С. А. Гриценко, О распределении норм простых идеалов из заданного класса в арифметических прогрессиях, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2005, том 322, 45–62

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

С. А. Гриценко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НОРМ ПРОСТЫХ ИДЕАЛОВ ИЗ ЗАДАННОГО КЛАССА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Введение

При решении аддитивных задач с простыми числами круговым методом важную роль играет закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. Например, часто применяется следующая формула, известная в литературе как формула Зигеля–Вальфиша

$$\pi(x,q,l)=\frac{\mathrm{Li}\ x}{\varphi(q)}+O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), \tag{1}$$

где $\pi(x,q,l)=\sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l\ (\mathrm{mod}\ q)}}1$, $\mathrm{Li}\ x=\int_2^x\frac{dx}{\log x}$, l и q – целые взаимно простые числа, $1\leqslant q\leqslant \log^{A_1}x$, $A_1>1$ и $c>0$ зависит только от A_1.

Ее доказательство см., например, в [1, с. 154].

При тех же условиях на l и q асимптотическая формула, подобная (1), справедлива и для функции $\pi_1(x,q,l)=\sum\limits_{\substack{N(P)\leqslant x\\ N(P)\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}1$, где суммирование идет по простым идеалам P кольца целых алгебраических чисел мнимого квадратичного поля, $N(P)$ – норма идеала P.

Если дискриминант поля не растет с ростом x, то вывод формулы для $\pi_1(x,q,l)$ по существу совпадает с выводом формулы для $\pi(x,q,l)$.

В вопросах представления простых чисел квадратичными формами требуется асимптотическая формула для числа простых идеалов, нормы которых не превосходят x и лежат в арифметической прогрессии, а сами идеалы принадлежат некоторому

Работа выполнена при финансовой поддержке Белгородского государственного университета.

фиксированному классу идеалов. Ее выводу посвящена настоящая работа.

В случае, когда квадратичное поле многоклассное, наша задача существенно отличается от задачи получения асимптотики для $\pi_1(x,q,l)$, так как вопрос о попадании идеала в заданный класс идеалов не сводится к вопросу о попадании нормы идеала в какой-то класс вычетов по какому-либо модулю (в связи с этим см. [2, с. 271]).

Коротко остановимся на схеме рассуждений. Пусть $\mathcal{C}$ – класс идеалов, $\pi_1(x,q,l,\mathcal{C}) = \sum\limits_{\substack{P\in\mathcal{C} \\ M(P)\equiv l \ (\mathrm{mod}\ q) \\ N(P)\leqslant x}} 1$, $\mathcal{A}$ – классы идеалов, $X(\mathcal{A})$ – характеры группы классов идеалов, X_0 – главный характер группы классов идеалов, h – ее порядок, $\chi(n)$ – характеры Дирихле по модулю q, χ_1 – характер квадратичного поля. Пусть $(l,q)=1$, $1\leqslant q\leqslant \log^{A_1} x$, $A_1>1$, $c>0$. Тогда

$$\pi_1(x,q,l,\mathcal{C}) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\\ N(P)\leqslant x}} 1 + \frac{1}{h\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{p\leqslant x}\bigl(1+\chi_1(p)\bigr)\chi(p) =$$

$$= \frac{1}{h\varphi(q)}\sum_{X\neq X_0}\overline{X}(\mathcal{C})\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{N(P)\leqslant x}X(P)\chi(N(P)) + O(\sqrt{x}\log x). \quad (2)$$

Хорошо известна формула

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\\ N(P)\leqslant x}} 1 = \frac{\mathrm{Li}\ x}{h\varphi(q)} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), \quad (c>0)$$

(см., например, [3, глава 7]).

Пусть χ_2 – характер Дирихле по модулю q. Хорошо известно, что

$$\sum_{p\leqslant x}\chi_2(p) = \\ = \begin{cases} \mathrm{Li}\ x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), & \text{если характер } \chi_2 \text{ – главный,}\\ O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), & \text{если характер } \chi_2 \text{ – неглавный} \end{cases}$$

(доказательство см., например, в [1, глава IX]).

Отсюда имеем

$$\frac{1}{h\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{p\leqslant x}\big(1+\chi_1(p)\big)\chi(p)=$$
$$=\frac{\chi_1(l)}{h\varphi(q)}\chi(q;D,0)\mathrm{Li}\ x+O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

где $\chi(q;D,0)=1$, если $D\mid q$ и $\chi(q;D,0)=0$, если $D\nmid q$, D – модуль характера χ_1, равный абсолютной величине дискриминанта квадратичного поля.

В силу (2) получаем, что

$$\pi_1(x,q,l,\mathcal{C})=\frac{1+\chi(q;D,0)\chi_1(l)}{h\varphi(q)}\mathrm{Li}\ x+$$
$$\frac{1}{h\varphi(q)}\sum_{X\neq X_0}\overline{X}(\mathcal{C})\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{N(P)\leqslant x}X(P)\chi(N(P))+O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).\quad(3)$$

Теперь для получения асимптотики для функции $\pi_1(x,q,l,\mathcal{C})$ достаточно оценить сумму $\sum\limits_{X\neq X_0}\overline{X}(\mathcal{C})\sum\limits_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum\limits_{N(P)\leqslant x}X(P)\chi(N(P))$.

Эта задача решается в настоящей статье, основным результатом которой является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X – неглавный характер группы классов идеалов кольца целых алгебраических чисел мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, χ – неглавный примитивный характер Дирихле по модулю r, $1<r\leqslant\log^{A_1}x$, $A_1\geqslant 1$ Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{N(P)\leqslant x}X(P)\chi(N(P))=O\Big(x\exp(-c\,(\log x)^{\frac{1}{20A_1}})\Big),$$

где $c=c(A_1)>0$.

Доказательство проводится методом производящих функций. Необходимые сведения о свойствах ряда Дирихле

$$F(s,X,\chi)=\sum_{A}X(A)\chi(N(A))N(A)^{-s},$$

где суммирование идет по всем целым идеалам A, составляет содержание следующих лемм.

В работе будут использованы обозначения:

X – характер группы классов идеалов кольца целых алгебраических чисел поля $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d – отрицательное бесквадратное число; h – порядок этой группы; δ_F – дискриминант поля F; $D=-\delta_F$;

χ_1 – характер квадратичного поля F, определенный следующим образом

$$\chi_1(n)=\begin{cases} \left(\dfrac{n}{|d|}\right) & \text{при } d\equiv 1 \pmod 4,\\ (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}\left(\dfrac{n}{|d|}\right) & \text{при } d\equiv 3 \pmod 4,\\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}+\frac{n-1}{2}\frac{d'-1}{2}}\left(\dfrac{n}{|d'|}\right) & \text{при } d\equiv 2 \pmod 4,\ d=2d'; \end{cases}$$

$$\chi(m;q,a)=\begin{cases} 1, & \text{если } m\equiv a \pmod q,\\ 0 - & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$G(r,u,\overline{n})=\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r}\exp(\frac{2\pi i}{r}(u(am^2+bmn+cn^2)+mn_1+nn_2))$$

– двойная сумма Гаусса, отвечающая целым взаимно простым числам u и r, квадратичной форме $am^2+bmn+cn^2$ и целочисленному вектору $\overline{n}=\begin{pmatrix} n_1\\ n_2\end{pmatrix}$; $a(n)=a_X(n)=\sum\limits_{A,\ N(A)=n} X(A)$, $a_0(n)=a_{X_0}(n)$.

Леммы

Пусть X – неглавный характер группы классов идеалов. Пусть r и u – целые взаимно простые числа. При $\operatorname{Re} s>1$ определим ряды $F(s,r,u)$ и $F(s,r,u,\mathcal{A})$ Дирихле равенствами

$$F(s,r,u)=\sum_{A} X(A)e^{2\pi i\frac{uN(A)}{r}}N(A)^{-s},$$

$$F(s,r,u)=\sum_{\mathcal{A}} X(\mathcal{A})F(s,r,u,\mathcal{A}),$$

где

$$F(s,r,u,\mathcal{A})=\sum_{A\in\mathcal{A}} e^{2\pi i\frac{uN(A)}{r}}N(A)^{-s}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ – класс идеалов, B – идеал из класса $\mathcal{A}^{-1}$, ξ – целые алгебраические числа из идеала B. Известно, что если ξ пробегает все ненулевые числа идеала B, то числа $\frac{N(\xi)}{N(B)}$ пробегают значения норм целых ненулевых идеалов из класса $\mathcal{A}$, причем в последовательности $\frac{N(\xi)}{N(B)}$ норма каждого ненулевого идеала из класса $\mathcal{A}$ встречается ровно два раза (см., например, [4, глава 21]).

Определим бинарную квадратичную форму с целыми коэффициентами $Q(\overline{n}) = \frac{N(\xi)}{N(B)} = an_1^2 + bn_1n_2 + cn_2^2$, где $\overline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ – координаты чисел ξ в целом базисе идеала B. Пусть $Q_1(\overline{n}) = an_2^2 - bn_1n_2 + cn_1^2$.

Лемма 1. 1. *Функция* $(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi})^s\Gamma(s)F(s,r,u,\mathcal{A})$ *является аналитической во всей комплексной плоскости, кроме точки* $s = 1$, *в которой она имеет простой полюс с вычетом* $\frac{\pi}{r^2}G(r,u,\overline{0})$.

2. *При* $\operatorname{Re} s < 0$ *справедливо тождество*

$$\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)F(s,r,u,\mathcal{A}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^{1-s}\Gamma(1-s)\sum_{\overline{n}\neq\overline{0}}(Q_1(\overline{n}))^{s-1}\frac{G(r,u,\overline{n})}{r}.$$

3. *При любых* r *и* u *функция* $F(s,r,u)$ *является целой.*

Доказательство см. в [5].

Следствие 1. *Пусть характеры* X *и* χ *– неглавные, причем,* χ *примитивен по модулю* $r > 1$. *Тогда функция* $F(s,X,\chi)$,

$$F(s,X,\chi) = \sum_{A} X(A)\chi(N(A))N(A)^{-s},$$

является целой.

Доказательство. Справедлива формула

$$F(s,X,\chi) = \frac{1}{\tau}\sum_{u=1}^{r}\overline{\chi}(u)F(s,r,u),$$

где τ – сумма Гаусса, отвечающая характеру $\overline{\chi}$, $\operatorname{Re} s > 1$. Теперь утверждение прямо следует из леммы 2. □

Лемма 2. *Пусть ε – произвольное число из интервала $(0,\,0.001)$, r и u – целые взаимно простые числа, $r \geqslant 1$. Пусть χ – примитивный характер Дирихле по модулю r.*

Тогда справедливы оценки

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)e^{2\pi i\frac{un}{r}} = O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}r^{\frac{2}{3}}), \quad \sum_{n\leqslant x} a(n)\chi(n) = O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}r^{\frac{7}{6}}).$$

Доказательство. Первая оценка получена в [6], а вторая сразу следует из нее и известной формулы $\chi(n) = \frac{1}{\tau}\sum\limits_{u=1}^{r}\overline{\chi}(u)e^{2\pi i\frac{un}{r}}$, где τ сумма Гаусса, отвечающая характеру $\overline{\chi}$. □

Лемма 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{(n,\delta_F)=1\\ n\leqslant x}} a_0(n) = c_0x + O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}),$$

где $c_0 > 0$, ε – произвольное положительное число.

Асимптотическая формула выводится по существу так же, как оценка из леммы 2. Отличие состоит в том, что производящая функция

$$\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_1)=1}}^{\infty} a_0(n)n^{-s} = \prod_{p|\delta_F}(1-p^{-s})\zeta(s)L(s,\chi_1)$$

имеет в точке $s=1$ простой полюс с вычетом $c_0 = \prod\limits_{p|\delta_F}(\frac{p-1}{p})L(1,\chi_1)$. Поэтому в формуле возникает главный член.

Лемма 4. *Пусть ε – произвольное число, $0 < \varepsilon < 0.001$. Пусть X – вещественный неглавный характер группы классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, χ – неглавный примитивный характер по модулю r. Если характер χ – вещественный, или характер $\chi^2\chi_1$ – главный, то существует постоянная $c > 0$, зависящая лишь от ε и такая, что*

$$|F(1,X,\chi)| > \frac{c}{r^{3.5+\varepsilon}}.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\,s > 1$. Справедливы равенства

$$F(s,X,\chi) = \prod_{P|\delta_F}(1 - X(P)\chi(N(P))N(P)^{-s})^{-1}F_1(s,X,\chi),$$

$$F_1(s,X,\chi)=\prod_{\substack{(P,\delta_F)=1,\ N(P)=p\\ \chi_1(p)=1}}(1-X(P)\chi(p)p^{-s})^{-1}\times$$

$$\times\prod_{\substack{(P,\delta_F)=1,\ N(P)=p^2\\ \chi_1(p)=-1}}(1-\chi^2(p)p^{-2s})^{-1}.$$

Отсюда следует, что достаточно оценить снизу $F_1(1,X,\chi)$.

Из условий леммы следует вещественность коэффициентов ряда Дирихле $F_1(s,X,\chi)$. Действительно, если χ – вещественный характер, то это очевидно, так как $X(P)\in\mathbb{R}$. Пусть $\chi^2\chi_1$ – главный характер. Тогда $\chi^2(N(P))\chi_1(N(P))$ может принимать лишь значения 0, или 1. Поэтому, если $N(P)=p$, $\chi_1(p)=1$, то $\chi^2(p)$ может равняться либо 0, либо 1, то есть $\chi(p)$ тогда может равняться либо 0, либо 1, либо -1; если же $N(P)=p^2$, $\chi_1(p)=-1$, то $\chi^2(p)$ в этом случае может равняться либо 0, либо -1.

Рассмотрим при $\frac{1}{2}\leqslant t<1$ функцию

$$H(t)=\sum_A\Big(\sum_{B|A}X(B)\chi(N(B))\Big)\chi_1^2(N(A))t^{N(A)}$$

(A – целые идеалы, B пробегает множество делителей A).

Если $A=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_n^{\alpha_n}$ – каноническое разложение идеала A в произведение простых идеалов, то

$$\sum_{B|A}X(B)\chi(N(B))=$$

$$\prod_{j=1}^{n}(1+X(P_j)\chi(N(P_j))+\dots+X^{\alpha_j}(P_j)\chi^{\alpha_j}(N(P_j)));$$

поэтому

$$\sum_{B|A}X(B)\chi(N(B))\geqslant 0,\qquad \sum_{B|A^2}X(B)\chi(N(B))\geqslant 1.$$

Отсюда

$$H(t)\geqslant\sum_A\chi_1^2(N(A))t^{N(A)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_0(n)\chi_1^2(n)t^{n^2}.$$

Пользуясь леммой 3 и формулой частного суммирования, имеем

$$H(t) = c_0 \int_0^\infty t^{x^2}\,dx + O\biggl(\int_1^\infty x^{-2/3+\varepsilon_1} \exp\Bigl(-x\sqrt{\ln\frac{1}{t}}\Bigr)^2 dx\biggr) =$$

$$= \frac{c_0\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} + O\biggl(\Bigl(\ln\frac{1}{t}\Bigr)^{-1/6-\varepsilon_1}\biggr) > \frac{c_1}{\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}$$

(считаем, что t достаточно близко к 1); $0<\varepsilon_1<0.001$.

Преобразуем $H(t)$:

$$H(t) = \sum_{m=1}^\infty b(m) \sum_{n=1}^\infty a_0(n)\chi_1^2(n) t^{mn},$$

где $b(m) = a(m)\chi(m)\chi_1^2(m)$.

Пользуясь леммой 3 и формулой частного суммирования, получаем

$$\sum_{n=1}^\infty a_0(n)\chi_1^2(n)t^{mn} =$$

$$\frac{c_0}{m\ln\frac{1}{t}} + c_0 t^m - c_0\int_0^1 t^{mx}\,dx + \int_1^\infty R_0(x) m \ln\frac{1}{t} t^{mx}\,dx,$$

где $R_0(x)$ – остаточный член асимптотической формулы леммы 3.

Таким образом,

$$H(t) = c_0\frac{F_1(1,X,\chi)}{\ln\frac{1}{t}} + H_1(t) - H_2(t) + H_3(t),$$

где

$$H_1(t) = c_0\sum_{m=1}^\infty b(m)t^m, \quad H_2(t) = c_0\int_0^1 \sum_{m=1}^\infty b(m)t^{mx}\,dx,$$

$$H_3(t) = O\biggl(\int_1^\infty |R_0(x)|\Bigl|\sum_{m=1}^\infty b(m) m\ln\frac{1}{t}t^{mx}\Bigr|dx\biggr).$$

Оценим $H_1(t)$ и $H_2(t)$. Пусть $0 < x \leqslant 1$. Применим формулу частного суммирования и лемму 2:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b(m)t^{mx} = -\int_1^{\infty} \sum_{m\leqslant u} b(m)dt^{ux} = O(r^{\frac{7}{6}} \int_0^{\infty} u^{-\frac{2}{3}+\varepsilon_1} t^{ux} du) =$$

$$= O\Big(\Big(x \ln \frac{1}{t}\Big)^{-\frac{1}{3}-\varepsilon_1} r^{\frac{7}{6}}\Big).$$

Отсюда получаем, что

$$H_1(t) = O\Big(\Big(x \ln \frac{1}{t}\Big)^{-\frac{1}{3}-\varepsilon_1} r^{\frac{7}{6}}\Big), \quad H_2(t) = O\Big(\Big(x \ln \frac{1}{t}\Big)^{-\frac{1}{3}-\varepsilon_1} r^{\frac{7}{6}}\Big).$$

Оценим $H_3(t)$. Имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} b(m)mt^{mx} = -\int_1^{\infty} \sum_{m\leqslant u} b(m)(1 + ux \ln t)t^{ux} =$$

$$= O\Big(r^{\frac{7}{6}} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{3}+\varepsilon_1} \Big(1 + ux \ln \frac{1}{t}\Big) t^{ux} du\Big) = O\Big(\Big(x \ln \frac{1}{t}\Big)^{-\frac{4}{3}-\varepsilon_1} r^{\frac{7}{6}}\Big).$$

Оценивая $R_0(x)$ по лемме 3 как $R_0(x) = O(x^{\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon_1}{2}})$, приходим к соотношению

$$H_3(t) = O\Big(\Big(\ln \frac{1}{t}\Big)^{-\frac{1}{3}-\varepsilon_1} r^{\frac{7}{6}}\Big).$$

Итак,

$$\frac{c_1}{\sqrt{\ln \frac{1}{t}}} < c_0 \frac{F_1(1, X, \chi)}{\ln \frac{1}{t}} + c_2 r^{7/6} \Big(\ln \frac{1}{t}\Big)^{-1/3-\varepsilon_1}.$$

Выберем t:

$$t = 1 - c_3 r^{-\frac{7}{1-6\varepsilon_1}},$$

где $c_3 > 0$ – столь малая константа, что $\frac{c_1}{\sqrt{\ln \frac{1}{t}}} > 2c_2 r^{7/6} (\ln \frac{1}{t})^{-1/3-\varepsilon_1}$.

Тогда справедливо неравенство

$$F(1, X, \chi) > c_4 r^{-3.5-50\varepsilon_1},$$

где $c_4 > 0$. Полагая $\varepsilon = 50\varepsilon_1$, завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 5. *При любых X и χ в области $\sigma \geqslant 1 - \log^{-1}(r|t| + 3r)$ справедливо неравенство*

$$|F(s, X, \chi)| \leqslant c_5 \log^2(r|t| + 3r). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 1 - \log^{-1}(r|t| + 3r)$. Так как характер X – неглавный, то в полуплоскости $\mathrm{Re}\ s > \frac{1}{3}$ функция $F(s, X, \chi)$ представляется рядом Дирихле $F(s, X, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\chi(n)n^{-s}$ (см. лемму 2).

Пусть $N = [(r|t| + 3r)^2] + 1$. Пользуясь леммой 2 и формулой частного суммирования, оценим $\sum_{n=N+1}^{\infty} a(n)\chi(n)n^{-s}$:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a(n)\chi(n)n^{-s} = s\int_N^{\infty} \sum_{N<n\leqslant x} a(n)\chi(n)x^{-s-1}dx \ll \frac{(r|t| + 3r)^{7/6}}{N^{2/3}} N^{\varepsilon} \ll 1.$$

Сумму $\sum_{n=1}^{N} a(n)\chi(n)n^{-s}$ оценим с помощью неравенства $|a(n)| \leqslant \tau(n)$:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a(n)\chi(n)n^{-s}\right| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} n^{-\sigma}\Big)^2 \ll \Big(\sum_{n=1}^{N} n^{-1}\Big)^2 \ll \log^2(r|t| + 3r).$$

$\square$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует константа $c_1 = c_1(\varepsilon)$ такая, что $F(s, X, \chi) \neq 0$ в круге*

$$|s - 1| < c_1 r^{-3.5-\varepsilon} \log^{-3}(4r).$$

Доказательство. Пусть $|s - 1| \leqslant \frac{c}{2c_5+c} r^{-3.5-\varepsilon} \ln^{-3} 4r$, где c – постоянная из леммы 4, а c_5 – постоянная из леммы 5. Тогда

$$F(s, X, \chi) = F(1, X, \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s - 1)^n,$$

где
$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F(s,X,\chi)}{(s-1)^{n+1}}ds,$$

C – окружность радиуса $\ln^{-1} 4r$ с центром в точке $s=1$.

Так как для любых s из C выполнено неравенство
$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\ln 4r} \geqslant 1 - \frac{1}{\ln(r|t|+3r)},$$
то в силу (4) имеем
$$|b_n| \leqslant c_5 \ln^{2+n} 4r,$$
следовательно,
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(s-1)^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||s-1|^n \leqslant$$
$$\leqslant c_5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{c+2c_5}\right)^n \frac{(\ln 4r)^{n+2}}{(r^{3.5+\varepsilon})^n(\ln 4r)^{3n}} \leqslant$$
$$\leqslant c_5 r^{-3.5-\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{c+2c_5}\right)^n = \frac{c}{2} r^{-3.5-\varepsilon}.$$

Следовательно, при $|s-1| \leqslant \frac{c}{2c_5+c} r^{-3.5-\varepsilon} \ln^{-3} 4r$ справедливо неравенство
$$|F(s,X,\chi)| \geqslant |F(1,X,\chi)| - |\sum_{n=1}^{\infty} b_n(s-1)^n| \geqslant \frac{c}{2} r^{-3.5-\varepsilon} > 0,$$
что и требовалось доказать. □

Лемма 6. *Пусть $F(s)$ – аналитическая в круге $|s-s_0| \leqslant r$ функция, $F(s_0) \neq 0$, и в этом круге $|\frac{F(s)}{F(s_0)}| \leqslant M$.*

Если $F(s) \neq 0$ в области $|s-s_0| \leqslant \frac{r}{2}$, $\mathrm{Re}\,(s-s_0) \geqslant 0$, то
$$(a) \qquad \mathrm{Re}\ \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M,$$
$$(b) \qquad \mathrm{Re}\ \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M + \mathrm{Re}\ \frac{1}{s_0-\rho},$$
где ρ – любой нуль $F(s)$ в области $|s-s_0| \leqslant \frac{r}{2}$, $\mathrm{Re}\,(\rho-s_0) \leqslant 0$.

Доказательство см., например, в [1, глава VI].

Лемма 7. *Пусть ε – произвольное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $s = \sigma + it$.*

Существует константа $d_0 > 0$, зависящая лишь от ε и такая, что $F(s, X, \chi) \neq 0$ в области $\sigma \geqslant 1 - \frac{d_0}{V \log(V + e^{10})}$, где

$$V = \begin{cases} \max(\ln^2(r|t| + 3r), 2c_1^{-1} r^{3.5+\varepsilon} \ln^3(4r)), \\ \ln^2(r|t| + 3r); \end{cases}$$

верхняя формула берется в случае, если характер χ – вещественный, или характер $\chi^2\chi_1$ – главный, а нижняя – в противном случае, c_1 – константа из следствия 2.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(s, X^2, \chi^2)$. Если характер X^2 – неглавный, то, в силу следствия 1, эта функция – целая. Если же характер X^2 — главный (характер X – вещественный), то справедливо равенство

$$F(s, X^2, \chi^2) = L(s, \chi^2) L(s, \chi^2\chi_1).$$

Отсюда видно, что если X – вещественный характер, то функция $F(s, X^2, \chi^2)$ имеет в точке $s = 1$ простой полюс либо если характер χ – вещественный, либо если характер $\chi^2\chi_1$ – главный.

Пусть сначала либо характер χ – вещественный, либо характер $\chi^2\chi_1$ – главный.

В силу следствия 2 можно считать, что

$$|t| > \frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon} \ln^3 4r}.$$

В самом деле, если

$$|t| \leqslant \frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon} \ln^3 4r}, \quad |\sigma - 1| \leqslant \frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon} \ln^3 4r},$$

то

$$|s - 1| \leqslant \frac{c_1}{r^{3.5+\varepsilon} \ln^3 4r}$$

и $F(s, X, \chi) \neq 0$.

Поэтому, если $F(s, X, \chi) = 0$ и

$$|t| \leqslant \frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon} \ln^3 4r},$$

то

$$\sigma \leqslant 1 - \frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon} \ln^3 4r}$$

(мы воспользовались тем, что функция $F(s,X,\chi)$ не имеет нулей правее единичной прямой, поскольку обладает эйлеровым произведением).

Пусть $\rho=\sigma+it$ – нуль функции $F(s,X,\chi)$,

$$|t|>\frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon}\ln^3 4r},\quad \sigma=1-\frac{x}{V\ln(V+e^{10})},\quad 0<x\leqslant 1,$$

$$V=\max(\ln^2(r|t|+3r),2c_1^{-1}r^{3.5+\varepsilon}\ln^3(4r)).$$

Нужно доказать, что $x\geqslant d_0>0$.

Пусть

$$s_0=\sigma_0+it,\quad \sigma_0=\frac{4x}{V\ln(V+e^{10})}.$$

Проведем окружность радиуса $v=\frac{1}{V}$ с центром в точке s_0. Так как

$$v\leqslant\frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon}\ln^3 4r}\leqslant|t|<2|t|,$$

то 1 не содержится в круге радиуса v с центром в точке $s_1=\sigma_0+2it$. Поэтому функция $F(s,X^2,\chi^2)$ регулярна в круге $|s-s_1|\leqslant v$.

Оценим сверху $\frac{1}{|F(s_0,X,\chi)|}$:

$$\frac{1}{|F(s_0,X,\chi)|}\leqslant\prod_P(1+N(P)^{-\sigma_0})\leqslant\prod_p(1+p^{-\sigma_0})^2<\zeta^2(\sigma_0)\ll(\sigma_0-1)^{-2}.$$

Отсюда и из неравенства (4) следует, что:

1) $\left|\dfrac{F(s,X,\chi)}{F(s_0,X,\chi)}\right|\leqslant M=O(\ln^2(r|t|+3r)(\sigma_0-1)^{-2})$ при $|s-s_0|\leqslant v$,

2) $\left|\dfrac{F(s,X^2,\chi^2)}{F(s_1,X^2,\chi^2)}\right|\leqslant M=O(\ln^2(r|t|+3r)(\sigma_0-1)^{-2})$ при $|s-s_1|\leqslant v$.

Заметим, что $|\rho-s_0|\leqslant v/2$. Действительно,

$$|\rho-s_0|=\frac{5x}{V\ln(V+e^{10})}\leqslant\frac{5}{V\ln(V+e^{10})}\leqslant\frac{1}{2V}=\frac{v}{2}.$$

Применим лемму 6, положив в ней сначала $F(s)=F(s,X,\chi)$, а затем – $F(s)=F(s,X^2,\chi^2)$:

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{F'(s_0,X,\chi)}{F(s_0,X,\chi)}\right\}\leqslant\frac{4}{v}\ln M-Re\ \frac{1}{s_0-\rho},$$

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{F'(s_1,X^2,\chi^2)}{F(s_1,X^2,\chi^2)}\right\}\leqslant\frac{4}{v}\ln M.$$

Оценим сверху $\ln M$. Имеем

$$M\leqslant c_6\frac{\ln^2(r|t|+3r)}{x^2}V^2\ln^2(V+e^{10}),$$

где c_6 – постоянная. Далее,

$$\ln^2(r|t|+3r)\leqslant V\leqslant V+e^{10},\quad \ln^2(V+e^{10})\leqslant(V+e^{10})^2,$$

поэтому

$$M\leqslant c_6\frac{(V+e^{10})^5}{x^2},\quad \ln M\leqslant 5\ln(V+e^{10})-2\ln x+c_7,\tag{5}$$

где c_7 – постоянная.

Пусть $\zeta_F(s)=\zeta(s)L(s,\chi_1)$ – дзета-функция Дедекинда поля F.

Справедливо неравенство

$$0\leqslant 3\left\{-\frac{\zeta_F'(\sigma_0)}{\zeta_F(\sigma_0))}\right\}+\\+4\left\{-\operatorname{Re}\frac{F'(\sigma_0+it,X,\chi)}{F(\sigma_0+it,X,\chi)}\right\}+\left\{-\operatorname{Re}\frac{F'(\sigma_0+2it,X^2,\chi^2)}{F(\sigma_0+2it,X^2,\chi^2)}\right\}.$$

Пользуясь тем, что $-\frac{\zeta_F'(\sigma_0)}{\zeta_F(\sigma_0)}=(\sigma_0-1)^{-1}+O(1)$, и неравенствами леммы 6, находим, что

$$0\leqslant 20\ln M-\frac{1}{20x}\ln(V+e^{10})+c_8,$$

где c_8 – постоянная.

Отсюда из неравенства (5) следует, что

$$0\leqslant c_9-x^{-1}\Big(\frac{1}{20}+40x\ln x\Big),\tag{6}$$

где c_9 – постоянная.

Так как $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0$, то тем самым доказано, что $x>d_0>0$.

Для завершения доказательства необходимо проверить, что функция $F(s,X,\chi)$ не имеет нулей на единичной прямой. Допустим, от противного, что $F(1+it,X,\chi)=0$ при $|t|>\frac{c_1}{2r^{3.5+\varepsilon}\ln^3 4r}$.

Пусть $s_0=1+\frac{4x}{V\ln(V+e^{10})}+it$, где x – произвольное положительное число, $v=V^{-1}$; тогда $|\rho-s_0|\leqslant v/2$, где $\rho=1+it$.

Далее, повторяя еще раз уже проведенные рассуждения, приходим к неравенству (6), которое выполняется при любом положительном x. Переходя к пределу при $x \to +0$, получим противоречие, которое и доказывает, что $F(1+it, X, \chi) \neq 0$ при вещественных t.

Случай, когда характер X – комплексный, или X – вещественный, χ – комплексный, а $\chi^2\chi_1$ – неглавный, рассматривается похожим образом. Тогда функция $F(s, X^2, \chi^2)$ – целая, и при выборе параметров нет необходимости следить за тем, чтобы точка $s = 1$ не попала в круг $|s - s_1| \leqslant v$.

Полагая здесь $V = \ln^2(r|t| + 3r)$, $v = V^{-1}$ и повторяя предыдущие рассуждения, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 8. *Пусть $T \geqslant 2$, $r \leqslant \log^{A_1} T$, $A_1 > 0$ – константа, $V_1 = \ln^2(rT + 4r) + 2c_1^{-1} r^{3.5+\varepsilon} \ln^3(4r)$, где c_1 – константа из следствия 2, d_0 – константа из леммы 7. Тогда в прямоугольнике*

$$\Pi = \left\{ s \ \mid \ 1 - \frac{d_0}{3V_1} \leqslant \mathrm{Re}\ \ s \leqslant 2, \quad |\mathrm{Im}\ \ s| \leqslant T \right\}$$

справедлива оценка

$$\frac{F'(s, X, \chi)}{F(s, X, \chi)} = O(\log^{B_1} T),$$

где $B_1 = B_1(A_1) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_1 = \left\{ s \ \mid \ 1 - \frac{2d_0}{3V_1} < \mathrm{Re}\ \ s < 3, \quad |\mathrm{Im}\ \ s| < T + 1 \right\}.$$

Согласно лемме 7 при $s \in \Pi_1$ $F(s, X, \chi) \neq 0$, а значит функция $\log F(s, X, \chi)$ является аналитической в области Π_1 (под $\log z$ понимается главная ветвь логарифмической функции).

Пусть $s \in \Pi$. Легко видеть, что круг радиуса $\frac{d_0}{3V_1}$ с центром в точке s содержится в области Π_1. В силу формулы Коши имеем

$$\frac{F'(s, X, \chi)}{F(s, X, \chi)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\log F(w, X, \chi)}{(w-s)^2} dw,$$

где C – окружность радиуса $\frac{d_0}{3V_1}$ с центром в точке s.

Пользуясь леммой 5, имеем

$$|\log F(w,X,\chi)| \ll \log|F(w,X,\chi)|+1 \ll \log\log T$$

(мы учли, что $\ln(rT+3r) \ll \log T$, так как по условию $r \leqslant \log^{A_1} T$).

Таким образом,

$$\left|\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}\right| \ll \log\log T \left|\int\limits_C \frac{dw}{(w-s)^2}\right| \ll V_1 \log\log T \ll \log^{B_1} T,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 1

Достаточно оценить сумму

$$\sum_{N(P)\leqslant x} X(P)\chi(N(P)),$$

где X – неглавный характер группы классов идеалов, а χ – примитивный характер Дирихле по модулю r, $1<r\leqslant \log^{A_1} x$.

Пусть

$$\Lambda_1(A) = \begin{cases} \log N(P), & \text{если } A=P^k,\ P \text{ – простой идеал, } k\geqslant 1,\\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из формулы частного суммирования имеем

$$\left|\sum_{N(P)\leqslant x} X(P)\chi(N(P)\right| \ll \left|\sum_{N(A)\leqslant y} \Lambda_1(A)X(A)\chi(N(A))\right| \log^{-1} x + \sqrt{x}\log x,$$

где y – такое число из промежутка $(\sqrt{x}, x]$, при котором модуль суммы $\sum_{N(A)\leqslant y}\Lambda_1(A)X(A)\chi(N(A))$ максимален.

Оценим последнюю сумму. Применим формулу Перрона (см., например, [1, с. 75])

$$\sum_{N(A)\leqslant y} \Lambda_1(A)X(A)\chi(N(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\left(-\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}\right)\frac{y^s}{s}ds + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $T = \exp{(\log x)^{\frac{1}{10A_1}}}$.

Пусть $V_1 = \ln^2(rT + 4r) + 2c_1^{-1}r^{3.5+\varepsilon}\ln^3(4r)$, где c_1 – константа из следствия 2, d_0 – константа из леммы 7.

Поскольку в силу леммы 8 в прямоугольнике $\Pi = \{s \mid 1 - \frac{d_0}{3V_1} \leqslant \mathrm{Re}\ s \leqslant 2, \quad |\mathrm{Im}\ s| \leqslant T\}$ функция $-\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}$ является аналитической и удовлетворяет неравенству $|-\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}| \ll \log^{B_1} T$, воспользуемся теоремой Коши и сдвинем отрезок интегрирования влево:

$$\sum_{N(A)\leqslant y} \Lambda_1(A)X(A)\chi(N(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1-iT}^{b_1+iT}\left(-\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}\right)\frac{y^s}{s}ds+$$

$$+O\Big(y\exp(-0.5(\log x)^{\frac{1}{10A_1}})\Big), \text{ где } b_1 = 1 - \frac{d_0}{3V_1}.$$

Оценим сверху y^{b_1}. Легко видеть, что

$$V_1 \leqslant c_{10}(1 + c_1^{-1})\log^{4A_1+2} T < c_{10}(1 + c_1^{-1})\log^{\frac{3}{5}} x,$$

где $c_{10} > 1$ – абсолютная постоянная.

Поэтому существует постоянная $c_{11} > 0$ такая, что

$$y^{b_1} \leqslant x^{b_1} < x\exp(-c_{11}(\log x)^{\frac{2}{5}}).$$

Пользуясь этим неравенством и неравенствами

$$\left| -\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}\right| \ll \log^{B_1} T, \qquad \int\limits_{b_1-iT}^{b_1+iT}\frac{|ds|}{|s|} \ll \log T,$$

получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1-iT}^{b_1+iT}\left(-\frac{F'(s,X,\chi)}{F(s,X,\chi)}\right)\frac{y^s}{s}ds = O(x\exp(-c(\log x)^{\frac{1}{20A_1}})),$$

то есть

$$\sum_{N(A)\leqslant y} \Lambda_1(A)X(A)\chi(N(A)) = O(x\exp(-c(\log x)^{\frac{1}{20A_1}})),$$

где $c > 0$ – постоянная. Теорема 1 доказана.

Следствие 3. *Пусть l и q – целые взаимно простые числа, $1 \leqslant q \leqslant \log^{A_1} x$, $A_1 > 1$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi_1(x,q,l,\mathcal{C}) = \frac{1+\chi(q;D,0)\chi_1(l)}{h\varphi(q)}\mathrm{Li}\ x + O(x\exp(-c(\log x)^{\frac{1}{20A_1}})),$$

где $c = c(A_1) > 0$.

Утверждение сразу следует из теоремы 1 и формулы (3).

Литература

1. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел.* — Наука, М. (1983).
2. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, — *Теория чисел.* Наука, М. (1985).
3. W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers.* — Warszawa (1974).
4. С. Ленг, *Эллиптические функции.* — Наука, М. (1984).
5. С. А. Гриценко, *О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле.* — Чебышевский сборник **4**, вып. 2 (2003), 53–67.
6. С. А. Гриценко, *Оценка линейной тригонометрической суммы по простым числам, представимым заданной квадратичной формой.* — Чебышевский сборник **5**, вып. 4(12) (2005), 82–87.

Gritsenko S. A. On the distribution of norms of prime ideals of the given class in arithmetic progressions.

Let $\mathcal{C}$ be a class of ideals of the ring of algebraic numbers of the imaginary quadratic field. Let l and q be relatively prime integers, $1 \leqslant q \leqslant \log^{A_1} x$, $A_1 > 1$. The asymptotic formula for the number $\pi_1(x,q,l,\mathcal{C})$ of prime ideals belonging to the class $\mathcal{C}$ whose norms do not exceed x and lie in an arithmetic progression got in this paper.

БелГУ, г. Белгород

Поступило 3 марта 2005 г.