигонов над моноидом S эквивалентна линейной упорядоченности S.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.315

Ключевые слова: моноид, полигон, слабо инъективный полигон, примитивная нормальность.

Введение

В [1] было введено понятие нормальной теории. Однако в более ранней работе Е. А. Палютина [2] это понятие использовалось в неявном виде, а именно, была доказана нормальность любой стабильной полной хорновой теории. В [3] показано, что хорнова теория с немаксимальным несчетным спектром нормальна. Понятие слабой нормальности теории, введенное в [4], является более широким, чем понятие нормальности, но более узким, чем стабильность. С. В. Судоплатовым в [5] показано, что не существует формульных критериев для нормальности или слабой нормальности теорий, подобных стабильности. Основной пример нормальных теорий — теория любого модуля, являющаяся примитивно нормальной теорией. История понятия примитивной нормальности теории восходит к применению теории классификации в универсальной алгебре [6].

Вопросам примитивной нормальности классов всех полигонов, свободных, проективных, сильно плоских полигонов посвящены работы [7–9]. В [7] дана характеризация моноидов, класс всех полигонов над которыми примитивно нормален, а именно, показано, что класс всех полигонов над моноидом S примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид. В [10] доказано, что теория любого инъективного полигона примитивно нормальна. Строение моноидов, над которыми класс всех слабо инъективных полигонов аксиоматизируем, полон, модельно полон, категоричен, стабилен, суперстабилен, описано в [11, 12].

В настоящей работе рассмотрены слабо инъективные и главно слабо инъективные полигоны, теории которых примитивно нормальны. Доказано, что

Работа Степановой А. А. выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 №075–02–2020–1482–1. Исследование Ефремова Е. Л. выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19–31–50021.

© 2021 Степанова А. А., Ефремов Е. Л.

примитивная нормальность класса всех главно слабо инъективных полигонов над моноидом S эквивалентна линейной упорядоченности S (теорема 1). Описаны конечные моноиды S, над которыми класс всех слабо инъективных полигонов примитивно нормален (теорема 2), и конечные коммутативные моноиды, над которыми класс всех слабо инъективных полигонов примитивно нормален (теорема 4), причем в случае конечного коммутативного моноида приведенная в теореме 4 характеризация моноида нагляднее, поскольку не зависит от конгруэнций полигона ${}_SS$. Показано, что теория любого слабо инъективного полигона ${}_SQ$ такого, что $sa \neq a$ для всех $a \in Q$ и $s \in S$, $s \neq 1$, примитивно нормальна (теорема 3).

§ 1. Предварительные сведения

Напомним некоторые сведения из теории полигонов и теории моделей, которые можно найти в [13–15].

Всюду ниже S будет обозначать моноид, 1 — единицу S.

Алгебраическая система $\langle A; L_S\rangle$ языка $L_S = \{s^{(1)} \mid s \in S\}$ называется (*левым*) S-*полигоном* (или *полигоном над* S, или просто *полигоном*), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Полигон $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ будем обозначать через ${}_SA$. Все рассматриваемые в работе полигоны являются левыми S-полигонами. Подсистема ${}_SB$ полигона ${}_SA$ называется *подполигоном* полигона ${}_SA$.

Под *копроизведением полигонов* ${}_SA_i$, $i \in I$, будем понимать их дизъюнктное объединение и обозначать его через $\bigsqcup\limits_{i\in I} {}_SA_i$.

Будем говорить, что гомоморфизм $\varphi : {}_SB \to {}_SC$ полигонов *продолжает* гомоморфизм $f : {}_SA \to {}_SC$ полигонов, где $A \subseteq B$, если $\varphi|_A = f$, т. е. $\varphi(a) = f(a)$ для любого $a \in A$.

Инъективным полигоном называется полигон ${}_SQ$ такой, что для любых полигонов ${}_SA$, ${}_SB$, для любого мономорфизма $\imath : {}_SA \to {}_SB$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SB \to {}_SQ$ такой, что $\overline{\varphi}\imath = \varphi$, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SA \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_SB \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ {}_SQ & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Ясно, что мономорфизм $\imath : {}_SA \to {}_SB$ в данном определении можно заменить вложением $\imath(A) \subseteq B$, а гомоморфизм $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ — гомоморфизмом $\varphi' : \imath(A) \to {}_SQ$ ($\varphi'(\imath(a)) = \varphi(a)$ для любого $a \in A$), т. е. имеет место следующее

Замечание 1. Полигон ${}_SQ$ инъективен тогда и только тогда, когда для любого полигона ${}_SB$, для любого подполигона ${}_SA$ полигона ${}_SB$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SB \to {}_SQ$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SA \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_SB \arrow[dll, "\overline{\varphi}"] \\ {}_SQ & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**Inj** обозначим класс всех инъективных полигонов над S.

Факт 1 [13, следствие 3.1.6]. *Каждый полигон может быть вложен в инъективный полигон.*

Наименьший по включению из всех инъективных полигонов, содержащих полигон ${}_SA$, будем называть *инъективной оболочкой* полигона ${}_SA$ и обозначать через ${}_S\overline{A}$.

Полигон ${}_SQ$ называется *слабо инъективным полигоном*, если для любого левого идеала I моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SI \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SI \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_SS \arrow[dll, "\overline{\varphi}"] \\ {}_SQ & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**WInj** обозначим класс всех слабо инъективных полигонов над S.

Полигон ${}_SQ$ называется *главно слабо инъективным полигоном*, если для любого главного левого идеала Ss моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SSs \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SSs \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_SS \arrow[dll, "\overline{\varphi}"] \\ {}_SQ & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**PWInj** обозначим класс всех главно слабо инъективных полигонов над S.

Замечание 2. Для моноида S имеют место следующие включения:

$$S\text{-}\mathbf{Inj} \subseteq S\text{-}\mathbf{WInj} \subseteq S\text{-}\mathbf{PWInj}.$$

Факт 2 [13, утверждение 3.3.4]. *Если ${}_SQ_i$, $i \in I$, — главно слабо инъективные подполигоны полигона ${}_SQ$, то $\bigcup\limits_{i\in I} {}_SQ_i$ — главно слабо инъективный полигон.*

Пусть ${}_SA$ — полигон. Кортежи элементов $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ из A и переменных $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ будем обозначать соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$, длину кортежа $\bar{v}$ — через $l(\bar{v})$, i-й элемент кортежа $\bar{v}$ — через $\bar{v}(i)$. Вместо $\bar{a} \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$.

Конгруэнцией полигона ${}_SA$ называется отношение эквивалентности θ на A такое, что для любых $s \in S$ и $a, b \in A$ из $\langle a, b\rangle \in \theta$ следует $\langle sa, sb\rangle \in \theta$. Будем говорить, что *конгруэнция θ полигона ${}_SA$ порождается множеством $B \subseteq A^2$*, если θ — наименьшая относительно включения конгруэнция полигона ${}_SA$, содержащая множество B. Сформулируем лемму Мальцева [14] для полигонов.

Факт 3 (лемма Мальцева). *Пусть ρ — наименьшая конгруэнция полигона ${}_SA$, содержащая $X \subseteq A^2$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a\rho b$ в том и только том случае, когда $a = b$ или существуют $m \geq 1$, элементы*

$d_1, \ldots, d_m, d'_1, \ldots, d'_m \in A$ *и* $t_1, \ldots, t_m \in S$ *такие, что* $\langle d_i, d'_i \rangle \in X$ *или* $\langle d'_i, d_i \rangle \in X$ *для любых* i, $1 \le i \le m$, *и*

$$a = t_1 d_1, \quad t_i d'_i = t_{i+1} d_{i+1},\ 1 \le i < m, \quad t_m d'_m = b.$$

Пусть ξ — предельный ординал. Множество X называется *конфинальным* в ξ, если $X \subseteq \xi$ и $\xi = \bigcup X$. *Конфинальность* ординала ξ, обозначаемая через $cf(\xi)$, есть наименьший кардинал α такой, что множество мощности α конфинально в ξ. Кардинал α называется *регулярным*, если $cf(\alpha) = \alpha$, и *сингулярным*, если $cf(\alpha) < \alpha$.

Факт 4 [15, A.26]. *Для каждого ординала* ε *существует сингулярный кардинал* $\xi > \varepsilon$.

Моноид S называется *линейно упорядоченным*, если множество $\{Ss \mid s \in S\}$ линейно упорядочено относительно включения.

Если $\mathfrak{A} = \langle A; L \rangle$ — алгебраическая система языка L, $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\bar{a} \in A$, $l(a) = l(y)$, то через $\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$ будем обозначать множество $\{\bar{b} \in A \mid \mathfrak{A} \vDash \Phi(\bar{b}, \bar{a})\}$. Формула $\exists \bar{x}(\Phi_0 \wedge \ldots \wedge \Phi_k)$, где Φ_i, $i \le k$, — атомарные формулы языка L, называется *примитивной*.

Пусть T — полная теория языка L. Как обычно, фиксируем некоторую достаточно насыщенную модель $\mathfrak{C}$ теории T с носителем C, содержащую все рассматриваемые модели теории T как элементарные подмодели. Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L, $\bar{a} \in A$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$. Множество вида $\Phi(\mathfrak{C}, \bar{a})$ называется *примитивным*. Если $\bar{b} \in C$ и $l(\bar{b}) = l(\bar{y})$, то множества $\Phi(\mathfrak{C}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathfrak{C}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*.

Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$ для любых примитивных копий X и Y. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ языка L называется *примитивно нормальной*, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ примитивно нормальна. Класс $\mathscr{K}$ алгебраических систем языка L называется *примитивно нормальным*, если теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ примитивно нормальна для любой $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$. В случае модуля M над ассоциативным кольцом R примитивные копии являются классами смежности некоторой подгруппы, поэтому теории модулей примитивно нормальны.

Факт 5 [7, теорема 1]. *Класс всех полигонов над* S *примитивно нормален тогда и только тогда, когда* S *— линейно упорядоченный моноид.*

§ 2. Примитивная нормальность класса S-PWInj

Теорема 1. *Класс* S-**PWInj** *примитивно нормален тогда и только тогда, когда* S *— линейно упорядоченный моноид.*

Доказательство. Достаточность следует из факта 5.

Необходимость. Предположим, что S — не линейно упорядоченный моноид, т. е. существуют такие $s, t \in S$, что $Ss \nsubseteq St$ и $St \nsubseteq Ss$. Через ${}_S S^i$, $1 \le i \le 3$, обозначим копию полигона ${}_S S$, через r^i — копию элемента $r \in S$ в S^i. Пусть θ — конгруэнция полигона $\bigsqcup\limits_{i=1}^{3} {}_S\overline{S}^i$, порожденная множеством $\{\langle t^1, t^2 \rangle, \langle s^2, s^3 \rangle\}$, ${}_S Q = \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{3} {}_S\overline{S}^i \right) / \theta$. Так как ограничение θ на полигон ${}_S\overline{S}^i$, $1 \le i \le 3$, — нулевая конгруэнция и ${}_S\overline{S}^i \in S$-**Inj** $\subseteq S$-**PWInj**, по факту 2 ${}_S Q \in S$-**PWInj**. Пусть

$$\Phi(x, y) \leftrightharpoons \exists z (x = sz \wedge tz = y).$$

Тогда

$$_SQ \models \Phi(s^1/\theta, t^1/\theta) \wedge \Phi(s^2/\theta, t^1/\theta) \wedge \Phi(s^2/\theta, t^3/\theta),$$

т. е. $t^1/\theta \in \Phi(s^1/\theta, {}_SQ) \cap \Phi(s^2/\theta, {}_SQ)$, $t^3/\theta \in \Phi(s^2/\theta, {}_SQ)$. В силу примитивной нормальности класса S-**PWInj** отсюда следует, что $t^3/\theta \in \Phi(s^1/\theta, {}_SQ)$, т. е.

$$_SQ \models s^1/\theta = sr/\theta \wedge tr/\theta = t^3/\theta$$

для некоторого $r \in \bigsqcup\limits_{i=1}^{3} {}_S\overline{S}^i$. Из соотношения $\langle s^1, sr\rangle \in \theta$ по лемме Мальцева следует, что $s^1 = sr$ или $s^1 = r_1u$ для некоторого $u \in \{t^1, t^2, s^2, s^3\}$. Поскольку $Ss \nsubseteq St$ и $\overline{S}^1 \cap \overline{S}^2 = \overline{S}^1 \cap \overline{S}^3 = \varnothing$, последнее невозможно. Следовательно, $s^1 = sr$. Аналогично $t^3 = tr$, т. е. $r \in \overline{S}^1 \cap \overline{S}^3 = \varnothing$; противоречие. Теорема доказана.

§ 3. Примитивная нормальность класса S-WInj

Пусть $_SA$ — полигон, $a \in A$, $s \in S \setminus \{1\}$, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$. Будем говорить, что *выполняется условие* $P_1({}_SA, a, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$, если

$a = sa$,
$a \notin \bigcup\{St_ja \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_ka \mid k \in K\}$,
$t_ja \notin \bigcup\{Sr_ka \mid k \in K\}$ для любых $j \in J$,
$r_ka \notin \bigcup\{St_ja \mid j \in J\}$ для любых $k \in K$.

Лемма 1. *Пусть существуют $u, s \in S$, $s \neq 1$, J и K — конечные множества, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$, конгруэнция ρ полигона $_SS$ такие, что*

1) *выполняется условие $P_1({}_SS/\rho, u/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$,*

2) *не существует $w \in S$ такого, что выполняется условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и существует гомоморфизм полигонов*

$$\varphi : \bigcup\{_SSt_jw \mid j \in J\} \cup \bigcup\{_SSr_kw \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_jw) = t_ju/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_kw) = r_ku/\rho$ для любых $k \in K$.

*Тогда класс S-**WInj** не примитивно нормальный.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются. Через $_SS^i$, $1 \leq i \leq 3$, обозначим копию полигона $_SS/\rho$, через $(a/\rho)^i$ — копию элемента $a/\rho \in S/\rho$ в S^i. Пусть θ — конгруэнция полигона $\bigsqcup\limits_{i=1}^{3} {}_SS^i$, порожденная множеством

$$\{\langle (t_ju/\rho)^1, (t_ju/\rho)^2\rangle \mid j \in J\} \cup \{\langle (r_ku/\rho)^2, (r_ku/\rho)^3\rangle \mid k \in K\},$$

$$_SA = \left(\bigsqcup_{i=1}^{3} {}_SS^i\right)/\theta,$$

$$\bar{b}_1(k) = (r_ku/\rho)^1/\theta,\ \bar{b}_3(k) = (r_ku/\rho)^2/\theta, \quad \text{где } k \in K,$$
$$\bar{b}_2(j) = (t_ju/\rho)^1/\theta,\ \bar{b}_4(j) = (t_ju/\rho)^3/\theta, \quad \text{где } j \in J.$$

Пусть $n_t = |J|$, $n_r = |K|$. Тогда $l(\bar{b}_1) = l(\bar{b}_3) = n_r$ и $l(\bar{b}_2) = l(\bar{b}_4) = n_t$. Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightharpoons \exists z \Psi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ — примитивная формула, где $l(\bar{x}) = n_r$, $l(\bar{y}) = n_t$,

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}, z) \leftrightharpoons \bigwedge_{k \in K} \bar{x}(k) = r_kz \ \wedge \bigwedge_{j \in J} \bar{y}(j) = t_jz \ \wedge \ sz = z.$$

Покажем, что

$$\bar{b}_1(k) \notin \bigcup\{S\bar{b}_4(j) \mid j \in J\},\ k \in K, \quad \bar{b}_4(j) \notin \bigcup\{S\bar{b}_1(k) \mid k \in K\},\ j \in J. \qquad (1)$$

Предположим, например, что $\bar{b}_1(k) = s\bar{b}_4(j)$ для некоторых $k \in K$, $j \in J$. Тогда $\langle (r_k u/\rho)^1, (s_t j/\rho)^3\rangle \in \theta$. По лемме Мальцева $(r_k u/\rho)^1 = (s_t j/\rho)^3$ или $(r_k u/\rho)^1 s' v$ для некоторого $v \in \bigcup\{(t_j u/\rho)^1 \mid j \in J\} \cup \bigcup\{(t_j u/\rho)^2 \mid j \in J\} \cup \bigcup\{(r_k u/\rho)^2 \mid k \in K\} \cup \bigcup\{(r_k u/\rho)^3 \mid k \in K\}$, что противоречит условию $P_1({}_SS/\rho, u/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$. Так как

$${}_SA \vDash \Psi(\bar{b}_1, \bar{b}_2, (u/\rho)^1/\theta), \quad {}_SA \vDash \Psi(\bar{b}_3, \bar{b}_2, (u/\rho)^2/\theta), \quad {}_SA \vDash \Psi(\bar{b}_3, \bar{b}_4, (u/\rho)^3/\theta),$$

то $\bar{b}_1 \in \Phi({}_SA, \bar{b}_2)$, $\bar{b}_3 \in \Phi({}_SA, \bar{b}_2) \cap \Phi({}_SA, b_4)$, следовательно, $\bar{b}_1 \in \Phi({}_SB, \bar{b}_2)$, $\bar{b}_3 \in \Phi({}_SB, \bar{b}_2) \cap \Phi({}_SB, \bar{b}_4)$ для любого полигона ${}_SB \supseteq {}_SA$.

Покажем, что существует содержащий ${}_SA$ не примитивно нормальный полигон ${}_SQ \in S$-**WInj** такой, что $\bar{b}_1 \notin \Phi({}_SQ, \bar{b}_4)$.

Пусть κ — сингулярный кардинал такой, что $\kappa \geq |S|$. Построим полигоны ${}_SA_\varepsilon$, $\varepsilon < \kappa$, такие, что ${}_SA_\varepsilon \subseteq {}_SA_\zeta$, $\varepsilon < \zeta < \kappa$, $\bar{b}_1 \notin \Phi({}_SA_\varepsilon, \bar{b}_4)$ и ${}_SA_\varepsilon$ удовлетворяют условию

$(*)$ для любого левого идеала I в S и любого гомоморфизма $\psi : {}_SI \longrightarrow {}_SA_\varepsilon$ существует гомоморфизм $\bar{\psi} : {}_SS \longrightarrow {}_SA_{\varepsilon+1}$, продолжающий ψ.

Полагаем ${}_SA_0 = {}_SA$. Предположим, что $\zeta < \kappa$, ζ — предельный ординал и полигоны ${}_SA_\varepsilon$, $\varepsilon < \zeta$, удовлетворяющие условию $(*)$, построены. Полагаем ${}_SA_\zeta = \bigcup\limits_{\varepsilon<\zeta} {}_SA_\varepsilon$. Ясно, что $\bar{b}_1 \notin \Phi({}_SA_\zeta, \bar{b}_4)$.

Предположим, что $\zeta = \varepsilon+1$, а полигон ${}_SA_\varepsilon$, обладающий всеми требуемыми свойствами, уже построен. Для произвольных левого идеала I в S и гомоморфизма $\psi : {}_SI \longrightarrow {}_SA_\varepsilon$ через $\Theta_{I,\psi}$ обозначим конгруэнцию $S^2 \cup \ker\psi$ полигона ${}_SS$, а через ${}_SS_{I,\psi}$ — фактор-систему ${}_SS/\Theta_{I,\psi}$. Заметим, что $|u/\Theta_{I,\psi}| = 1$ для любого $u \notin I$. Пусть

$${}_SB = \bigsqcup\{{}_SS_{I,\psi} \mid I \text{ — левый идеал в } S, \psi : {}_SI \longrightarrow {}_SA_\varepsilon \text{ — гомоморфизм}\},$$

$$\eta = B^2 \cup \{\langle u/\Theta_{I,\psi}, v/\Theta_{J,\xi}\rangle \in I/\Theta_{I,\psi} \times J/\Theta_{J,\xi} \mid I, J \text{ — левые идеалы в } S;$$
$$\psi : {}_SI \longrightarrow {}_SA_\varepsilon, \xi : {}_SJ \longrightarrow {}_SA_\varepsilon \text{ — гомоморфизмы}; \psi(u) = \xi(v)\}.$$

Нетрудно видеть, что η является конгруэнцией полигона ${}_SB$. Полагаем ${}_SA_\zeta = {}_SB/\eta$.

Далее для элемента $a \in A_\varepsilon$ рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi_a : {}_SS \longrightarrow {}_SA_\varepsilon, \quad \varphi_a : v \mapsto va.$$

Тогда $1/\Theta_{S,\varphi_a} \in S\Theta_{S,\varphi_a}$ и $(1/\Theta_{S,\varphi_a})/\eta \in A_\zeta$. Непосредственно из определения следует, что отображение

$$\beta : {}_SA_\varepsilon \longrightarrow {}_SA_\zeta, \quad \beta : a \mapsto (1/\Theta_{S,\varphi_a})/\eta$$

является изоморфным вложением. Таким образом, можно отождествить элементы a и $\beta(a)$ и считать, что ${}_SA_\varepsilon \subseteq {}_SA_\zeta$. Тогда для произвольного левого идеала I в S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SI \longrightarrow {}_SA_\varepsilon$ отображение

$$\overline{\varphi} : {}_SS \longrightarrow {}_SA_\zeta, \quad \overline{\varphi} : u \mapsto (u/\Theta_{I,\varphi})/\eta$$

является гомоморфизмом и продолжает φ.

Предположим, что $\bar{b}_1 \in \Phi({}_SA_\zeta, \bar{b}_4)$, т. е. $\bar{b}_1(k) = r_k a$ для всех $k \in K$, $\bar{b}_4(j) = t_j a$ для всех $j \in J$ и $sa = a$ для некоторого $a \in A_\zeta$. По предположению индукции $a \notin A_\varepsilon$. Тогда $a = (w/\Theta_{I,\varphi})/\eta \in A_\zeta \setminus A_\varepsilon$ для некоторого $w \in S$. Если $\langle w/\Theta_{I,\varphi}, v/\Theta_{J,\xi}\rangle \in \eta$ для некоторых $v \in S$, левого идеала J моноида S и гомоморфизма $\xi : {}_SJ \longrightarrow {}_SA_\varepsilon$, то $\varphi(w) = \xi(v) \in {}_SA_\varepsilon$ и $\langle w/\Theta_{I,\varphi}, 1/\Theta_{S,\varphi_{\varphi(w)}}\rangle \in \eta$, т. е. $a \in A_\varepsilon$; противоречие. Следовательно, $|(w/\Theta_{I,\varphi})/\eta| = 1$ и $sw = w$. Так как $\bar{b}_1(k) = r_k a$ для всех $k \in K$, $\bar{b}_4(j) = t_j a$ для всех $j \in J$ и

$$\bigcup\{S\bar{b}_1(k) \mid k \in K\} \cup \bigcup\{S\bar{b}_4(j) \mid j \in J\} \subseteq A_0,$$

то

$$w \notin \bigcup\{St_j w \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_k w \mid k \in K\}.$$

Из (1) следует, что

$$t_j w \notin \bigcup\{Sr_k w \mid k \in K\} \quad \text{для всех } j \in J,$$

$$r_k w \notin \bigcup\{St_j w \mid j \in J\} \quad \text{для всех } k \in K.$$

Следовательно, условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется. Ясно, что отображение

$$\varphi : \bigcup\{St_j w \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_k w \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho,$$

$$\varphi(t_j w) = t_j u/\rho, \quad \varphi(r_k w) = r_k u/\rho$$

является гомоморфизмом. Получили противоречие с условием 2 леммы. Следовательно, $\bar{b}_1 \notin \Phi({}_SA_\zeta, \bar{b}_4)$.

Через ${}_SQ$ обозначим полигон $\bigcup\limits_{\zeta<\kappa} A_\zeta$. Ясно, что ${}_SQ$ содержит ${}_SA$ и $\bar{b}_1 \notin \Phi({}_SQ, \bar{b}_4)$. Пусть ${}_SI \subseteq {}_SS$ и $\psi : {}_SI \longrightarrow {}_SQ$ — гомоморфизм. Так как $|I| \le |S|$, в силу сингулярности кардинала $\kappa \ge |S|$ существует $\varepsilon < \kappa$ такой, что $\psi(I) \subseteq A_\varepsilon$. По построению полигона ${}_SA_{\varepsilon+1}$ существует гомоморфизм $\bar{\psi} : {}_SS \longrightarrow {}_SA_{\varepsilon+1}$, продолжающий ψ. Следовательно, существует гомоморфизм $\bar{\psi} : {}_SS \longrightarrow {}_SQ$, продолжающий ψ. Таким образом, ${}_SQ \in S$-**WInj** и класс S-**WInj** не примитивно нормален.

Теорема 2. *Пусть S — конечный моноид. Класс S-**WInj** примитивно нормален тогда и только тогда, когда для любых элементов $u, s \in S$, $s \ne 1$, любых $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \ne \varnothing$, $\mathbf{r} \ne \varnothing$, и любой конгруэнции ρ полигона ${}_SS$ если выполняется условие $P_1({}_SS/\rho, u/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$, то существует $w \in S$ такой, что выполняется условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и существует гомоморфизм*

$$\varphi : \bigcup\{St_j w \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_k w \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_j w) = t_j u/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_k w) = r_k u/\rho$ для любых $k \in K$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполняются, ${}_SQ$ — слабо инъективный полигон. Покажем, что теория $\mathrm{Th}({}_SQ)$ примитивно нормальна. Пусть $S = \{s_0, \dots, s_m\}$, $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула, $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightharpoons \exists \bar{z} \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, где

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \leftrightharpoons \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_1} s_i^1 \bar{x}(l_i^1) = t_j^1 \bar{x}(l_j^1) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_2} s_i^2 \bar{x}(l_i^2) = t_j^2 \bar{z}(l_j^2)$$

$$\wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_3} s_i^3\bar z\big(l_i^3\big) = t_j^3\bar z\big(l_j^3\big) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_4} s_i^4\bar y\big(l_i^4\big) = t_j^4\bar z\big(l_j^4\big)$$
$$\wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_5} s_i^5\bar y\big(l_i^5\big) = t_j^5\bar y\big(l_j^5\big) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_6} s_i^6\bar y\big(l_i^6\big) = t_j^6\bar x\big(l_j^6\big),$$

$s_i^k, t_j^k \in S$ для всех $\langle i,j\rangle \in I_k$, $1 \le k \le 6$. Предположим, что

$$\bar a_2 \in \Phi(Q,\bar a_1)\cap\Phi(Q,\bar a_4),\quad \bar a_3 \in \Phi(Q,\bar a_4),\quad \bar a_1,\bar a_2,\bar a_3,\bar a_4 \in Q,$$
$$l(\bar a_2) = l(\bar a_3) = l(\bar x),\quad l(\bar a_1) = l(\bar a_4) = l(\bar y),$$

т. е.

$${}_SQ \vDash \Psi(\bar a_2,\bar a_1,\bar b_{21}) \wedge \Psi(\bar a_2,\bar a_4,\bar b_{24}) \wedge \Psi(\bar a_3,\bar a_4,\bar b_{34})$$

для некоторых $\bar b_{21},\bar b_{24},\bar b_{34} \in Q$, $l(\bar b_{21}) = l(\bar b_{24}) = l(\bar b_{34}) = l(\bar z)$. Покажем, что $\bar a_3 \in \Phi(Q,\bar a_1)$. Ясно, что

$${}_SQ \vDash \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_1} s_i^1\bar a_3\big(l_i^1\big) = t_j^1\bar a_3\big(l_j^1\big) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_5} s_i^5\bar a_1\big(l_i^5\big) = t_j^5\bar a_1\big(l_j^5\big).$$

Пусть $\langle i,j\rangle \in I_6$. Тогда

$$s_i^6\bar a_1\big(l_i^6\big) = t_j^6\bar a_2\big(l_j^6\big) = s_i^6\bar a_4\big(l_i^6\big) = t_j^6\bar a_3\big(l_j^6\big).$$

Следовательно,

$${}_SQ \vDash \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_6} s_i^6\bar a_1\big(l_i^6\big) = t_j^6\bar a_3\big(l_j^6\big).$$

Введем обозначения:

$$M = \{\bar u(l) \mid \bar u \in \{\bar x,\bar y,\bar z\},\ l \le l(\bar u)\},$$

$$\Theta(\bar x,\bar y,\bar z) \leftrightharpoons \Psi(\bar x,\bar y,\bar z) \wedge \bigwedge\{s\bar z(l) = s'\bar z(l) \mid s,s' \in S,\ l \le l(\bar z),$$
$$s\bar b_{34}(l) = s'\bar b_{34}(l),\ s\bar b_{24}(l) = s'\bar b_{24}(l),\ s\bar b_{21}(l) = s'\bar b_{21}(l)\}.$$

На множестве M определим отношение η следующим образом: для любых $\bar u_1(l_1)$, $\bar u_2(l_2) \in M$

$$\langle \bar u_1(l_1),\bar u_2(l_2)\rangle \in \eta \iff \text{существуют } n \in \omega,$$
$$\bar u^0(l^0),\dots,\bar u^n(l^n) \in M, r_1,r_2,r_1^i,r_2^i \in S,\ 0 \le i \le n, \text{ такие, что}$$
$$\Theta(\bar x,\bar y,\bar z) \vdash r_1\bar u_1(l_1) = r_1^0\bar u^0(l^0) \wedge \bigwedge_{0\le i<n} r_2^i\bar u^i(l^i)$$
$$= r_1^{i+1}\bar u^{i+1}(l^{i+1}) \wedge r_2^n\bar u^n(l^n) = r_2\bar u_2(l_2).$$

Ясно, что η — отношение эквивалентности на M. Для доказательства теоремы достаточно для любого $M' \in M/\eta$ и для любых $\bar z(l) \in M'$ найти $\bar b(l)$ такие, что

$${}_SQ \vDash \bigwedge_{\substack{\langle i,j\rangle\in I_2,\\ \bar z(l_j^2)\in M'}} s_i^2\bar a_3\big(l_i^2\big) = t_j^2\bar b\big(l_j^2\big) \wedge \bigwedge_{\substack{\langle i,j\rangle\in I_3,\\ \bar z\left(l_i^3\right)\in M',\\ \bar z\left(l_j^3\right)\in M'}} s_i^3\bar b\big(l_i^3\big)$$
$$= t_j^3\bar b\big(l_j^3\big) \wedge \bigwedge_{\substack{\langle i,j\rangle\in I_4,\\ \bar z\left(l_j^4\right)\in M'}} s_i^4\bar a_1\big(l_i^4\big) = t_j^4\bar b\big(l_j^4\big). \quad (2)$$

Элемент $r\bar{z}(l)$, где $r \in S$, $\bar{z}(l) \in M'$, назовем *петлей*, если $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash sr\bar{z}(l) = r\bar{z}(l)$ для некоторого $s \in S \setminus \{1\}$ и для любых $s', s'' \in S$ и некоторых $\bar{u}(l_1), \bar{u}(l_2) \in M'$ из

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash \neg(s'r\bar{z}(l) = r\bar{z}(l)) \wedge \neg(s''r\bar{z}(l) = r\bar{z}(l)) \wedge s'r\bar{z}(l) = s_1\bar{u}(l_1) \wedge s''r\bar{z}(l) = s_2\bar{u}(l_2)$$

следует

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'r\bar{z}(l) = ts''r\bar{z}(l) \vee ts'r\bar{z}(l) = s''r\bar{z}(l)$$

для некоторого $t \in S$.

Покажем идею доказательства на двух примерах.

Пример 1. Пусть

$$\Theta(x, y, z) \leftrightharpoons \Psi(x, y, z) \leftrightharpoons s_1x = t_1z \wedge s_2y = t_2z,$$

$$\Theta \nvdash t_1z = z, \quad \Theta \nvdash t_2z = z, \tag{3}$$

$${}_SQ \vDash \Theta(a_2, a_1, b_{21}) \wedge \Theta(a_2, a_4, b_{24}) \wedge \Theta(a_3, a_4, b_{34}). \tag{4}$$

Необходимо построить элемент $b \in Q$ такой, что ${}_SQ \vDash \Theta(a_3, a_1, b)$. Ясно, что если такой $b \in Q$ существует, то $t_1b = s_1a_3$ и $t_2b = s_2a_1$. Введем обозначения: $c_1 = s_1a_3 = t_1b_{34}$, $c_2 = s_2a_1 = t_2b_{21}$. Построим гомоморфизм $\varphi : {}_SSt_1 \cup {}_SSt_2 \to {}_SQ$ следующим образом: $\varphi(st_1) = sc_1$ и $\varphi(st_2) = sc_2$ для любых $s \in S$. Из слабой инъективности полигона ${}_SQ$ следует существование гомоморфизма $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающего φ. Полагаем $b = \varphi(1)$.

Пример 2. Пусть

$$\Theta(x, y, z) \leftrightharpoons \Psi(x, y, z) \leftrightharpoons s_1x = t_1z \wedge s_2y = t_2z \wedge t_3z = t_4z$$

и выполняются условия (3), (4). Для построения элемента $b \in Q$ такого, что ${}_SQ \vDash \Theta(a_3, a_1, b)$, строим элементы c_1, c_2 так же, как в примере 1, и элемент c_3 — следующим образом: если t_3z — петля или $\Theta \nvdash rt_3z = t_3z$ для любого $r \in S$, то полагаем $c_3 = t_3b_{34}$ в случае $\Theta \vdash r_1x = r_2t_3z$ для некоторых $r_1, r_2 \in S$ и $c_3 = t_3b_{21}$ в противном случае; если t_3z не петля и $\Theta \vdash rt_3z = t_3z$ для некоторого $r \in S$, то для построения элемента c_3 используем условие P_1 теоремы. Строим гомоморфизм $\varphi : {}_SSt_1 \cup {}_SSt_2 \cup {}_SSt_3 \to {}_SQ$ следующим образом: $\varphi(st_1) = sc_1$, $\varphi(st_2) = sc_2$, $\varphi(st_3) = sc_3$ для любых $s \in S$. Элемент $b \in Q$ находим, как в примере 1.

Пусть $M' \in M/\eta$ такой, что $\bar{z}(l) \in M'$ для некоторого $l \leq l(\bar{z})$, $M' = \{\bar{u}_0(l_0), \ldots, \bar{u}_n(l_n)\}$. Можно считать, что $\bar{u}_i(l_i) = \bar{x}(l_i)$ для $0 \leq i \leq n_1$, $l_i \leq l(\bar{x})$, $\bar{u}_i(l_i) = \bar{z}(l_i)$ для $n_1 + 1 \leq i \leq n_2$, $l_i \leq l(\bar{z})$, $\bar{u}_i(l_i) = \bar{y}(l_i)$ для $n_2 + 1 \leq i \leq n$, $l_i \leq l(\bar{y})$.

Для всех элементов $\bar{z}(l) \in M'$ зафиксируем все петли: $r_0^l\bar{z}(l), \ldots, r_{n_l}^l\bar{z}(l)$.

Построение элементов $\bar{b}(l)$ для переменных $\bar{z}(l) \in M'$ разобьем на несколько этапов.

Для $\bar{z}(l) \in M'$ и $s_i \in S$, где $0 \leq i \leq m$, через c_i^l обозначим элементы полигона ${}_SQ$ со следующими свойствами:

$R_i^x(s, s', l, l') : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'\bar{x}(l') = ss_i\bar{z}(l) \Longrightarrow s'\bar{a}_3(l') = sc_i^l$,

$R_i^y(s, s', l, l') : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'\bar{y}(l') = ss_i\bar{z}(l) \Longrightarrow s'\bar{a}_1(l') = sc_i^l$,

$R_{i,j}^z(s, s', l) : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = ss_i\bar{z}(l) \Longrightarrow s'c_j^l = sc_i^l$, где $j < i$,

$R_i^z(s, s', l) : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s's_i\bar{z}(l) = ss_i\bar{z}(l) \Longrightarrow s'c_i^l = sc_i^l$.

Кроме того, если $\bar{z}(l') \in M'$, $r_k^{l'} \in \{r_0^{l'}, \dots, r_{n_{l'}}^{l'}\}$, т. е. $r_k^{l'}\bar{z}(l')$ — петля, то элементы c_i^l удовлетворяют условиям

$L_{i,k}(s, s', l, l') : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s' r_k^{l'} \bar{z}(l') = s s_i \bar{z}(l) \Longrightarrow s' c_k^{l'} = s c_i^l.$

Если элемент $\bar{b}(l')$ уже построен, то элементы c_i^l удовлетворяют свойствам

$B_i(s, s', l, l') : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s' \bar{z}(l') = s s_i \bar{z}(l) \Longrightarrow s' \bar{b}(l') = s c_i^l.$

Этап 1. Построение элементов $c_i^l \in Q$ для любых $\bar{z}(l) \in M'$ и $s_i \in \{r_0^l, \dots, r_{n_l}^l\}$, т. е. для любой петли $s_i \bar{z}(l)$.

Достаточно построить элементы $c_i^l \in Q$ только для таких $s_i \in \{r_0^l, \dots, r_{n_l}^l\}$, что для любых $s_j \in \{r_0^l, \dots, r_{n_l}^l\}$, $s_j \neq s_i$, из соотношения $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \nvdash s_i \bar{z}(l) = s_j \bar{z}(l)$ следует $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \nvdash s_i \bar{z}(l) = t s_j \bar{z}(l)$ для любого $t \in S$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \nvdash t_1 \bar{y}(l_1) = t s_i \bar{z}(l)$ для любых $t_1, t \in S$, $\bar{y}(l_1) \in M'$. Полагаем $c_i^l = s_i \bar{b}_{34}(l)$.

Случай 2. Случай 1 не выполняется и $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \nvdash t_2 \bar{x}(l_2) = t_3 s_i \bar{z}(l)$ для любых $t_2, t_3 \in S$, $\bar{x}(l_2) \in M'$. Полагаем $c_i^l = s_i \bar{b}_{21}(l)$.

Случай 3. Случаи 1 и 2 не выполняются, т. е.

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash r_1 \bar{x}(l_1) = r_2 s_i \bar{z}(l) \wedge t_1 \bar{y}(l_2) = t_2 s_i \bar{z}(l)$$

для некоторых $r_1, r_2, t_1, t_2 \in S$, $\bar{x}(l_1), \bar{y}(l_2) \in M'$. Так как $s_i \bar{z}(l)$ — петля, существует $t \in S$ такой, что

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t r_2 s_i \bar{z}(l) = t_2 s_i \bar{z}(l) \vee r_2 s_i \bar{z}(l) = t t_2 s_i \bar{z}(l).$$

Случай 3.1. Можно выбрать $r_1, r_2 \in S$, удовлетворяющие следующему условию:

$$(*) \quad \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash r_1 \bar{x}(l_1) = r_2 s_i \bar{z}(l) \text{ и } \forall t_1, t_2 \in S (\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1 \bar{y}(l_2) = t_2 s_i \bar{z}(l) \Rightarrow \exists t \in S (\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t r_2 s_i \bar{z}(l) = t_2 s_i \bar{z}(l))).$$

Полагаем $c_i^l = s_i \bar{b}_{34}(l)$.

Случай 3.2. Случай 3.1 не выполняется, т. е. для любых $r_1, r_2 \in S$ условие $(*)$ не выполняется. Полагаем $c_i^l = s_i \bar{b}_{21}(l)$.

Заметим, что $c_i^l \in \{s_i \bar{b}_{21}(l), s_i \bar{b}_{34}(l)\}$ для любой петли $s_i \bar{z}(l)$, где $\bar{z}(l) \in M'$.

Покажем выполнение свойств $R_i^x(s, s', l, l')$, $R_i^y(s, s', l, l')$, $R_{i,j}^z(s, s', l)$, $R_i^z(s, s', l)$, $L_{i,k}(s, s', l, l')$ для построенных элементов c_i^l. Пусть, например, $c_i^l = s_i \bar{b}_{21}(l)$ (если $c_i^l = s_i \bar{b}_{34}(l)$, то рассуждения аналогичны). Тогда выполняется либо случай 2, либо случай 3.2. Свойства $R_i^y(s, s', l, l')$ и $R_i^z(s, s', l)$ выполняются очевидно.

Покажем выполнение свойства $R_i^x(s, s', l, l')$. Предположим, что

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s' \bar{x}(l') = s s_i \bar{z}(l).$$

Так как случай 2 невозможен, имеет место случай 3.2. Тогда для s', s существуют такие $t_1, t_2, t \in S$, $\bar{y}(l_2) \in M'$, что

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1 \bar{y}(l_2) = t_2 s_i \bar{z}(l) \wedge s s_i \bar{z}(l) = t t_2 s_i \bar{z}(l).$$

Поскольку

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s' \bar{x}(l') = t t_2 s_i \bar{z}(l) \wedge t t_2 s_i \bar{z}(l) = t t_1 \bar{y}(l_2),$$

то

$$s' \bar{a}_3(l') = t t_1 \bar{a}_1(l_2) = t t_2 s_i \bar{b}_{21}(l) = t t_2 c_i^l = s c_i^l$$

и свойство $R_i^x(s,s',l,l')$ выполняется.

Докажем свойства $R_{i,j}^z(s,s',l)$. Пусть $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = ss_i\bar{z}(l)$. Достаточно рассмотреть случай $c_j^l = s_j\bar{b}_{34}(l)$, т. е. c_j^l удовлетворяет случаю 1 или случаю 3.1. Если c_j^l удовлетворяет случаю 1, то, поскольку $s_i\bar{z}(l)$ — петля, c_i^l также удовлетворяет случаю 1; противоречие. Следовательно, c_j^l удовлетворяет случаю 3.1 и, поскольку $s_j\bar{z}(l)$ — петля, c_i^l удовлетворяет случаю 3.2. Так как c_j^l удовлетворяет случаю 3.1, существуют $r_1, r_2 \in S$, удовлетворяющие условию $(*)$. Пусть $t \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = tr_2s_j\bar{z}(l)$. Тогда из того, что c_i^l удовлетворяет случаю 3.2 и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash tr_1\bar{x}(l_1) = ss_i\bar{z}(l)$, следует, что существуют такие $t_1, t_2, t' \in S$, $\bar{y}(l_2) \in M'$, что

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1\bar{y}(l_2) = t_2s_i\bar{z}(l) \wedge ss_i\bar{z}(l) = t't_2s_i\bar{z}(l).$$

Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash tr_1\bar{x}(l_1) = t't_1\bar{y}(l_2)$. Поэтому

$$s'c_j^l = s's_j\bar{b}_{34}(l) = ss_i\bar{b}_{34}(l) = tr_1\bar{a}_3(l_1) = t't_1\bar{a}_4(l_2) = tr_1\bar{a}_2(l_1) = ss_i\bar{b}_{21}(l) = sc_i^l$$

и свойство $R_{i,j}^z(s,s',l)$ выполняется. Пусть $t \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash ts's_j\bar{z}(l) = r_2s_j\bar{z}(l)$. Так как $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash tss_i\bar{z}(l) = r_1\bar{x}(l_1)$ и c_i^l удовлетворяет случаю 3.2, существуют такие $t_1, t_2 \in S$, $\bar{y}(l_2) \in M'$, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1\bar{y}(l_2) = t_2s_i\bar{z}(l)$. Поскольку $s_i\bar{z}(l)$ — петля, существует $t' \in S$ такой, что

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t'ss_i\bar{z}(l) = t_2s_i\bar{z}(l) \vee ss_i\bar{z}(l) = t't_2s_i\bar{z}(l).$$

Предположим, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t'ss_i\bar{z}(l) = t_2s_i\bar{z}(l)$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1\bar{y}(l_2) = t's's_j\bar{z}(l)$. Так как c_j^l удовлетворяет случаю 3.1, существует $t'' \in S$ такой, что

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t's's_j\bar{z}(l) = t''r_2s_j\bar{z}(l);$$

противоречие с тем, что c_i^l удовлетворяет случаю 3.2. Следовательно,

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash ss_i\bar{z}(l) = t't_2s_i\bar{z}(l).$$

Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t't_1\bar{y}(l_2) = s's_j\bar{z}(l)$. Так как c_j^l удовлетворяет случаю 3.1, существует $t'' \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = t''r_2s_j\bar{z}(l)$. Следовательно, $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t''r_1\bar{x}(l_1) = t't_1\bar{y}(l_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} s'c_j^l = s's_j\bar{b}_{34}(l) = t't_1\bar{a}_4(l_2) = t''r_1\bar{a}_2(l_1) \\ = t''r_2s_j\bar{b}_{21}(l) = s's_j\bar{b}_{21}(l) = ss_i\bar{b}_{21}(l) = sc_i^l \end{aligned}$$

и свойство $R_{i,j}^z(s,s',l)$ выполняется.

Покажем выполнение свойства $L_{i,k}(s,s',l,l')$. Пусть $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s'r_k^{l'}\bar{z}(l') = ss_i\bar{z}(l)$. Достаточно рассмотреть случай $c_k^{l'} = r_k^{l'}\bar{b}_{34}(l')$, т. е. $c_k^{l'}$ удовлетворяет случаю 1 или случаю 3.1. Если $c_k^{l'}$ удовлетворяет случаю 1, то, поскольку $s_i\bar{z}(l)$ — петля, c_i^l также удовлетворяет случаю 1; противоречие. Следовательно, $c_k^{l'}$ удовлетворяет случаю 3.1 и, поскольку $r_k^{l'}\bar{z}(l')$ — петля, c_i^l удовлетворяет случаю 3.2. Так как $c_k^{l'}$ удовлетворяет случаю 3.1, существуют $r_1, r_2 \in S$, удовлетворяющие условию $(*)$. Пусть $t \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s'r_k^{l'}\bar{z}(l') = tr_2r_k^{l'}\bar{z}(l')$. Тогда из того, что c_i^l удовлетворяет случаю 3.2 и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash tr_1\bar{x}(l_1) = ss_i\bar{z}(l)$, следует, что существуют такие $t_1, t_2, t' \in S$, $\bar{y}(l_2) \in M'$, что

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1\bar{y}(l_2) = t_2s_i\bar{z}(l) \wedge ss_i\bar{z}(l) = t't_2s_i\bar{z}(l).$$

Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash tr_1\bar{x}(l_1) = t't_1\bar{y}(l_2)$. Поэтому

$$s'c_k^{l'} = s'r_k^{l'}\bar{b}_{34}(l') = ss_i\bar{b}_{34}(l) = tr_1\bar{a}_3(l_1) = t't_1\bar{a}_4(l_2) = tr_1\bar{a}_2(l_1) = ss_i\bar{b}_{21}(l) = sc_i^l$$

и свойство $L_{i,k}(s,s',l,l')$ выполняется. Пусть $t \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash ts'r_k^{l'}\bar{z}(l') = r_2r_k^{l'}\bar{z}(l')$. Так как $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash tss_i\bar{z}(l) = r_1\bar{x}(l_1)$ и c_i^l удовлетворяет случаю 3.2, существуют такие $t_1,t_2 \in S$, $\bar{y}(l_2) \in M'$, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1\bar{y}(l_2) = t_2s_i\bar{z}(l)$. Поскольку $s_i\bar{z}(l)$ — петля, существует $t' \in S$ такой, что

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t'ss_i\bar{z}(l) = t_2s_i\bar{z}(l) \vee ss_i\bar{z}(l) = t't_2s_i\bar{z}(l).$$

Предположим, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t'ss_i\bar{z}(l) = t_2s_i\bar{z}(l)$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1\bar{y}(l_2) = t's'r_k^{l'}\bar{z}(l')$. Так как $c_k^{l'}$ удовлетворяет случаю 3.1, существует $t'' \in S$ такой, что

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t's'r_k^{l'}\bar{z}(l') = t''r_2r_k^{l'}\bar{z}(l');$$

противоречие с тем, что c_i^l удовлетворяет случаю 3.2. Следовательно,

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash ss_i\bar{z}(l) = t't_2s_i\bar{z}(l).$$

Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t't_1\bar{y}(l_2) = s'r_k^{l'}\bar{z}(l')$. Так как $c_k^{l'}$ удовлетворяет случаю 3.1, существует $t'' \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s'r_k^{l'}\bar{z}(l') = t''r_2r_k^{l'}\bar{z}(l')$. Следовательно, $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t''r_1\bar{x}(l_1) = t't_1\bar{y}(l_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} s'c_k^{l'} = s'r_k^{l'}\bar{b}_{34}(l') &= t't_1\bar{a}_4(l_2) \\ &= t''r_1\bar{a}_2(l_1) = t''r_2r_k^{l'}\bar{b}_{21}(l') = s'r_k^{l'}\bar{b}_{21}(l') = ss_i\bar{b}_{21}(l) = sc_i^l \end{aligned}$$

и свойство $L_{i,k}(s,s',l,l')$ выполняется.

Таким образом, для любых $\bar{z}(l) \in M'$ и $s_i \in \{r_0^l,\dots,r_{n_l}^l\}$ элементы $c_i^l \in Q$ построены.

Зафиксируем $\bar{z}(l^1) \in M'$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{y}(l') = r_0\bar{z}(l^1)$ для некоторых $r_0,r' \in S$, $\bar{y}(l') \in M'$, $l' \le l(\bar{y})$. Если такого $\bar{z}(l^1)$ не существует, то выберем $\bar{z}(l^1)$ такое, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{x}(l') = r_0\bar{z}(l^1)$ для некоторых $r_0,r' \in S$, $\bar{x}(l') \in M'$, $l' \le l(\bar{x})$.

Этап 2. Построение элемента $\bar{b}(l^1)$ для $\bar{z}(l^1)$.

Пусть $l = l^1$. Для удобства построения элементов $c_0^l,\dots,c_m^l$ перенумеруем множество S, считая, что $s_i = r_i^l$ для $i \in \{0,\dots,n_l\}$, причем если $n_l+1=0$, т. е. множество $\{r_0^l,\dots,r_{n_l}^l\}$ пусто, то $s_0 = r_0$. Кроме того, можно ограничиться рассмотрением элементов $s_i \in S$, $i > n_l$, таких, что $s_i \ne 1$ и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \nvdash s_i\bar{z}(l) = ts_j\bar{z}(l)$ для любых $j > n_l$, $j \ne i$, $t \in S$.

Для случая $n_l+1=0$ полагаем $c_0^l = s_0\bar{b}_{21}(l) = r'\bar{a}_1(l') \in Q$. Ясно, что свойства $R_0^x(s,s',l,l')$, $R_0^y(s,s',l,l')$, $R_0^z(s,s',l)$ выполняются. Покажем выполнение свойств $L_{0,k}(s,s',l,l_1)$. Пусть $r_k^{l_1}\bar{z}(l_1)$ — петля и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s'r_k^{l_1}\bar{z}(l_1) = ss_0\bar{z}(l)$. Если $c_k^{l_1} = r_k^{l_1}\bar{b}_{21}(l_1)$, то равенство $s'c_k^{l'} = sc_i^l$ очевидно. Пусть $c_k^{l_1} = r_k^{l_1}\bar{b}_{34}(l_1)$. Тогда элемент $c_k^{l_1}$ выбирается в соответствии со случаями 1 или 3.1. Так как $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash sr'\bar{y}(l') = s'r_k^{l_1}\bar{z}(l_1)$, случай 1 невозможен. Следовательно, для петли $r_k^{l_1}\bar{z}(l_1)$ можно выбрать r_1,r_2, удовлетворяющие условию $(*)$. Тогда существует $r \in S$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s'r_k^{l_1}\bar{z}(l_1) = rr_2r_k^{l_1}\bar{z}(l_1)$. Отсюда следует $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash rr_1\bar{x}(l_2) = sr'\bar{y}(l')$ и $rr_1\bar{a}_3(l_2) = sr'\bar{a}_1(l')$. Таким образом,

$$s'c_k^{l'} = s'r_k^{l_1}\bar{b}_{34}(l_1) = rr_2r_k^{l_1}\bar{b}_{34}(l_1) = rr_1\bar{a}_3(l_2) = sr'\bar{a}_1(l') = sc_i^l,$$

т. е. $s'c_k^{l'} = sc_i^l$ и свойства $L_{0,k}(s, s', l, l_1)$ выполняются.

Пусть элементы $c_0^l, \dots, c_i^l \in Q$, где $i \geq n_l$, построены, причем для любых $j \leq i$ свойства $R_j^x(s, s', l, l')$, $R_j^y(s, s', l, l')$, $R_{j,j'}^z(s, s', l)$, $R_j^z(s, s', l)$ и $L_{j,k}^z(s, s', l, l')$ выполняются. Построим элемент c_{i+1}^l.

Рассмотрим два случая.

Случай а. Предположим, что $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \nvdash ss_{i+1}\bar{z}(l) = s_{i+1}\bar{z}(l)$ для любого $s \in R$, $s \neq 1$. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \bigcup\{{}_S Srs_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists \bar{u} \in \{\bar{x}, \bar{y}\}\\ \exists l' \leq l(\bar{u}) : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'\bar{u}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l)\}\\ \cup \bigcup\{{}_S Srs_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists j < i+1 : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = rs_{i+1}\bar{z}(l)\}\\ \cup \bigcup\big\{{}_S Srs_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists l' \leq l(\bar{z})\\ \exists k \leq n_{l'} : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'r_k^{l'}\bar{z}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l)\big\} \to {}_S Q\end{aligned}$$

такое, что для любого $t \in S$

$$\varphi_1(trs_{i+1}) = \begin{cases} ts'\bar{a}_3(l'), & \text{если } \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'\bar{x}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l),\\ ts'\bar{a}_1(l'), & \text{если } \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'\bar{y}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l),\\ ts'c_j^l, & \text{если } \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = rs_{i+1}\bar{z}(l),\ j < i+1,\\ ts'c_k^{l'}, & \text{если } \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'r_k^{l'}\bar{z}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l),\ k \leq n_{l'}. \end{cases}$$

Покажем, что определение отображения φ_1 корректно. Пусть $t_1r_1s_{i+1} = t_2r_2s_{i+1}$, где $\varphi_1(t_1r_1s_{i+1})$ и $\varphi_1(t_2r_2s_{i+1})$ определены. Покажем, что

$$\varphi_1(t_1r_1s_{i+1}) = \varphi_1(t_2r_2s_{i+1}).$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай а.1. $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_1\bar{x}(l_1) = r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_1r_1s_{i+1}) = t_1s_1\bar{a}_3(l_1)$, и $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_2\bar{y}(l_2) = r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_2r_2s_{i+1}) = t_2s_2\bar{a}_1(l_2)$. Тогда $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1s_1\bar{x}(l_1) = t_2s_2\bar{y}(l_2)$. Следовательно, $t_1s_1\bar{a}_3(l_1) = t_2s_2\bar{a}_1(l_2)$.

Случай а.2. $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_1\bar{x}(l_1) = r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_1r_1s_{i+1}) = t_1s_1\bar{a}_3(l_1)$, и $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_2s_j\bar{z}(l) = r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_2r_2s_{i+1}) = t_2s_2c_j^l$, где $j < i+1$. Тогда $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1s_1\bar{x}(l_1) = t_2s_2s_j\bar{z}(l)$. Так как элемент c_j^l обладает свойством $R_j^x(t_2s_2, t_1s_1, l, l_1)$, то $t_1s_1\bar{a}_3(l_1) = t_2s_2c_j^l$.

Случай а.3. $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_1\bar{x}(l_1) = r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_1r_1s_{i+1}) = t_1s_1\bar{a}_3(l_1)$, и $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_2r_k^{l_2}\bar{z}(l_2) = r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_2r_2s_{i+1}) = t_2s_2c_k^{l_2}$, где $k \leq n_{l_2}$. Тогда $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1s_1\bar{x}(l_1) = t_2s_2r_k^{l_2}\bar{z}(l_2)$. Так как элемент $c_k^{l_2}$ обладает свойством $R_k^x(t_2s_2, t_1s_1, l_2, l_1)$, то $t_1s_1\bar{a}_3(l_1) = t_2s_2c_k^{l_2}$.

Случай а.4. $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_1s_j\bar{z}(l) = r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_1r_1s_{i+1}) = t_1s_1c_j^l$, и $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s_2s_k\bar{z}(l) = r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_2r_2s_{i+1}) = t_2s_2c_k^l$, где $j \leq k < i+1$. Тогда $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1s_1s_j\bar{z}(l) = t_2s_2s_k\bar{z}(l)$. Возможны два случая.

Случай а.4.1. $j < k$. Так как элемент c_k^l обладает свойством $R_{k,j}^z(t_2s_2, t_1s_1, l)$, то $t_1s_1c_j^l = t_2s_2c_k^l$.

Случай а.4.2. $j = k$. Так как элемент $c_j^l = c_k^l$ обладает свойством $R_j^z(t_2s_2, t_1s_1, l)$, то $t_1s_1c_j^l = t_2s_2c_k^l$.

Случай a.5. $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_1 s_j \bar{z}(l) = r_1 s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_1 r_1 s_{i+1}) = t_1 s_1 c_j^l$, и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_2 r_k^{l_1}\bar{z}(l_1) = r_2 s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_2 r_2 s_{i+1}) = t_2 s_2 c_k^{l_1}$, где $k \le n_{l_1}$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1 s_1 s_j \bar{z}(l) = t_2 s_2 r_k^{l_1}\bar{z}(l_1)$. Так как элемент c_j^l обладает свойством $L_{j,k}(t_1 s_1, t_2 s_2, l, l_1)$, то $t_1 s_1 c_j^l = t_2 s_2 c_k^{l_1}$.

Случай a.6. $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_1 r_j^{l_1}\bar{z}(l_1) = r_1 s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_1 r_1 s_{i+1}) = t_1 s_1 c_j^{l_1}$, где $j \le n_{l_1}$, и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_2 r_k^{l_2}\bar{z}(l_2) = r_2 s_{i+1}\bar{z}(l)$, т. е. $\varphi_1(t_2 r_2 s_{i+1}) = t_2 s_2 c_k^{l_2}$, где $k \le n_{l_2}$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1 s_1 r_j^{l_1}\bar{z}(l_1) = t_2 s_2 r_k^{l_2}\bar{z}(l_2)$. Так как элемент $c_j^{l_1}$ обладает свойством $L_{j,k}(t_1 s_1, t_2 s_2, l_1, l_2)$, то $t_1 s_1 c_j^{l_1} = t_2 s_2 c_k^{l_2}$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично случаям a.2 и a.3.

Таким образом, определение отображения φ_1 корректно. Очевидно, что φ_1 — гомоморфизм полигонов. Поскольку ${}_SQ$ — слабо инъективный полигон, существует гомоморфизм $\overline{\varphi}_1$, продолжающий φ_1.

На S определим следующее отношение σ:

$$s\sigma s' \Longleftrightarrow \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s s_{i+1}\bar{z}(l) = s' s_{i+1}\bar{z}(l),$$

где $s, s' \in S$. Ясно, что σ — эквивалентность на S. Пусть $S/\sigma = \{s^1/\sigma, \dots, s^k/\sigma\}$. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned}\varphi_2 : \bigcup\{{}_S S r s_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists s' \in S\, \exists \bar{u} \in \{\bar{x},\bar{y}\}\\ \exists l' \le l(\bar{u}) : \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s'\bar{u}(l') = r s_{i+1}\bar{z}(l)\}\\ \cup \bigcup\{{}_S S r s_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists j < i+1 : \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s' s_j \bar{z}(l) = r s_{i+1}\bar{z}(l)\}\\ \cup \bigcup\big\{{}_S S r s_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists l' \le l(\bar{z})\\ \exists k \le n_{l'} : \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s' r_k^{l'}\bar{z}(l') = r s_{i+1}\bar{z}(l)\big\}\\ \cup \bigcup\{{}_S S r s_{i+1} \mid r \in S \text{ и } \exists j \in \{1,\dots,k\} : r\sigma s^j\} \to {}_SQ\end{aligned}$$

такое, что для любого $t \in S$

$$\varphi_2(t r s_{i+1}) = t s^j \overline{\varphi}_1(s_{i+1}), \quad \text{если } r\sigma s^j \text{ для некоторого } j \in \{1,\dots,k\}.$$

Определение отображения φ_2 корректно, так как из $r\sigma r'$ следует $\varphi_2(r s_{i+1}) = \varphi_2(r' s_{i+1})$. Очевидно, что φ_2 — гомоморфизм полигонов. Поскольку ${}_SQ$ — слабо инъективный полигон, существует гомоморфизм $\bar{\varphi}_2 : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий φ_2. Пусть $c_{i+1}^l = \bar{\varphi}_2(s_{i+1}) \in Q$. Из построения элемента c_{i+1}^l следует, что свойства $R_{i+1}^x(s,s',l,l')$, $R_{i+1}^y(s,s',l,l')$, $R_{i+1,j}^z(s,s',l)$, $R_{i+1}^z(s,s',l)$ и $L_{i+1,k}^z(s,s',l,l')$ выполняются.

Случай b. Предположим, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s s_{i+1}\bar{z}(l) = s_{i+1}\bar{z}(l)$ для некоторого $s \in S$, $s \ne 1$. Поскольку $s_{i+1}\bar{z}(l)$ не петля, существуют $s', s'' \in S$ такие, что

$$\begin{aligned}\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash \neg(s' s_{i+1}\bar{z}(l) = s_{i+1}\bar{z}(l)) \wedge \neg(s'' s_{i+1}\bar{z}(l) = s_{i+1}\bar{z}(l))\\ \wedge\, s' s_{i+1}\bar{z}(l) = s_1\bar{u}(l_1) \wedge s'' s_{i+1}\bar{z}(l) = s_2\bar{u}(l_2)\end{aligned}$$

для некоторых $\bar{u}(l_1), \bar{u}(l_2) \in M'$ и

$$\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \nvdash s' s_{i+1}\bar{z}(l) = t s'' s_{i+1}\bar{z}(l), \quad \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \nvdash t s' s_{i+1}\bar{z}(l) = s'' s_{i+1}\bar{z}(l)$$

для любого $t \in S$. Определим множества $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\}$ и $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\}$ следующим образом: пусть $s' \in \mathbf{t}$, $s'' \in \mathbf{r}$ и для любого $s''' \in S$ такого, что $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'''s_{i+1}z(l) = r'\bar{u}(l')$ для некоторых $r' \in S$, $\bar{u}(l') \in M'$, если

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \nvdash s's_{i+1}\bar{z}(l) = ts'''s_{i+1}\bar{z}(l) \vee ts's_{i+1}\bar{z}(l) = s'''s_{i+1}\bar{z}(l)$$

для любого $t' \in S$, то $s''' \in \mathbf{r}$, в противном случае $s''' \in \mathbf{t}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\bigcup\{St \mid t \in \mathbf{t}\} \cup \bigcup\{Sr \mid r \in \mathbf{r}\} \\
&= \bigcup\{Ss \mid s \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists \bar{u} \in \{\bar{x}, \bar{y}\}\ \exists l' \le l(\bar{u}) : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'\bar{u}(l') = ss_{i+1}\bar{z}(l)\} \\
&\quad \cup \bigcup\{Ss \mid s \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists j < i+1 : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s's_j\bar{z}(l) = ss_{i+1}\bar{z}(l)\} \\
&\cup \bigcup\big\{Ss \mid s \in S \text{ и } \exists s' \in S\ \exists l' \le l(\bar{z})\ \exists k \le n_{l'} : \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s'r_k^{l'}\bar{z}(l') = ss_{i+1}\bar{z}(l)\big\}.
\end{aligned}$$

Поскольку из построения формулы $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ следует, что равенства $s\bar{b}_{34}(l) = s'\bar{b}_{34}(l)$, $s\bar{b}_{24}(l) = s'\bar{b}_{24}(l)$, $s\bar{b}_{21}(l) = s'\bar{b}_{21}(l)$ влекут $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash s\bar{z}(l) = s'\bar{z}(l)$, то условие $P_1({}_SQ, q, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется для некоторого

$$q \in \{s_{i+1}\bar{b}_{34}(l), s_{i+1}\bar{b}_{24}(l), s_{i+1}\bar{b}_{21}(l)\}.$$

Через ρ_{34} обозначим ядро $\ker\ \alpha_{34}$ гомоморфизма полигонов $\alpha_{34} : {}_SS \to {}_SQ$, $\alpha_{34}(1) = s_{i+1}\bar{b}_{34}(l)$. Аналогично определяются конгруэнции ρ_{24} и ρ_{21}. Пусть $\rho = \rho_{34} \cap \rho_{24} \cap \rho_{21}$. Тогда условие $P_1({}_SS/\rho, 1/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется. По условию теоремы существует $w \in S$ такой, что выполняется условие условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и существует гомоморфизм

$$\varphi : \bigcup\{{}_SSt_jw \mid j \in J\} \cup \bigcup\{{}_SSr_kw \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_jw) = t_j1/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_kw) = r_k1/\rho$ для любых $k \in K$.

Покажем, что для любых $t_1, t_2 \in S$, $r_1, r_2 \in \mathbf{t} \cup \mathbf{r}$

$$t_1r_1w = t_2r_2w \Longrightarrow \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1r_1s_{i+1}\bar{z}(l) = t_2r_2s_{i+1}\bar{z}(l). \tag{5}$$

Действительно, из равенства $t_1r_1w = t_2r_2w$ следует $\varphi(t_1r_1w) = \varphi(t_2r_2w)$, т. е. $t_1r_11/\rho = t_2r_21/\rho$; тогда $t_1r_1\bar{b}_{34}(l) = t_2r_2\bar{b}_{34}(l)$, $t_1r_1\bar{b}_{24}(l) = t_2r_2\bar{b}_{24}(l)$, $t_1r_1\bar{b}_{21}(l) = t_2r_2\bar{b}_{21}(l)$; следовательно, из построения формулы $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ имеем $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash t_1r_1s_{i+1}\bar{z}(l) = t_2r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$.

Рассмотрим отображение

$$\chi_1 : \bigcup\{{}_SSt_jw \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_kw \mid k \in K\} \to {}_SQ$$

такое, что для любых $r \in \mathbf{t} \cup \mathbf{r}$, $t \in S$

$$\chi_1(trw) = \begin{cases}
tr'\bar{a}_3(l'), & \text{если } r' \in S, \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash r'\bar{x}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l), \\
tr'\bar{a}_1(l'), & \text{если } r' \in S, \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash r'\bar{y}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l), \\
tr'c_j^l, & \text{если } r' \in S, \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash r's_j\bar{z}(l) = rs_{i+1}\bar{z}(l),\ j < i+1, \\
tr'c_k^{l'}, & \text{если } r' \in S, \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \vdash r'r_k^{l'}s_j\bar{z}(l') = rs_{i+1}\bar{z}(l),\ k \le n_{l'}.
\end{cases}$$

Для доказательства корректности определения отображения χ_1 не будем рассматривать все случаи, как это делалось при доказательстве корректности определения отображения φ_1. Рассмотрим для примера два случая. Пусть $t_1r_1w = t_2r_2w$, где $\chi_1(t_1r_1w)$ и $\chi_1(t_2r_2w)$ определены.

Случай b.1. $\chi_1(t_1r_1w) = t_1r'\bar{a}_3(l')$ и $\chi_1(t_2r_1w) = t_2r''\bar{a}_1(l'')$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{x}(l') = r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$, $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r''\bar{y}(l'') = r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$ и $r_1, r_2 \in \mathbf{t} \cup \mathbf{r}$. Отсюда и из (5) получаем

$$\begin{aligned} t_1r'\bar{a}_3(l') &= t_1r_1s_{i+1}\bar{b}_{34}(l) = t_2r_2s_{i+1}\bar{b}_{34}(l) = t_2r''\bar{a}_4(l'') = t_2r_2s_{i+1}\bar{b}_{24}(l) \\ &= t_1r_1s_{i+1}\bar{b}_{24}(l) = t_1r'\bar{a}_2(l') = t_1r_1s_{i+1}\bar{b}_{21}(l^1) = t_2r_2s_{i+1}\bar{b}_{21}(l^1) = t_2r''\bar{a}_1(l''), \end{aligned}$$

т. е. $t_1r'\bar{a}_3(l') = t_2r''\bar{a}_1(l'')$.

Случай b.2. $\chi_1(t_1r_1w) = t_1r'\bar{a}_3(l')$ и $\chi_1(t_2r_2w) = t_2r''c^l_j$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{x}(l') = r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$, $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r''s_j\bar{z}(l) = r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$ и $r_1, r_2 \in \mathbf{t} \cup \mathbf{r}$. Следовательно, $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1r'\bar{x}(l') = t_1r_1s_{i+1}\bar{z}(l)$ и $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_2r''s_j\bar{z}(l) = t_2r_2s_{i+1}\bar{z}(l)$. Из (5) получаем $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1r'\bar{x}(l') = t_2r''s_j\bar{z}(l)$. Так как элемент c^l_j обладает свойством $R^x_j(t_2r"", t_1r', l, l')$, то $t_1r'\bar{a}_3(l') = t_2r''c^l_j$.

Таким образом, корректность определения отображения χ_1 доказана. Ясно, что χ_1 — гомоморфизм полигонов. Так как ${}_SQ \in S$-**WInj**, существует гомоморфизм $\bar{\chi}_1 : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий χ_1.

Так же, как по гомоморфизму $\overline{\varphi}_1$ и конгруэнции σ строились гомоморфизмы φ_2, $\overline{\varphi}_2$ и элемент c^l_{i+1}, по гомоморфизму $\bar{\chi}_1$ и конгруэнции σ строим гомоморфизмы χ_2, $\bar{\chi}_2$ и элемент c^l_{i+1}, а именно $\chi_2(trs_{i+1}) = ts^j\bar{\chi}_1(w)$, если $r\sigma s^j$ для некоторого $j \in \{1,\dots,k\}$, и $c^l_{i+1} = \bar{\chi}_2(s_{i+1}) \in Q$. Из построения элемента c^l_{i+1} следует, что свойства $R^x_{i+1}(s,s',l,l')$, $R^y_{i+1}(s,s',l,l')$, $R^z_{i+1,j}(s,s',l)$, $R^z_{i+1}(s,s',l)$ и $L^z_{i+1,k}(s,s',l,l')$ выполняются.

Таким образом, элементы $c^l_0,\dots,c^l_m \in Q$ построены. Если $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash \bar{z}(l) = s_i\bar{z}(l)$ для некоторого i, $0 \le i \le m$, то полагаем $b(l) = c^l_i$. Предположим, что это не выполняется. Рассмотрим отображение $\psi : {}_SSs_0 \cup \ldots \cup {}_SSs_m \longrightarrow {}_SQ$ такое, что $\psi(ts_i) = tc^l_i$ для любых $t \in S$ и i, $0 \le i \le m$. Покажем корректность определения данного отображения. Предположим, что $t_1s_i = t_2s_j$ для некоторых $t_1, t_2 \in S$, $0 \le j \le i \le m$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash t_1s_i\bar{z}(l) = t_2s_j\bar{z}(l)$. Если $i = j$, то поскольку элемент c^l_i удовлетворяет свойству $R^z_i(t_1,t_2,l)$, имеем $t_1c^l_i = t_2c^l_j$. Если $j < i$, то поскольку элемент c^l_i удовлетворяет свойству $R^z_{i,j}(t_1,t_2,l)$, имеем $t_1c^l_i = t_2c^l_j$. Корректность определения ψ доказана. Ясно, что ψ — гомоморфизм полигонов. Так как ${}_SQ$ — слабо инъективный полигон, существует гомоморфизм $\bar{\psi} : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий гомоморфизм ψ. Полагаем $\bar{b}(l) = \bar{\psi}(1)$.

Этап 3. Построение элементов $\bar{b}(l) \in Q$ для всех $\bar{z}(l) \in M'$.

Предположим, что элементы $\bar{b}(l^1),\dots,\bar{b}(l^j) \in Q$, где $j < n_2 - n_1$, построены. Пусть $\bar{z}(l^{j+1}) \in M' \setminus \{\bar{z}(l^1),\dots,\bar{z}(l^j)\}$ такой, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r_0\bar{z}(l^{j+1}) = r'\bar{u}(l_i)$ для некоторых $r_0, r' \in S$, i, где $\bar{u} \in \{\bar{x},\bar{y}\}$ или $\bar{u}(l_i) \in \{\bar{z}(l^1),\dots,\bar{z}(l^j)\}$. Для любого $s_i \in S$, как и при построении элемента $b(l^1)$, строим элемент $c^{l^{j+1}}_i$, удовлетворяющий свойствам $R^x_i(s,s',l^{j+1},l')$, $R^y_i(s,s',l^{j+1},l')$, $R^z_{i,j}(s,s',l^{j+1})$, $R^z_i(s,s',l^{j+1})$, $L_{i,k}(s,s',l^{j+1},l')$, $B_i(s,s',l^{j+1},l')$. Опишем, например, построение элемента $c^{l^{j+1}}_0$ при условии отсутствия петель $r\bar{z}(l^{j+1})$, т. е. когда $n_{l^{j+1}} + 1 = 0$. Полагаем $s_0 = r_0$ и

$$c^{l^{j+1}}_0 = \begin{cases} r'\bar{a}_3(l'), & \text{если } \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{x}(l') = s_0\bar{z}(l^{j+1}), \\ r'\bar{a}_1(l'), & \text{если } \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{y}(l') = s_0\bar{z}(l^{j+1}), \\ r'c^{l'}_k, & \text{если } \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'r^{l'}_k\bar{z}(l') = s_0\bar{z}(l^{j+1}), \\ r'\bar{b}(l^k), & \text{если } \Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{z}(l^k) = s_0\bar{z}(l^{j+1}),\ k \le j. \end{cases}$$

Покажем, что для элемента $c_0^{l^{j+1}}$ все требуемые свойства выполняются. Рассмотрим несколько случаев.

Случай с.1. $c_0^{l^{j+1}} = r'\bar{a}_3(l')$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{x}(l') = s_0\bar{z}(l^{j+1})$ и свойства $R_0^x(s,s',l^{j+1},l'')$, $R_0^y(s,s',l^{j+1},l'')$, $R_0^z(s,s',l^{j+1})$ выполняются очевидно. Доказательство выполнения свойства $L_{0,k}(s,s',l^{j+1},l'')$ в точности повторяет доказательство выполнения аналогичного свойства для элемента c_0^l. Покажем выполнение свойства $B_0(s,s',l^{j+1},l'')$, где $s' = s_i$, $l'' \in \{l^1,\dots,l^j\}$. Предположим, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_i\bar{z}(l'') = ss_0\bar{z}(l^{j+1})$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash sr'\bar{x}(l') = s_i\bar{z}(l'')$. По предположению индукции элемент $b(l'')$ строился так, что элемент $c_i^{l''} = s_i\bar{b}(l'')$ удовлетворяет свойству $R_i^x(1,sr',l'',l')$. Следовательно, $c_i^{l''} = sr'\bar{a}_3(l')$ и $s_i\bar{b}(l'') = c_i^{l''} = sr'\bar{a}_3(l') = sc_0^{l^{j+1}}$.

Случай с.2. $c_0^{l^{j+1}} = r'\bar{a}_1(l')$. Рассуждения аналогичны приведенным для случая с.2.

Случай с.3. $c_0^{l^{j+1}} = r'c_k^{l'}$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'r_k^{l'}\bar{z}(l') = s_0\bar{z}(l^{j+1})$. Выполнение свойств $R_0^x(s,s',l^{j+1},l')$, $R_0^y(s,s',l^{j+1},l')$, $R_0^z(s,s',l^{j+1})$, $L_{0,k}(s,s',l^{j+1},l')$ следует из того, что $r_k^{l'}\bar{z}(l')$ — петля и для элемента $c_0^{l^{j+1}}$ все требуемые свойства выполняются. Покажем выполнение свойства $B_0(s,s',l^{j+1},l'')$, где $s' = s_i$, $l'' \in \{l^1,\dots,l^j\}$. Предположим, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_i\bar{z}(l'') = ss_0\bar{z}(l^{j+1})$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash sr'r_k^{l'}\bar{z}(l') = s_i\bar{z}(l'')$. По предположению индукции элемент $b(l'')$ строился так, что элемент $c_i^{l''} = s_i\bar{b}(l'')$ удовлетворяет свойству $L_{i,k}(1,sr',l'',l')$. Следовательно, $c_i^{l''} = sr'c_k^{l'}$ и $s_i\bar{b}(l'') = c_i^{l''} = sr'c_k^{l'} = sc_0^{l^{j+1}}$.

Случай с.4. $c_0^{l^{j+1}} = r'\bar{b}(l^k)$, где $k \le j$ и $r' = s_i \in S$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash r'\bar{z}(l^k) = s_0\bar{z}(l^{j+1})$, $k \le j$, и $c_0^{l^{j+1}} = c_i^{l^k}$. По предположению индукции элемент $b(l^k)$ строился так, что элемент $c_i^{l^k}$ удовлетворяет всем требуемым свойствам. Отсюда следует, что элемент $c_0^{l^{j+1}}$ удовлетворяет свойствам $R_0^x(s,s',l^{j+1},l')$, $R_0^y(s,s',l^{j+1},l')$, $R_0^z(s,s',l^{j+1})$, $L_{0,k}(s,s',l^{j+1},l')$. Покажем выполнение свойства $B_0(s,s',l^{j+1},l'')$, где $s' = s_n$, $l'' \in \{l^1,\dots,l^j\}$. Предположим, что $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash s_n\bar{z}(l'') = ss_0\bar{z}(l^{j+1})$. Тогда $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash ss_i^{l'}\bar{z}(l^k) = s_n\bar{z}(l'')$. Рассмотрим два подслучая.

Случай с.4.1. $l^k = l''$. В этом случае $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \vdash ss_i^{l'}\bar{z}(l^k) = s_n\bar{z}(l^k)$. При построении элемента $\bar{b}(l^k)$ нумерация элементов множества S выбиралась так, что $c_n^{l^k} = sc_i^{l^k}$. Тогда $sc_0^{l^{j+1}} = sc_i^{l^k} = c_n^{l^k} = s_n\bar{b}(l'')$.

Случай с.4.2. $l^k = l''$. Пусть, например, элемент $\bar{b}(l'')$ построен раньше, чем элемент $\bar{b}(l^k)$. Тогда требуемое равенство следует из того, что элемент $c_i^{l^k}$ удовлетворяет свойству $B_i(s,s_n,l^k,l'')$.

Таким образом, множество $\{\bar{b}(l^1),\dots,\bar{b}(l^n)\} = \{\bar{b}(l_i) \mid n_1+1 \le i \le n_2\}$ построено и (2) выполняется. Теорема доказана.

Заметим, что достаточные условия для примитивной нормальности класса S-**WInj**, накладываемые на моноид S в теореме 2, а также конечность S используются только при построении формулы $\Theta(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ и описании случая b. Поэтому из доказательства достаточности следует

Теорема 3. *Пусть ${}_SQ$ — слабо инъективный полигон такой, что $sq \ne q$ для любых $s \in S \setminus \{1\}$, $q \in Q$. Тогда ${}_SQ$ — примитивно нормальный полигон.*

Пусть $u, s \in S \setminus \{1\}$, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \ne \varnothing$, $\mathbf{r} \ne \varnothing$. Будем говорить, что для моноида S *выполняется условие* $P_2(u,s,\mathbf{t},\mathbf{r})$, если

$s^m u \notin \bigcup\{St_j s^l u \mid j \in J, l \in \omega\} \cup \bigcup\{Sr_k s^l u \mid k \in K, l \in \omega\}$ для любого $m \in \omega$,
$t_j s^m u \notin \bigcup\{Sr_k s^l u \mid k \in K, l \in \omega\}$ для любых $j \in J$, $m \in \omega$,
$r_k s^m u \notin \bigcup\{St_j s^l u \mid j \in J, l \in \omega\}$ для любых $k \in K$, $m \in \omega$.

Лемма 2. *Пусть S — коммутативный моноид, $u, s \in S$, $s \neq 1$, J, K — конечные множества, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует конгруэнция ρ полигона ${}_SS$ такая, что условие $P_1({}_SS/\rho, u/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется;*

(2) *выполняется условие $P_2(u, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$.*

Доказательство. Докажем (1) $\Longrightarrow$ (2). Покажем, например, что $r_k s^m u \notin St_j s^l u$ для любых $m, l \in \omega$, $k \in K$, $j \in J$. Предположим, что существуют $m, l \in \omega$, $k \in K$, $j \in J$ и $t \in S$ такие, что $r_k s^m u = tt_j s^l u$. Так как $u\rho su$, то $u\rho s^m u$ и $u\rho s^l u$. Тогда $r_k u\rho r_k s^m u$, $tt_j u\rho tt_j s^l u$, т. е. $r_k u/\rho = tt_j u/\rho$; противоречие. Остальные случаи проверяются аналогично.

Докажем (2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть ρ — конгруэнция ${}_SS$, порожденная множеством $\{\langle su, u\rangle\}$. Тогда $u/\rho = su/\rho$. Покажем, например, что $r_k u/\rho \notin St_j u/\rho$ для любых $k \in K$, $j \in J$. Предположим, что существуют $k \in K$, $j \in J$ и $t \in S$ такие, что $r_k u/\rho = tt_j u/\rho$. Тогда по лемме Мальцева существуют $m \in \omega$, $v_0, \dots, v_m \in S$ такие, что

$$r_k u = v_0 su, \quad tt_j u = v_m u, \quad v_i u = v_{i+1} su$$

для всех $i < m$. Индукцией по $i \leq m$ покажем, что $r_k u = v_i s^{i+1} u$. Действительно, если $r_k u = v_{i-1} s^i u$, то $r_k u = s^i v_{i-1} u = s^i v_i su = v_i s^{i+1} u$. Следовательно,

$$r_k u = v_m s^{m+1} u = s^{m+1} v_m u = s^{m+1} tt_j u = tt_j s^{m+1} u,$$

т. е. $r_k u \in St_j s^{m+1} u$; противоречие. Остальные случаи проверяются аналогично.

Теорема 4. *Пусть S — конечный коммутативный моноид. Класс S-**WInj** примитивно нормален тогда и только тогда, когда для любых элементов u, $s \in S$, $s \neq 1$, любых $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$, если условие $P_2(u, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ для S выполняется, то существует $w \in S$ такой, что выполняется условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и существует гомоморфизм*

$$\varphi : \bigcup\{{}_SSt_j w \mid j \in J\} \cup \bigcup\{{}_SSr_k w \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_j w) = t_j u/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_k w) = r_k u/\rho$ для любых $k \in K$, где ρ — конгруэнция полигона ${}_SS$, порожденная множеством $\{\langle su, u\rangle\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть S-**WInj** — примитивно нормальный класс, $u, s \in S$, $s \neq 1$, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$ и условие $P_2(u, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется. Из доказательства леммы 2 следует, что условие $P_1({}_SS/\rho, w/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется, где ρ — конгруэнция полигона ${}_SS$, порожденная множеством $\{\langle su, u\rangle\}$. Тогда по теореме 2 существует $w \in S$ такой, что выполняется условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и существует гомоморфизм

$$\varphi : \bigcup\{{}_SSt_j w \mid j \in J\} \cup \bigcup\{{}_SSr_k w \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_j w) = t_j u/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_k w) = r_k u/\rho$ для любых $k \in K$.

Достаточность. Пусть $u, s \in S$, $s \neq 1$, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$, $\bar{\rho}$ — конгруэнция полигона ${}_SS$ и условие

$P_1({}_SS/\bar{\rho}, u/\bar{\rho}, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется. Заметим, что $\rho \subseteq \bar{\rho}$, где ρ — конгруэнция полигона ${}_SS$, порожденная множеством $\{\langle su, u\rangle\}$. По лемме 2 условие $P_2(u, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется. По условию теоремы существует $w \in S$ такой, что выполняется условие $P_1({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и существует гомоморфизм

$$\varphi : \bigcup\{{}_SSt_jw \mid j \in J\} \cup \bigcup\{{}_SSr_kw \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_jw) = t_ju/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_kw) = r_ku/\rho$ для любых $k \in K$. Так как $\rho \subseteq \bar{\rho}$, существует гомоморфизм $\chi : {}_SS/\rho \to {}_SS/\bar{\rho}$ такой, что $\chi(1/\rho) = 1/\bar{\rho}$. Тогда $\chi \circ \varphi(t_jw) = t_ju/\bar{\rho}$ для любых $j \in J$ и $\chi \circ \varphi(r_kw) = r_ku/\bar{\rho}$ для любых $k \in K$. По теореме 2 класс S-**WInj** примитивно нормален.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pillay A.* Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89, N 4. P. 666–672.
2. *Палютин Е. А.* Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 5. С. 582–614.
3. *Палютин Е. А.* Нормальность хорновых теорий с немаксимальным спектром // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 5. С. 551–587.
4. *Pillay A.* Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models // Ann. Pure Appl. Logic. 1989. V. 43, N 2. P. 147–160.
5. *Судоплатов С. В.* Базируемость стабильных теорий и свойства счетных моделей с мощными типами: дис. … к. ф.-м. н. Новосибирск, 1990.
6. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam etc.: North-Holland, 1990. (Stud. Logic Found. Math.; V. 92).
7. *Степанова А. А.* Примитивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 300–313.
8. *Птахов Д. О.* Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 614–624.
9. *Степанова А. А.* Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 491–508.
10. *Ефремов Е. Л.* Примитивная нормальность и примитивная связность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 2. С. 155–168.
11. *Ефремов Е. Л., Степанова А. А.* Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 785–795.
12. *Ефремов Е. Л.* Полнота и стабильность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 1. С. 48–65.
13. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs: a handbook for students and researchers. Berlin; New York: de Gruyter, 2000.
14. *Пинус А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
15. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 8 апреля 2020 г.
После доработки 26 января 2021 г.
Принята к публикации 24 февраля 2021 г.

Степанова Алёна Андреевна, Ефремов Евгений Леонидович
Дальневосточный федеральный университет,
Школа естественных наук,
поселок Аякс, 10, остров Русский 690922, Приморский край
stepltd@mail.ru, efremov-el@mail.ru